

53

X-3

2255

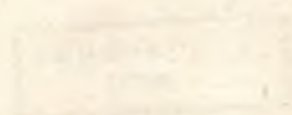
ВСТУП

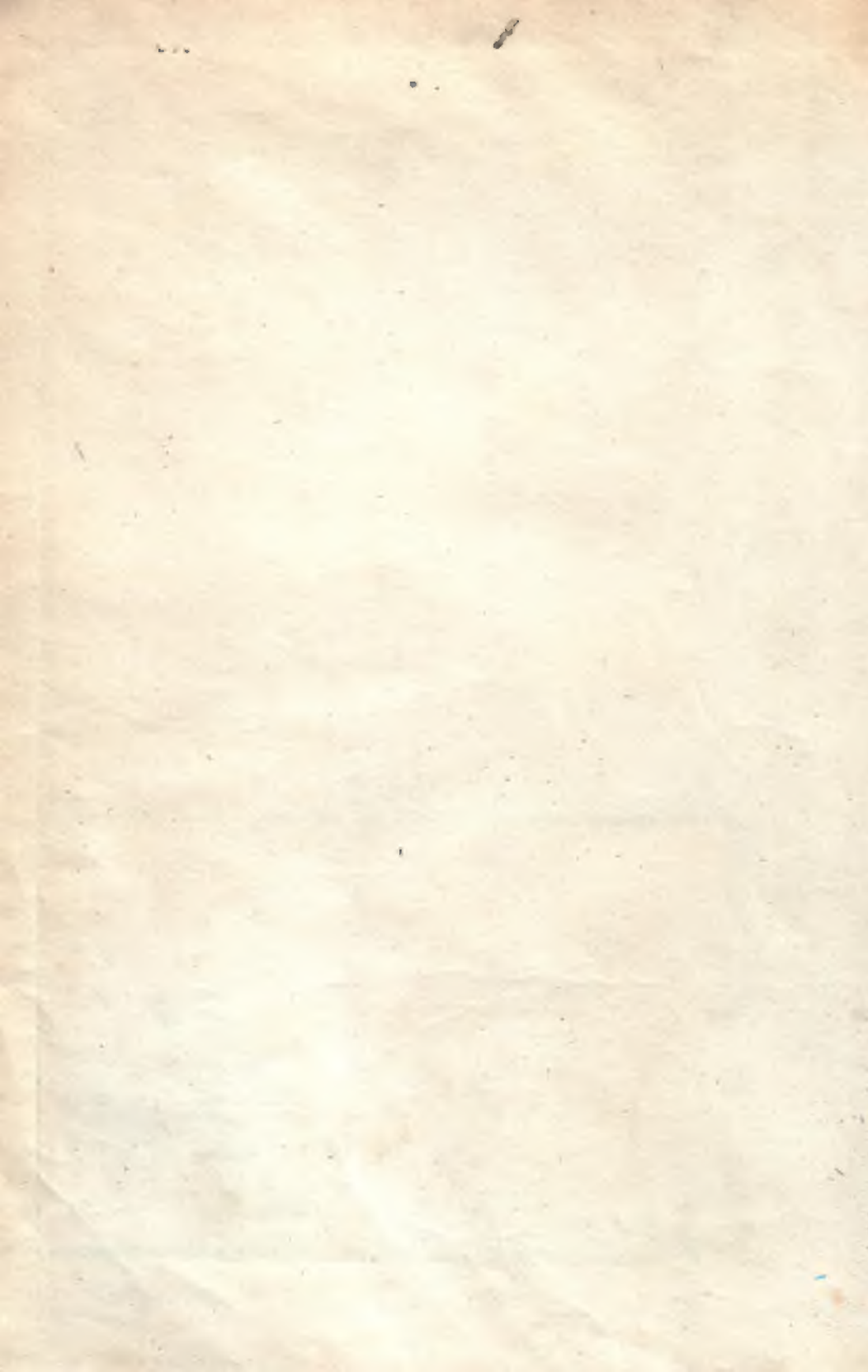
Ф И З И К И

А. И. Овчинников

М. 1958

Учебник для учащихся 10-11 классов общеобразовательных школ





17

Мамута
у
Изданіи въ Петербургѣ 1899 г.

КУРСЪ

ФИЗИКИ

О. Д. ХВОЛЬСОНА.

53
X-31

ТОМЪ ПЕРВЫЙ.

Введеніе.—Механика.—Нѣкоторые измѣрительные приборы и способы измѣренія.—Ученія о газахъ, жидкостяхъ и твердыхъ тѣлахъ.

2255

59

Параметры-типы
Исторія в. Клеи

проверено
1966 г.

Съ 377 рисунками въ текстѣ.

c/a

✓



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

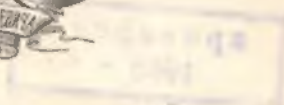
ИЗДАНІЕ К. Л. РИККЕРА.

Невскій проспектъ, 14.

1897.



2558



Дорогому отцу

ПРОФ. Д. А. ХВОЛЬСОНУ

посвящаетъ этотъ трудъ

благодарный авторъ.



ПРЕДИСЛОВІЕ.

Quod potui, feci....; что же касается до «meliora», то я и самъ могъ бы надѣяться издать послѣдующія части лучше, а въ далекомъ будущемъ можетъ быть и этотъ томъ сдѣлать «melior», если мои друзья и товарищи по наукѣ не откажутся снабдить меня драгоценными указаніями, о чемъ и прошу ихъ усердно. За всякое указаніе впередъ приношу искреннюю и горячую благодарность.

Весь «Курсъ Физики» рассчитанъ на четыре тома. Второй томъ будетъ содержать ученія о звукѣ и о лучистой энергіи; третій—ученіе о теплотѣ; четвертый—ученія о магнетизмѣ и объ электричествѣ. Надѣюсь выпустить томъ II весною 1898 года.

Глубокую и сердечную благодарность приношу моему учителю проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскому и моимъ друзьямъ проф. А. И. Садовскому и А. Л. Гершуну.

Проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскій, мой искренно любимый и уважаемый учитель, съумѣвшій столь многимъ лицамъ вселить любовь къ наукѣ, многосторонне выказывалъ интересъ къ моей работѣ. Ѳедоръ Ѳомичъ далъ мнѣ возможность воспользоваться рисунками, помѣщенными въ его «Курсѣ Наблюдательной Физики». Изъ этихъ рисунковъ весьма многіе, и притомъ наиболѣе важныя и по идеѣ цѣнныя, были придуманы Ѳедоромъ Ѳомичемъ. Пользуясь этими рисунками, я черпалъ изъ его книги и соотвѣтствующія имъ описанія и объясненія. Сочувствіе Ѳедора Ѳомича моему труду меня постоянно ободряло.

Проф. А. И. Садовскій прочелъ всю рукопись перваго тома и далъ мнѣ огромное число цѣнныхъ указаній. Его глубокій критическій анализъ и его опытность въ вопросахъ дидактическихъ имѣли не малое вліяніе на мою работу, къ которой онъ постоянно относился съ живѣйшимъ интересомъ. А. Л. Гершунъ читалъ одну корректуру, отмѣчая не только опечатки, но и самыя разнообразныя чромахи, ускользавшія отъ моего вниманія. Его

широкія знанія и его начитанность привесли этой книгѣ весьма большую пользу.

Проф. А. И. Введенскій и С. Θ. Гливка имѣли любезность просмотрѣть нѣкоторыя статьи.

Съ величайшею благодарностью вспоминаю покойнаго К. Л. Риккера, предпринявшаго изданіе этого курса. Это былъ не только умный и предприимчивый издатель, но и хорошій человекъ, всегда глубоко вникавшій въ интересы и нужды тѣхъ, съ которыми его сталкивала его многосложная дѣятельность, и велико число лицъ, которымъ онъ сдѣлалъ добро и которыя благодарно вспоминаютъ его имя. Да будетъ ему вѣчная память!

Его вдова, О. А. Риккеръ, и нынѣ управляющій его фирмою, Г. Г. Блажекъ, памятуя завѣты покойнаго, не щадили средствъ при изданіи этой книги. Глубочайшее и сердечное имъ спасибо!

О. Хвольсонъ.

С.-Петербургъ,
Мартъ 1897 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ I-го ТОМА.

Предисловіе	стр. I
-----------------------	--------

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Два міра.	1
2. Задачи физики.	2
3. Гипотезы.	4
4. Эфиръ.	6
5. Раздѣленіе физики.	8
6. Физическія величины.	11
7. Физическіе законы.	16
8. Величины, имѣющія и величины, не имѣющія геометрическаго отно- шенія	23
9. Состояніе матеріи.	24
10. Сохраненіе матеріи	35
11. Нѣкоторые вопросы изъ математики	36
12. Векторы.	41
13. Журнальная литература.	44

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

МЕХАНИКА.

Глава первая. Движенія.

1. Вступленіе	48
2. Скорость	49
3. Сложеніе скоростей.	52
4. Ускореніе прямолинейнаго равнопеременнаго движенія	54
5. Ускореніе при произвольномъ прямолинейномъ движеніи	57
6. Ускореніе при криволинейномъ движеніи	58
7. Движеніе вращательное	61

Глава вторая. Сила.

1. Опредѣленіе термина «сила».	64
2. Инерція	64
3. Второй законъ движенія.	65

	СТР.
4. Масса. Единица силы. Плотность	66
5. Давленіе.	69
6. Вѣсъ	70
7. Третій законъ движенія	71
8. Импульсъ силы и количество движенія. Третье слѣдствіе изъ закона II.	72
9. Мгновенныя силы.	75
10. С. G. S. система единицъ	76
11. Сложеніе и разложеніе силъ	78
12. Пара силъ	81
13. Центробѣжная сила	82
14. Динамическое поле	83
15. Центръ инерціи	84
16. Моментъ инерціи	85

ГЛАВА ТРЕТЬЯ. РАБОТА И ЭНЕРГІЯ.

1. Живая сила	89
2. Работа	90
3. Работа и живая сила	96
4. Работа и время. Мощность	100
5. Энергія. Принципы I	101
6. Формы или виды энергіи	103
7. Принципы II Сохраненіе энергіи	109
8. Принципы III	111

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНІЕ.

1. Геометрическое происхожденіе гармоническаго колебательнаго движенія	112
2. Пройденный путь и фаза	113
3. Скорости, ускореніе, сила и энергія	115
4. Сложеніе двухъ одинаково направленныхъ гармоническихъ колебательныхъ движеній одинаковаго періода.	119
5. Сложеніе произвольнаго числа одинаково направленныхъ гармоническихъ колебательныхъ движеній, имѣющихъ общій періодъ	123
6. Разложеніе гармоническаго колебательнаго движенія на два такихъ же движенія, имѣющихъ одинаковое съ нимъ направленіе.	124
7. Сложеніе двухъ взаимно перпендикулярныхъ гармоническихъ колебательныхъ движеній, имѣющихъ одинаковый періодъ.	125
8. Сложеніе двухъ равномерныхъ, одинаково быстрыхъ движеній по одной окружности, совершающихся по противоположнымъ направленіямъ.	129
9. Разложеніе прямолинейнаго гармоническаго колебательнаго движенія на два круговыхъ движенія	131
10. Сложеніе колебательныхъ движеній, имѣющихъ различные періоды	132
11. Затухающія колебательныя движенія.	135

ГЛАВА ПЯТАЯ. ЛУЧИСТОЕ РАСПРОСТРАНЕНІЕ КОЛЕБАНИЙ.

1. Возникновеніе лучей	139
2. Образованіе лучей съ поперечными колебаніями	140
3. Уравненіе луча.	143
4. Продольныя колебанія	144
5. Уравненіе луча, прошедшаго рядъ срединъ.	147

	СТР.
6. Интерференція лучей съ одинаковымъ направленіемъ колебаній . . .	148
7. Интерференція лучей, колебанія которыхъ расположены въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ . . .	151
8. Интерференція встѣчныхъ колебаній. Стоячія волны . . .	153
9. Волновая поверхность и волновая линія; энергія и амплитуда . . .	157
10. Принципъ Гюйгенса . . .	158
11. Такъ называемое прямолинейное распространеніе колебаній . . .	160
12. Диффракція . . .	162
13. Физическое понятіе о волновой поверхности . . .	164
14. Отраженіе волнъ и лучей . . .	164
15. Преломленіе волнъ и лучей . . .	166
16. Потери полуволны при отраженіи . . .	168
17. Стоячія волны, образующіяся при отраженіи . . .	172
18. Принципъ Доплера . . .	174

ГЛАВА ШЕСТАЯ. ВСЕМІРНОЕ ТЯГОТѢНІЕ.

1. Законъ всемірнаго тяготѣнія . . .	177
2. О коэффициентѣ пропорціональности въ формулѣ Ньютона . . .	180
3. Отрицательныя массы . . .	182
4. Actio in distans . . .	184
5. Притяженіе точки шаровымъ слоемъ и шаромъ . . .	186
6. Случай равномернаго динамическаго поля . . .	190
7. Частный случай притяженія точки эллипсоидальнымъ слоемъ . . .	192

ГЛАВА СЕДЬМАЯ. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ УЧЕНІЕ О ПОТЕНЦІАЛѢ.

1. Функція точки . . .	193
2. Потенціалъ при одной притягивающей точкѣ (матеріальной точкѣ) . . .	193
3. Потенціалъ при системѣ дѣйствующихъ массъ . . .	198
4. Потенціалъ двухъ системъ другъ на друга . . .	201
5. Потенціалъ системы самой на себя . . .	202
6. Теорема о пространствѣ, внутри котораго $\sum \text{Cons}t$. . .	204
7. Потенціалъ шароваго слоя и шара . . .	204

ГЛАВА ВОСЬМАЯ. СИЛА ТЯЖЕСТИ.

1. Равномерное динамическое поле у поверхности земли . . .	208
2. Центр тяжести . . .	208
3. Свободное вертикальное движеніе тѣлъ въ пустотѣ . . .	209
4. Движеніе наклонно брошенныхъ тѣлъ въ пустотѣ . . .	211
5. Математическій маятникъ . . .	214
6. Физическій маятникъ . . .	216

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ. РАЗМѢРЪ ФИЗИЧЕСКИХЪ ВЕЛИЧИНЪ.

1. Опредѣленіе термина „размѣръ“ . . .	219
2. Опредѣленіе размѣра единицъ различныхъ величинъ . . .	222
3. Переходъ отъ одной системы единицъ къ другой . . .	227
4. Абсолютныя системы единицъ, построенныя не на основныяхъ единицахъ L, M и T . . .	229
Литература . . .	231

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

НѢКОТОРЫЕ ИЗМѢРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И
СПОСОБЫ ИЗМѢРЕНІЯ.ГЛАВА ПЕРВАЯ. ОБЩІЯ ЗАМѢЧАНІЯ О ПРОИЗВОДСТВѢ ФИ-
ЗИЧЕСКИХЪ ИЗМѢРЕНІЙ.

	СТР.
1. Измѣренія абсолютныя и относительныя.	233
2. Эталоны и измѣрительные приборы	235
3. Манипуляціи при измѣреніяхъ	236
4. Нѣкоторыя подробности, относящіяся вообще до производства финан- ческихъ измѣреній	239
5. Приближенное вычисленіе результатовъ измѣреній.	243
6. Вычисленіе наиболѣе вѣроятнаго результата ряда опредѣленій одной величины	243
7. Вычисленіе наиболѣе вѣроятныхъ значений нѣсколькихъ величинъ. Способъ наименѣшихъ квадратовъ.	246
Литература.	250

ГЛАВА ВТОРАЯ. НѢКОТОРЫЕ ВОСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ.

1. Дѣлительная машина линейная.	251
2. Дѣлительная машина круговая	258
3. Уровень	260
4. Луна, микроскопъ и измѣрительная труба.	261

ГЛАВА ТРЕТЬЯ. ИЗМѢРЕНІЕ ЛИНЕЙНЫХЪ РАЗМѢРОВЪ ТѢЛЪ.

1. Эталоны длины	262
2. Нониусъ	264
3. Микрометръ	264
4. Окулярный микрометръ	266
5. Сферометръ	268
6. Катетометръ	270

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. ИЗМѢРЕНІЕ УГЛОВЪ.

1. Верньеръ	272
2. Уровень	273
3. Теодолитъ	274
4. Способъ зеркала и шкалы	275
5. Измѣреніе двугранныхъ угловъ	277

ГЛАВА ПЯТАЯ. ИЗМѢРЕНІЕ ОБЪЕМОВЪ.

1. Опредѣленіе емкостей	282
2. Волунометръ Ренко	283

ГЛАВА ШЕСТАЯ. ИЗМѢРЕНІЕ СИЛЪ И МАССЪ.

1. Общія замѣчанія объ измѣреніи силъ и массъ.	285
--	-----

2. Разновѣси	286
3. Устройство вѣсовъ	288
4. Устойчивость, чувствительность и вѣрность вѣсовъ	290
5. Наблюденіе качаній коромысла	292
6. Способы вѣзвѣшиванія	294
7. Поправка на потерю вѣса гѣл. въ воздухѣ	295
8. Вѣсы десятичные, вѣсы Роберваля, Вестгала и Гравеса	298
9. Динамометры	302
10. Одноитные круглые вѣсы или унифиларъ	303
11. Двунитные круглые вѣсы или бифиларъ	309

ГЛАВА СЕДЬМАЯ. ИЗМѢРЕНІЕ ВРЕМЕНИ.

1. Общія замѣчанія объ измѣреніи времени	312
2. Хронографы	315
3. Опредѣленіе времени качанія маятника	318
4. Моментъ инерціи маятника	319
5. Сравненіе времени качанія двухъ маятниковъ; методъ совпаденій	320
6. Стробоскопическій методъ Ларгетанъ'а сравненія времени качанія двухъ маятниковъ	321

ГЛАВА ВОСЬМАЯ. ИЗМѢРЕНІЕ НАПРАВЛЕНІЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ.

1. Направленіе силы тяжести	322
2. Опредѣленіе g при помощи маянны Атвуда и другихъ приборовъ, служащихъ для изслѣдованія свободнаго паденія тѣлъ	324
3. Опредѣленіе g по способу Вонда измѣренія времени качанія маятника	327
4. Опредѣленіе g по способу оборотнаго маятника Катеръ'а	329
5. Длительность секунднаго маятника	331
6. Зависимости ускоренія g отъ высоты и широты мѣста	331
Литература	334

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ. ИЗМѢРЕНІЕ СРЕДНЕЙ ПЛОТНОСТИ ЗЕМЛИ.

1. Измѣреніе Maskelyne'а	334
2. Измѣренія Cavendish'а	335
3. Позднѣйшія измѣренія, произведенныя по способу Cavendish'а	337
4. Другіе способы опредѣленія средней плотности земли	337
Литература	340

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

УЧЕНІЕ О ГАЗАХЪ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ ПЛОТНОСТЬ ГАЗОВЪ.

1. Флѣшка частичныхъ силъ. Основныя свойства газовъ. Идеальный газъ	341
2. Плотность газовъ (и перегрѣтыхъ паровъ) и молекулярный вѣсъ	342
3. Способъ Regnault опредѣленія плотности газовъ	343
4. Способы Gay-Lussac'а и H.emann'а опредѣленія плотности паровъ	346
5. Способъ Dumas	346
6. Способъ вытѣсненія	348
Литература	349

ГЛАВА ВТОРАЯ. УПРУГОСТЬ ГАЗОВЪ.

	СТР.
1. Законъ Бойля-Мариотта	350
2. Исследования, произведенныя до Regnault	350
3. Исследования Regnault	351
4. Давленія меньшія одной атмосферы. Работы Siljestroem'a, Менделѣва, Amagat и Fuchs'a	354
5. Вѣсьма сильныя давленія. Работы Natterer'a и Cailletet	355
6. Опыты Amagat	356
7. Критическая температура	358
8. Вліяніе температуры на сжимаемость газовъ	358
9. Уравненіе состоянія для идеальныхъ газовъ, уравненіе Клапейрона	359
10. Формула van der Waals'a	361
11. Формулы Clausius'a и Regnault	362
Литература	363

ГЛАВА ТРЕТЬЯ. БАРОМЕТРЫ, МАНОМЕТРЫ И НАСОСЫ.

1. Атмосферное давленіе	364
2. Ртутный барометръ	364
3. Установка барометра и поправка при отчетѣ	368
4. Барометры съ другими жидкостями и барометры металлическіе	369
5. Барографъ	370
6. Предѣлы измѣненія барометрическаго давленія	371
7. Манометры	371
8. Ртутныя насосы	373
Литература	375

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. СОПРЯКОСНОВЕНІЕ ГАЗОВЪ СЪ ГАЗАМИ, ЖИДКОСТЯМИ И ТВЕРДЫМИ ТѢЛАМИ.

1. Слѣпен газомъ съ газами Законъ Dalton'a	376
2. Растворимость газовъ въ жидкостяхъ	377
3. Приборы для исследования растворимости газовъ въ жидкостяхъ	378
4. Результаты исследований растворимости газовъ въ жидкостяхъ	380
5. Выдѣленіе растворенныхъ газовъ изъ жидкостей	382
6. Явленія при сопрякосновении газовъ съ твердыми тѣлами	382
Литература	384

ГЛАВА ПЯТАЯ. ОСНОВАНІЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВЪ.

1. Характеръ движенія газовыхъ молекулъ	385
2. Законъ Бойля-Мариотта	387
3. Слѣдствія, вытекающія изъ основной формулы	393
4. Скорость газовыхъ частицъ	394
5. Законъ Авогадро	395
6. Законъ Дальтона	396
7. Законъ Гей-Люссака	396
8. Теплоемкость газовъ	397
9. Энергія газа	399
10. Истинныя скорости молекулъ. Законъ Максвелла	401
11. Средняя длина пути	404
12. Внутреннее треніе въ газахъ	406

13. Величина средней длины пути	408
14. Размеры и число молекулъ	409
Литература	411

ГЛАВА ШЕСТАЯ. ГАЗЫ ВЪ СОСТОЯНІИ ДВИЖЕНІЯ И РАСПАДЕНІЯ.

1. Работа расширения или сжатия газа	411
2. Внезапное расширение или сжатие газа; адиабатическое или изентро- пическое измѣненіе состоянія газа	413
3. Истечение газа изъ малаго отверстия и изъ тонкой трубки	416
4. Взаимная диффузія газовъ	419
5. Диффузія газовъ черезъ пористыя перегородки; эффузія	420
6. Диффузія газовъ черезъ каучукъ и черезъ наплавленные металлы	422
7. Диффузія газовъ черезъ жидкости	423
8. Сопротивленіе газовъ движенію твердыхъ тѣлъ	423
9. Диссоціація газовъ	426
10. Заключение	429
Литература	430

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

УЧЕНІЕ О ЖИДКОСТЯХЪ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ. Основныя свойства и строеніе жидкостей.

1. Основныя свойства жидкостей	431
2. Строеніе жидкостей	432
3. Испареніе жидкостей	434
4. Строеніе молекулъ жидкости	435

ГЛАВА ВТОРАЯ. Плотность жидкостей.

1. Понятіе о плотности жидкостей	436
2. Способъ Wilson'a	437
3. Способъ сообщающихся сосудовъ	437
4. Способъ примѣненія инклиметра (или флакона)	437
5. Способъ, основанный на законѣ Архимеда	438
6. Ареометры	441
Литература	443

ГЛАВА ТРЕТЬЯ. Сжимаемость жидкостей.

1. Коэффициентъ сжатія	443
2. Измѣненія сжимаемости жидкостей, произведенныя до Oerstedt'a	444
3. Опыты Oerstedt'a	445
4. Опыты Sturm'a и Colladon'a	446
5. Опыты Regnault	447

	СТР.
§ 6. Различныя измѣренія сжимаемости жидкостей	448
§ 7. Изслѣдованія Amagat	450
Литература	453

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ.

§ 1. Давленіе поверхностнаго слоя. Формула Laplace'a	451
§ 2. Формула Gauss'a; поверхностное натяженіе жидкостей	456
§ 3. Опыты, подтверждающіе существованіе поверхностнаго натяженія жидкостей	459
§ 4. Связь между нормальнымъ давленіемъ и поверхностнымъ натяженіемъ	461
§ 5. Абсолютная величина нормальнаго давленія	463
§ 6. Форма, принимаемая жидкой массой подъ вліяніемъ поверхностнаго натяженія. Опыты Plateau	464
§ 7. Пластинчатое состояніе жидкостей. Мыльные пузыри	466
§ 8. Поверхностное натяженіе при соприкосновеніи нѣсколькихъ средъ	469

ГЛАВА ПЯТАЯ. ЯВЛЕНІЯ СМАЧИВАВІЯ И ВОЛОСНОСТИ.

§ 1. Соприкосновеніе жидкостей съ твердыми тѣлами	472
§ 2. Краевой уголъ	473
§ 3. Сопротивленіе и движеніе капель въ трубахъ	475
§ 4. Волосность	476
§ 5. Измѣненія и обозначенія постоянныхъ	479
§ 6. Явленія волосности въ не-цилиндрическомъ пространствѣ	481
§ 7. Кажущееся притяженіе и отталкиваніе тѣлъ, отчасти погруженныхъ въ жидкость	482
§ 8. Вдѣлываніе жидкостей пористыми тѣлами	483
§ 9. Способъ опредѣленія натяженія γ и капиллярной постоянной a^2	485
§ 10. Дальнѣйшіе результаты измѣренія γ и a^2 ; роль температуры	491
§ 11. О величинѣ радиуса сферы частичнаго дѣйствія	492
Литература	493

ГЛАВА ШЕСТАЯ. РАСТВОРЫ ТВЕРДЫХЪ И ЖИДКИХЪ ТѢЛЪ.

§ 1. Общія замѣчанія о растворахъ	495
§ 2. Отдѣленіе растворителя отъ растворимаго и обратнѣ	497
§ 3. Зависимость растворимости отъ температуры	497
§ 4. Раствореніе въ смѣсяхъ нѣсколькихъ жидкостей и растворимость смѣсей въ одной жидкости	500
§ 5. Пересыщенные растворы	500
§ 6. Плотность растворовъ	501
§ 7. Обзоръ нѣкоторыхъ дальнѣйшихъ свойствъ растворовъ	503
§ 8. Взаимное раствореніе жидкостей	504
Литература	505

ГЛАВА СЕДЬМАЯ. ДИФФУЗИЯ И ОСМОСЪ.

§ 1. Свободная диффузія жидкостей	506
§ 2. Диффузія жидкостей черезъ пористую перегородку или осмосъ	509
§ 3. Осмотическое давленіе	510

§ 4 Законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака и Авогадро для растворовъ	512
Литература	513

ГЛАВА ВОСЬМАЯ. ТРЕНИЕ ВЪ ЖИДКОСТЯХЪ.

§ 1. Коэффициенты внутреннего трения	516
§ 2. Коэффициентъ внешнего трения и коэффициентъ скольженія	517
§ 3. Определение коэффициента трения по способу капиллярныхъ трубокъ	517
§ 4. Способы Coultomb'a, Helmholtz'a, Margules'a и другихъ для опредѣленія коэффициента трения	519
§ 5. Вліяніе температуры и давленія на вязкость жидкостей	521
§ 6. Внутреннее трение въ растворахъ и сѣсѣяхъ	522
Литература	523

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ. ДВИЖЕНІЕ ЖИДКОСТЕЙ.

§ 1. Установившееся движеніе жидкостей	524
§ 2. Истечение жидкости изъ небольшого отверстія	525
§ 3. Сжатіе струи	526
§ 4. Устройство жидкой струи	527
§ 5. Теченіе жидкости черезъ трубы	527
§ 6. Волны и вихри	529
Литература	531

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ. КОЛЛОИДЫ.

§ 1. Коллоиды	532
§ 2. Диффузия и осмосъ коллоидовъ въ діализѣ	533
Литература	534

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

УЧЕНІЕ О ТВЕРДЫХЪ ТѢЛАХЪ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ. ВЕЩЕСТВО ВЪ ТВЕРДОМЪ СОСТОЯНІИ.

§ 1. Характеристика твердаго состоянія вещества	535
§ 2. Кристаллическое и аморфное состояніе вещества	537
§ 3. Системы кристалловъ	538
§ 4. Гемиздрія	542
§ 5. Двойники	544
§ 6. Строеніе кристалловъ	544
§ 7. Полиморфизмъ (гетероморфизмъ)	546
§ 8. Изоморфизмъ	546
§ 9. Аллотропія	547
Литература	547

ГЛАВА ВТОРАЯ. ПЛОТНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТѢЛЪ.

	СТР.
1. Предварительныя замѣчанія	548
2. Измѣреніе вѣса и объема	549
3. Опредѣленіе объема вытѣсненной воды	549
4. Способъ отыскиванія жидкости, одинаково плотной	549
5. Способъ ареометра	549
6. Способъ пружинныхъ вѣсовъ Jolly	550
7. Способъ пикнометра	550
8. Способъ гидростатическій	551
9. Удельный, атомный и молекулярный объемы	552
10. Плотность сплавовъ	553

ГЛАВА ТРЕТЬЯ. ДЕФОРМАЦИИ ТВЕРДАГО ТѢЛА.

1. Общія замѣчанія о деформацияхъ твердаго тѣла	554
2. Предѣлы упругости и разрывъ	555
3. Твердость	556
4. Обзоръ величинъ, встрѣчающихся въ ученіи объ упругости	558
5. Растяженіе стержней; модуль Юнга	559
6. Параллельное абсолютное сопротивленіе; числовыя величины	564
7. Абсолютное сопротивленіе одностороннему сдвигу	569
8. Поперечное сжатіе, коэффициентъ Пуассона	569
9. Коэффициенты и модуль односторонняго сжатія слоя	572
10. Коэффициентъ всесторонняго сжатія	575
11. Модуль сдвига	578
12. Обзоръ формулъ	581
13. Крученіе	583
14. Связь между модулемъ крученія и модулемъ сдвига	586
15. Опытное опредѣленіе модуля сдвига и коэффициента Пуассона	588
16. Численныя значенія модуля сдвига	590
17. Гнупіе	590
18. Относительное сопротивленіе; разломъ и разрывъ при крученіи	596
19. Тянучесть и текучесть	597
20. Вліяніе давленія на тѣла соприкасающіяся; опыты Spring'a	599
21. Упругое послѣдствіе	602
22. Упругость кристалловъ	604
Литература	604

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. ТРЕНІЕ И УДАРЪ ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ.

1. Внутреннее треніе въ твердыхъ тѣлахъ	606
2. Треніе между твердыми тѣлами при скольженіи	607
3. Нажимъ Ргору	610
4. Треніе при катаніи или треніе второго рода	611
5. Ударъ тѣлъ; общія замѣчанія	611
6. Ударъ шаровъ неупругихъ	612
7. Ударъ шаровъ упругихъ	613
8. Наклонный ударъ шара въ стѣну	615
9. Время удара, формула Hertz'a	615
Литература	616
Таблицы	617
Обзоръ таблицъ	631

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ВВЕДЕНІЕ.

§ 1. Два міра. Для каждого человека существуют два міра: внутренний и внешний, посредниками между этими двумя мірами являются органы чувствъ. Внешний міръ имѣетъ способность вліять на органы чувствъ, влиять въ нихъ особаго рода измѣненія, или, какъ принято говорить, возбуждать въ нихъ разстройства. Внутренний міръ человека опредѣляется совокупностью тѣхъ явленій, которые абсолютно не могутъ быть доступны непосредственному наблюденію другого человека.

Вызванное внешнимъ міромъ раздраженіе въ органѣ чувствъ передается міру внутреннему и съ своей стороны вызываетъ въ немъ субъективное ощущеніе, для возможности котораго необходима наличность сознанія. Воспринятое внутреннимъ міромъ субъективное ощущеніе объективируется, т.-е. переносится во внешний простѣство, какъ вѣщо, принадлежащее опредѣленному мѣсту и опредѣленному времени. Иначе говоря, путемъ такого объективирования мы переносимъ во внешний міръ наши ощущенія, причемъ пространство и время служатъ тѣмъ фономъ, на которомъ располагается эти объективированныя ощущенія. Въ тѣхъ мѣстахъ пространства гдѣ они помѣщаются, мы involuntary образомъ, предполагаемъ порождающую ихъ причину. Изслѣдованіе процесса объективирования относится къ философіи.

Человѣку присуща способность сравнивать между собою воспринимаемыя ощущенія, считать объ нихъ одинаковості или неодинаковості и въ первомъ случаѣ отличать неодинаковості качественныя и количественныя, причемъ количественная неодинаковостъ можетъ относиться или къ напряженности (интенсивности), или къ продолжительности (экстенсивности) или, наконецъ, къ продолжительности раздражающей объективирующей причины.

Такъ какъ умозаключеніе сопровождающее всякое объективированіе, исключительно основано на воспринятомъ ощущеніи, то подвѣдывая одинаковостъ этихъ ощущеній непременно повлечетъ за собою и тождественностъ объективированныхъ причинъ и эта тождественностъ помимо и даже

противъ нашей воли сохраняется и въ тѣхъ случаяхъ, когда другіе органы чувствъ поспѣшимо свидѣтельствуютъ намъ о неоднородности причинъ (предметъ и изображеніе въ зеркалѣ; зрѣніе и осязаніе). Здѣсь кроется одна изъ главныхъ источниковъ несомнѣнно опровергаемыхъ умозаключеній, приложимыхъ къ такъ называемымъ обманамъ зрѣнія, слуха и т. д. Другой источникъ — отсутствіе навыка при ощущеніяхъ новизны.

Воспріятіе въ пространствѣ и времени чувственныхъ впечатлѣній, которыя мы сравниваемъ между собою и которымъ мы придаемъ значеніе объективной реальности (объективнаго) существующей помимо нашего сознанія, называется внѣшнимъ явленіемъ. Измѣненіе цвѣта тѣла въ зависимости отъ освѣщенія, односторонность уровня воды въ сосудахъ, качаніе маятника сать примѣры внѣшнихъ явленій.

Одинъ изъ мощныхъ трехъ рычаговъ, двигающихъ чеовѣчество по пути его развитія — это необходимость, имѣющая всеобщую, недостижимую цѣль — познаніе сущности нашего бытія, истиннаго отношенія нашего міра внутренняго къ міру внѣшнему. Другіе два рычага — стремленіе къ удобству и стремленіе къ славѣ.

Результатомъ необходимости явилось знакомство съ весьма большимъ числомъ разнообразнѣйшихъ явленій, которыя, смотря по характеру, составляютъ предметъ цѣлаго ряда наукъ. Между которыми физика занимаетъ одно изъ первыхъ мѣстъ, благодаря о широтѣ обрабатываемого ею поля и того значенія которое она имѣетъ почти для всѣхъ другихъ наукъ.

Объектируя причину ощущенія, т. е., перенося ее въ определенное мѣсто пространства, мы представляемъ себѣ это мѣсто содержащимъ нечто, называемое матеріей или веществомъ. Ограниченная часть пространства, содержащая матерію, называется физическимъ тѣломъ.

Матерія встрѣчается двухъ родовъ: неорганизованная и организованная, послѣдняя входитъ въ составъ животныхъ и растений.

Происхожденіе первой организованной матеріи намъ еще неизвѣстно, хотя мы и наблюдаемъ переходъ неорганизованной матеріи въ организованную (питаніе, дыханіе), но этотъ переходъ совершается только въ присутствіи уже готовой организованной матеріи. Таинство же перваго перехода скрыто.

§ 2. Задача физики. Физика въ широкомъ смыслѣ слова есть наука о неорганизованной матеріи и о происходящихъ въ ней явленіяхъ. Эти явленія называются явленіями физическими. Всѣ другія науки о матеріи имѣютъ дѣло съ матеріей организованной (биологическія науки). Физическія явленія могутъ повторяться и въ организованной матеріи, однако попытки свести всѣ явленія, обнаруживающіяся въ организованной матеріи, къ явленнымъ физическимъ не удалось и еще неизвѣстно удастся ли опъ когда-нибудь. Физическія явленія несомнѣнно играютъ выдающуюся роль и въ матеріи организованной, но ими не исчермывается совокупность ея свойствъ: остается все то, что составляетъ глубокую сущность и условіе организаци — и что называется жизнью.

Изучая явленія, происходящія въ неорганизованной матеріи, физика имѣетъ три задачи или цѣли, открыть, изслѣдовать и объяснить явленія. Для того, чтобы открыть и изслѣдовать явленія пользуются наблюде-

нием и экспериментом, которые впрочем невозможно отделить друг от друга резкою границей и которые вместе составляют опыт. В тесном смысле слова наблюдение над внешним явлением есть рассмотрение явления, происходящего вне нас при обычной мировой обстановке; эксперимент же представлять из себя воспроизведение явления при искусственной, может быть никогда в природе не встречающейся обстановке, с целью узнать тех особенностей, которые обнаружатся в самом явлении благодаря этой обстановке. Иногда говорят, что производство эксперимента может быть уподоблено постановке определенного вопроса, на который мы как бы заставляем природу дать нам более или менее определенный ответ. Необходимо, однако, принять во внимание, что как наблюдение, так и эксперимент должны предшествоваться и сопровождаться умственной работой. Для которой результат как того, так и другого дает новую пищу. Отсюда уже ясно, что и наблюдение имеет целью получение ответа на вопрос, выяснившийся предшествовавшего умственной работой. В более широком смысле слова «наблюдение» сопровождает каждый эксперимент.

Терминология, которую мы здесь пользовались (опыт, распадающийся на наблюдение и эксперимент) есть принятая ныне в философии. В физике принято отличать наблюдение и опыт, отождествляя опыт с тем, что выше было названо экспериментом. В дальнейшем мы будем пользоваться этою последнею терминологиею, хотя и в обыденной жизни слово «опыт» понимается в более широком общем смысле (например, в словах, опыт посланных готовь указать что и т. д.).

Третья задача или цель физики заключается в том, чтобы «объяснить» явление. Объяснить явление еще не значить сделать взаимную зависимость явлений логически понятной, так чтобы мы видели, что за данным явлением с логическою необходимостью должно возникнуть другое определенное явление. Объяснить явление значить найти закономерную связь между ним и другими нам уже знакомыми явлениями. И так, открыть и объяснить связь между явлениями — вот в чем заключается сущность третьей задачи физики. Но то ясно, что мы слюзим явление *A* к явлению *B*, нам уже знакомому; такой порядок случайный и при другом ходе исторического развития наших познаний он мог бы быть и обратным, мы свели бы явление *B* к давно знакомому *A*. Важна установка связи между явлениями *A* и *B*. Великие моменты в истории физики ознаменовались открытием новых, неожиданных связей между явлениями, напр. между магнитными и электрическими, между электрическими и световыми и т. д.

Существование закономерной связи между последовательными во времени явлениями для нас несомненно. Совокупность физических явлений, характеризующих внешний мир в данный момент, закономерна протекает от совокупности явлений, относившихся к предыдущему моменту, причем одно отдельно взятое явление *A* протекает от некоторой определенной группы *B* предшествовавших явлений. Условно можно группу *B* назвать ближайшею причиною явления *A*, а явление *A*

дѣйствию группы явленій *B*. Наблюдая явленіе *A*, мы можемъ поставить себѣ задачу, открыть группу явленій *B*, т. е. найти причину явленія *A*. Безчисленные примѣры изъ всѣхъ отдѣловъ физики доказываютъ, однако, что отысканіе причины на дѣлѣ сводится къ отысканію связей между явленіями.

Называя группу *B* причиной явленія *A*, мы полагаемъ, что всѣ остальные явленія вѣщаго міра, происходяща одновременно съ явленіями *B*, во не входящи въ составъ этой группы, не вліяютъ на форму явленія *A*, такъ что всякое ихъ измѣненіе не вызвало бы никакой въ немъ перемѣны.

Взаимныя отношенія причины (*B*) и дѣйствія (*A*) управляются двумя положеніями или аксіомами, составляющими основаніе для возможности созданія всякой науки о явленіяхъ. Эти двѣ аксіомы слѣдующія:

I. Изъ данной причины (группа *B*) можетъ явиться одно и только одно дѣйствіе (явленіе *A*). Это не значитъ, чтобы кромѣ *A* не могъ бы одновременно съ *A* существовать еще рядъ другихъ дѣйствій (явленій *C*, *D* и т. д.), также протекающихъ отъ той же группы *B*.

(Смысль аксіомы тотъ, что само явленіе *A* ни въ какомъ случаѣ (въ занимаемомъ изъ мѣстѣ или времени) даже мысленно не можетъ быть замѣнено другимъ явленіемъ). Эта аксіома выражаетъ существованіе въ мірѣ определенной и въ каждомъ случаѣ единственной закономерной связи между послѣдовательными по времени явленіями. Если группа *B* и закономерныя связи извѣстны, то явленіе *A* можетъ быть предсказано съ абсолютною достоверностью. Орудіемъ такого предсказанія служатъ математика и тотъ дедуктивный методъ логическаго мышленія, на которомъ она основана.

II. Одно и то же явленіе *A* можетъ, какъ дѣйствіе, происходить отъ большаго числа различныхъ группъ явленій *B*. Наблюдая явленіе *A* и будучи знакомы съ большимъ числомъ закономерныхъ связей между явленіями вообще, мы все-таки не можемъ знать, играли ли какую-нибудь роль при возникновеніи явленія *A* именно эти связи или кація-нибудь другія, намъ еще неизвѣстныя. Переходъ отъ *B* къ *A* никогда можетъ быть нами сдѣланъ съ абсолютною достоверностью; переходъ же отъ *A* къ *B* всегда лишь съ болѣе или менѣе степенью вѣроятности.

Изучая явленія и открывая закономерныя между ними связи, физика опредѣляетъ по данной группѣ явленій *B* единственно возможныя дѣйствія *A* и по данному явленію *A* отыскиваетъ наиболѣе вѣроятную причинную группу *B*. Во всѣхъ отдѣлахъ физики мы найдемъ примѣры этихъ двухъ родовъ умозаключеній.

§ 3. *Гипотезы*. Гипотезою называется предположеніе о существованіи въ какой-нибудь определенной закономерной связи между данными явленіями. Хотяже опредѣленіе гипотезы, какъ предположеніе о причинѣ даннаго явленія, слишкомъ узкое, — ибо гипотеза необходима во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ связь между явленіями еще не установлена — а потому она можетъ относиться столько же къ причинѣ, сколько и къ слѣдствію.

Гипотезою о причинѣ является выборъ какой-нибудь одной изъ возможныхъ группъ *B*, могущихъ имѣть слѣдствіемъ то явленіе *A*, которое мы хотимъ объяснить, т. е. закономерно связать съ другими явленіями. Для

выбора причинной группы, для создания гипотезы, править и быть не может. Это дело знания и гения.

Но все гипотезы имеют одинаковое значение, одинаковое право на существование. Хорошая гипотеза должна обладать следующими свойствами: она должна быть возможна, согласна с наблюдаемыми явлениями, она должна быть обширна, проста и проверяема.

Гипотеза должна быть возможна, т. е. она не должна противоречить тому, что абсолютно достоверно, что составляет неколебимое достоинство науки (например сохранение материи и энергии); она должна быть согласна с явлениями, которые, на основании известных закономерных связей, должны вытекать из нее, как единственно возможные, необходимые следствия. Необходимая обширность гипотезы требует, чтобы одна гипотеза охватывала возможно большее число явлений. Нельзя допустить, чтобы для каждого отдельного из ряда сходных явлений *A* была придумана особая гипотеза, т. е. было допущено существование особой причинной группы *B*. Чем меньше гипотез, тем выше развитие науки. Гипотеза должна быть проста, ибо в сознании человека глубоко коренится уверенность в крайней простоте основных причин совершающихся в природе явлений. Наконец, гипотеза должна быть проверяема, т. е. должна существовать возможность дедуктивным путем перейти от нее к большому числу следствий и опытом или наблюдением убедиться в справедливости выводимого, т. е. в реальном существовании этих следствий и тем самым получить меру степени верности самой гипотезы.

Гипотезы, не удовлетворяющие указанным свойствам, являются в науку безцельным и вредным балластом. К ним относятся слова Ньютона: *hypotheses non fingo*¹⁾.

Кроме гипотез о причинах, т. е. о существовании группы явления *B*, вызывающих явление *A*, играют не малую роль в науке, во-первых, гипотезы о существовании вообще закономерной связи между двумя несвязанными явлениями, причем остается пока открытым вопрос, кажутся ли эти явления друг к другу в отношении причины и следствия или они оба параллельно вырастают, как следствия еще скрытой причинной группы явлений (пятна на солнце и северный сияние) и, во-вторых, гипотезы о специальной форме закономерной связи между такими явлениями, между которыми причинная связь сама по себе несомнительна (электрический ток и нагревание проводника).

Без гипотезы, в обширном смысле слова, т. е. без предположений, немислим ни один шаг в науке. Клод Бернар говорит: «Предвзятая мысль или гипотеза есть необходимая точка исхода всякого опытного исследования. Без нее немисливо открыть что-либо нового». Всякому опыту несомненно должна предшествовать, больше или меньше ясно сознанный гипотеза о существовании явления или о его количественном или качественном характере. И в чистой математике прогресс без гипотезы о существовании той или другой связи между величинами невозмо-

¹⁾ Newton, Principia. Glasgow 1871, p. 530.

жени. Тотъ же Кюдь Бернаръ говоритъ: «Математикъ и натуралистъ пользуются однимъ и тѣмъ же методомъ, когда они ищутъ новыя истины. Индукцией доходить до постановки гипотезъ, которыя провѣряются». А на вопросъ, какъ путемъ индукции дойти до постановки такой гипотезы, которая повела бы къ прогрессу науки, можно найти отвѣтъ въ словахъ Кенлера, сказанныхъ моимъ добрымъ іенимъ подсказавъ мнѣ эту мысль».

Особенно слѣдуетъ остерегаться гипотезъ мнимыхъ, которыя отличаясь почти всегда большою сложностью, содержатъ въ себѣ въ видѣ допущенныхъ предположеній все, или почти все, что на основаніи ихъ еще только надлежитъ объяснить, т. е. привести въ законѣрную связь съ другими явлениями. О такихъ другихъ явленияхъ въ подобныхъ мнимыхъ гипотезахъ даже и не упоминается, а потому они и не могутъ служить для того разъясненія явленій, для котораго онѣ созданы. Онѣ представляютъ не больше, какъ описаніе явленій, иногда весьма полезное по своей краткости и картинности; но для ближайшаго уразумѣнія явленія онѣ служить не могутъ. Какъ напримѣръ такой мнимой гипотезы можно указать на такъ называемую гипотезу о двухъ электрическихъ жидкостяхъ.

Правильно поставленная гипотеза — это главное орудіе развитія науки, но роль этого орудія должна быть временная чѣмъ скорѣе оно исчезнетъ, т. е. чѣмъ скорѣе гипотеза перестаетъ быть гипотезою, тѣмъ лучше. Опытъ и только опытъ можетъ привести къ этой цѣли. Сравненіе явленій въ дѣйствительности происшедшихъ во вѣнномъ мірѣ, съ тѣмъ, что путемъ дедукции открывается какъ необходимое слѣдствіе изъ допущенной гипотезы, можетъ или доказать несомнѣнную несправедливость гипотезы, отъ которой въ этомъ случаѣ должно отказаться, или служить подтвержденіемъ несомнѣнной ея справедливости. Въ какомъ случаѣ гипотеза, какъ таковая, перестаетъ существовать или, наконецъ, увеличиваетъ ея вѣроятность или правдоподобность. Гипотеза, которая не можетъ быть провѣрена непосредственно, но лишь окольнымъ путемъ сравненія ея слѣдствій съ результатами опытовъ, никогда не можетъ сдѣлаться достоверною. Только при безпредѣльномъ возрастаніи качественно различныхъ наблюдаемыхъ явленій, согласныхъ съ гипотезою, ея вѣроятность безпредѣльно приближается къ достоверности (вращеніе земли около оси и вокругъ солнца, сохраненіе энергии, существованіе эфира).

Появленіе хорошей гипотезы можетъ сильно двинуть науку; но гораздо важнѣе исчезновеніе гипотезы и именно такими исчезновеніями отмѣчены величайшіе моменты въ исторіи науки. Такое же значеніе имѣть соединеніе двухъ или нѣсколькихъ гипотезъ въ одну. Чѣмъ меньше гипотезъ, тѣмъ выше развитіе науки. «Наука стремится не къ установкѣ, но къ устраненію гипотезъ» — говоритъ Оствальдъ. Идеальную законченность достигла бы наука, еслибъ въ ней осталась только одна единичная гипотеза, изъ которой вытекала бы, какъ необходимое слѣдствіе, наблюдаемая закономерная связь между всеми явленіями вѣннаго міра.

§ 4. Эфиръ. Изученіе разнообразныхъ явленій вѣннаго міра давно привело мыслителей къ предположенію, что кромѣ той матеріи, свойства которой мы съ малолѣтства привыкли считать за причину весьма боль-

шого числа окружающих насъ явленій: которая присутствуетъ въ тѣхъ мѣстахъ пространства, въ которыхъ мы объектируемъ наши ощущенія и которая особенно общепонятно характеризуется дѣйствіемъ на органъ осязанія при всякой попыткѣ съ нашей стороны проникнуть въ занимаемое ею пространство, — существуютъ еще другіе источники явленій, которые мы временно назовемъ агентами. Они прежде носили латинское названіе *imperceptibilia* — нечувствыи. Но это названіе во всякомъ случаѣ основано на недоразумѣніи, ибо изъ того, что присутствие агента въ тѣлѣ не увеличиваетъ его вѣса, еще не слѣдуетъ, что агентъ самъ по себѣ лишенъ того свойства матеріи, которое называется вѣсомъ. Вѣсъ голуби внутри воды также какъ будто не имѣетъ вѣса и однако никто се не причислитъ къ «нечувствымъ». Допуская существованіе этихъ агентовъ мы изъ опытовъ можемъ только заключить, что они «невѣсяще», т.-е. при обстѣновкѣ нашихъ опытовъ не могутъ обнаружить своего вѣса.

Когда-то предполагалось существованіе шести различныхъ агентовъ: два электрическихъ агента, два магнитныхъ, теілородъ и агентъ, являющийся причиною явленій свѣтовыхъ, что соответствуетъ болѣе шести различнымъ гипотезѣ. Съ развитіемъ науки число гипотезъ уменьшается и въ настоящее время мы имѣемъ вмѣсто шести гипотезъ, уже только одну. Вѣроятность гипотезы о существованіи этого одного агента въ высшей степени близка къ достовѣрности.

Назовемъ этотъ агентъ эфиромъ. Мы допускаемъ, что эфиръ наполняетъ собою междузвѣздное пространство, что въ частяхъ всеобщей, доступныхъ нашему наблюденію, нѣтъ мѣста не содержащаго эфира. Мы не станемъ распространяться о тѣхъ свойствахъ, которые гипотетически приписываются эфиру и которыми онъ отличается отъ матеріи въ означенномъ смыслѣ слова.

Хотя само собою разумѣется, что и эфиръ есть матерія въ томъ смыслѣ, въ которомъ было опредѣлено ими этотъ терминъ, мы въ дальнейшемъ для удобства, какъ это теперь принято, будемъ противопоставлять другъ другу термины «матерія» и «эфиръ», сохраняя вернымъ только дѣйтой, которая болѣе или менѣе непосредственно можетъ вѣствовать на нашъ органъ осязанія. Эфиръ или матерія, занимающіе часть пространства представляютъ то, что называется средою.

Во второмъ отдѣлѣ мы ближе познакомимся съ явленіями движенія и увидимъ, что весьма малыя части, изъ которыхъ мы матерію представляемъ себѣ состоящею, могутъ мѣнять свои мѣста въ пространствѣ. Для матеріи существуетъ нѣкоторое распредѣленіе частей, которое мы назовемъ нормальнымъ и которое соответствуетъ тому случаю, когда между этою матеріей и остальнымъ міромъ не обнаруживаются никакія связи кромѣ тѣхъ, которыя ни при какихъ условіяхъ не могутъ прекратиться. При появленіи новыхъ связей, распредѣленіе частей матеріи можетъ изъ нормальнаго перейти въ ненормальное. Явленіе возникновенія новаго распредѣленія частей, способнаго сохраниться неопредѣленно долго, но переходящаго въ распредѣленіе нормальное, когда причины (новыя связи съ остальнымъ міромъ), его вызвавшія, прекратятся, называется деформацией.

Другой весьма важный случай измѣненія нормальнаго распредѣленія частей матеріи мы имѣемъ, когда нѣкоторая ея часть начинаетъ перемѣщаться, непрерывно мѣняя свое положеніе, но не удаляясь при этомъ далеко отъ положенія нормальнаго. Явленіе возникновенія такого движенія называется *пертурбаціей*. Весьма часто происходитъ такое явленіе въ нѣкоторой части матеріи возникаетъ пертурбація, вслѣдъ затѣмъ возникаетъ такая же въ сосѣдней съ первою части матеріи, затѣмъ опять въ сосѣдней со второю и т. д. Такое явленіе называется *распространеніемъ пертурбаціи въ матеріи*. Деформации и пертурбации, какъ видно изъ опредѣленій, сопровождаются измѣненіемъ взаимнаго расположенія частей матеріи. Бываютъ однако и случаи движенія матеріи безъ такого измѣненія относительнаго расположенія ея частей. Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что разсматриваемая матерія движется какъ цѣлое.

И для эфира существовать расположеніе частей нормальное и возможны деформации и пертурбации; огромная область явленій (свѣта, электричества и магнетизма) находится въ законоуравновѣженной связи съ такими деформациями и пертурбаціями въ эфирѣ, составляющими ихъ первоначальный источникъ. Значеніе, которое имѣетъ эфиръ въ этихъ явленіяхъ не подлежитъ сомнѣнію; но весьма вѣроятно, что онъ играетъ важную, хотя еще не выясненную роль и въ другихъ—а можетъ быть во всѣхъ безъ исключенія—физическихъ явленіяхъ.

Теперь мы можемъ точнѣе формулировать задачу физики: найти законоуравновѣженную связь между явленіями, происходящими въ неорганизованной матеріи, а также въ эфирѣ съ одной стороны и возможно меньшимъ числомъ гипотетическихъ свойствъ, приписываемыхъ матеріи и эфиру, съ другой. История физики за послѣднее десятилѣтіе заставляетъ насъ думать, что деформации и пертурбации въ матеріи и въ эфирѣ столь тѣсно связаны съ окружающими насъ физическими явленіями, что эти явленія, сами по себѣ, представляютъ не что иное, какъ многоразличныя формы, въ которыхъ названные измѣненія, происходящія въ матеріи и въ эфирѣ, дѣйствуя на наши органы чувствъ, нами же объектируются.

§ 5. Раздѣленіе физики. Въ началѣ § 2 мы опредѣлили физику въ широчайшемъ смыслѣ слова, какъ науку о явленіяхъ, происходящихъ въ неорганизованной матеріи. Постепенное развитіе этой науки приняло, съ теченіемъ времени, къ вычлѣненію изъ нея обширныхъ отдѣловъ, имѣющихъ каждый своимъ предметомъ нѣкоторую опредѣленную и для него характерную группу явленій и разросшееся въ самостоятельныя науки. Сюда относятся механика, астрономія, химія, минералогія, геологія и метеорологія. Въ высшей степени замѣчательно, что въ послѣднее время химія и астрономія, совсѣмъ было отказавшіяся отъ тѣсной связи съ физикою, вновь стали такъ обильно черпать изъ ея богатаго запаса научнаго матеріала, что возникли какъ бы промежуточные обширные отдѣлы, физическая химія и астрофизика и что это, хотя бы и одностороннее возвращеніе къ старой испытанной почвѣ имѣло послѣдствіемъ обильную жатву, быстрое развитіе вѣдѣній новыхъ отраслей химіи и астрономіи.

Изъ физики вычлѣнены, даѣе, цѣлый рядъ наукъ, имѣющихъ цѣлью

извлечь практическую для человечества пользу изъ того научнаго матеріала, который въ ней содержится. Сюда относится почти все то, на чемъ основана современная культура: практическая механика, паровая техника и электротехника съ ея обширными отдѣлами: телеграфіей, телефоніей, электрическимъ освѣщеніемъ, гальванопластикой, передачей работы и т. д.; фотографію можно сюда же причислить. Всѣ эти науки цѣлкомъ упираются на физику.

Матеріаль, представляющій въ настоящее время содержаніе физики, какъ науки, принято дѣлить на части или отдѣлы, смотря по специальному характеру или некоторымъ вѣшнимъ или внутреннимъ признакамъ тѣхъ явленій, которымъ каждая часть посвящена. Однако, такое раздѣленіе всегда имѣетъ характеръ искусственный, нѣтъ возможности провести сколько нибудь рѣзкой границы между отдѣлами и нельзя не прибавить, что непрерывно уменьшающаяся возможность строгато разграниченія отдѣловъ физики и есть наибѣлѣннѣйшій критерій ея развитія. Постоянно открываются закономерныя связи между самыми разнообразными явленіями, относящимися прежде къ различнымъ отдѣламъ физики. Этими самымъ уничтожаются границы между ея отдѣлами, которые иногда вѣнчѣ сближаются такъ что изъ нѣсколькихъ отдѣловъ образуется одинъ; въ другихъ случаяхъ эти границы какъ бы ступеньваются или подымаются промежуточными части, какъ бы расположенными на рубежѣ двухъ отдѣловъ. Сложность нѣкоторыхъ явленій, которые представляются намъ состоящими изъ совокупности нѣсколькихъ явленій, также не мало затрудняетъ ихъ классификацію.

Иногда дѣлятъ физику на двѣ части: на физику опытную и на физику теоретическую, подгаая, что къ первой относится главнымъ образомъ тотъ научный матеріалъ, который можетъ быть добытъ путемъ опыта, а ко второй главнымъ образомъ все то, что относится къ дедукціи самихъ явленій, основанной на опредѣленной гипотезѣ и на установленныхъ закономерныхъ связяхъ, а иногда и только на послѣднемъ. Подтверждая необходимость наблюденій явленій, какъ стѣствій къ дознанію или предположенію, теоретическая физика, опять-таки путемъ дедукціи, рѣшаетъ вопросъ о формѣ, которую должно имѣть явленіе при обстоятѣяхъ, при которой оно еще не наблюдалось иначе говоря, она предсказываетъ явленіе. Нѣтъ однако никакой возможности, хоти бы сколько нибудь послѣдовательно провести дѣленіе физики на части опытную и теоретическую, ибо при изученіи каждой группы физическихъ явленій опять и теорія должны идти рука объ руку. Теорія даетъ возможность объединять, связывать между собою наблюденныя явленія и, что особенно важно, она даетъ возможность отыскать тѣ пути, точнѣе тѣ опыты, которые могли бы служить для проверки гипотезъ, т. е. для измѣненія, въ ту или другую сторону, степени ихъ достовѣрности. Въ обширномъ смыслѣ слова теорія, сохраняя характеръ дедуктивный, можетъ и не пользоваться математикомъ, какъ главнымъ своимъ орудіемъ: Фардей не былъ вовсе математикомъ и все же это стѣдуетъ признать величайшимъ теоретикомъ. Въ настоящее время, однако, роль математическаго анализа сдѣлалась преобладающей въ теоретической физикѣ, и безъ нея развитіе физики во многихъ разнѣхъ ея отдѣлахъ крайне за-

традиционно. Если одни опыты без теоретической разработки лишь в редких случаях могут дать больше, чем сырой и безсвязный материал, то «теоретическая физика», отдельно взятая, не окруженная со всех сторон опытами, из которых она исходит и которыми она проверяется, никогда не составит почвы для плодотворного развития науки. Такая теория беспочвенна, в ней может быть много приятного, но она опасна, ибо огромный, на ее развитие потраченный труд может оказаться потерянными, когда один слишком поздно произведенный опыт докажет, несомненно хотя бы одного из ее выводов, с действительностью. И такие случаи бывали в истории физики: оппортунистически изследователи многих ученых теории имеют научное значение, разрушались неминуемым фактом, открытым опытом (теория истечения света). Опыт и теория нераздельно должны сопровождать физическое изследование и потому разделение физики на части опытную и теоретическую на практике встречает непреодолимые затруднения.

Существует, однако, возможность выделить из физики одну ее часть, к которой относятся весьма разнообразные вопросы, причем связующим звеном является лишь особый характер постановки и обработки этих вопросов. Эту часть можно назвать математической физикой, которая весьма существенно отличается от физики теоретической. Математическая физика исходит от какого-либо, опытом твердо установленного факта, выражающего некоторую закономерную связь между явлениями. Эту связь она облечет в математическую форму и затем, да еще как бы превращается в чистую математику, разрабатывает исключительно путем математического анализа те следствия, которые вытекают из основного положения. Исходя только из опытного факта, математическая физика ничего гипотетического в себя не содержит, а потому добытые ею результаты верны. Отделы теоретической физики, опирающиеся на гипотезы, могут рушиться, отделы математической физики остаются навсегда неизменными, ибо их фундаментом служит факт, остающийся фактом, как бы с течением времени ни менялся научный взгляд на более глубокую его сущность. Сюда относятся математические отделы учения о теплопроводности, об упругости, об электричестве (теория потенциалов и различные его приложения), о магнетизме (взаимодействие и индукция), об электрическом токе и т. д. Отделы математической физики имеют весьма обширную площадь соприкосновения с физикой, как с наукой о явлениях; но эта площадь служит им непоколебимым фундаментом. Это скорее математика, чем физика.

В последнее время стали физиков иногда делить на физиков материалистов и физиков «эфиров». Но это деление нельзя назвать научным, так как роль эфира во большинстве явлений нам только пока неизвестна, откуда, конечно, не вытекает само по себе весьма мало вероятное следствие, чтобы эфир во этих явлениях действительно никакой роли не играл. К физикам «эфиров» приходится таким образом отнести те явления, в которых, при данном состоянии науки, участие эфира представляется нам несомненным, причем — и это весьма существенно — участие материи столь же

сомнѣнію, ибо намъ пока извѣстно всего только одно явленіе, въ которомъ матерія никакого участія не принимаетъ, а именно явленіе распространѣнія пертурбацій въ пространствѣ, занятомъ только эфиромъ (мы увидимъ, что деформации въ эфирѣ только «упираются» на матерію). Съ развитіемъ науки роль эфиря вѣроятно будетъ выясняться все въ большемъ и большемъ числѣ явленій, грань между двумя отдѣлами физики придется переносить все дальше и дальше и въ концѣ концовъ вѣроятно исчезнетъ «физика матеріи». Отсюда ясно, что упоминаемое дѣленіе физики не удачное. Физика одна и она — физика «матеріи и эфиря».

Мы раздѣлимъ въ этой книгѣ физику на части, трактующія о движеніи (механика), частичныхъ силахъ, звукахъ (акустика), лучистой энергіи, теплотѣ, магнетизмѣ, и электричествѣ, указывая, что окажется нулевымъ, на отсутствіе точныхъ границъ между этими отдѣлами.

§ 6. Физическія величины. Величиной называется то, что мысленно можно себѣ представить мыслящимся количественно.

Изученіе физическихъ явленій и существующихъ между ними закономерныхъ связей привело къ необходимости введенія въ науку понятія о весьма большомъ числѣ разнообразныхъ величинъ, характеризующихъ либо specialныя свойства той или другой матеріи, либо особенности самыхъ явленій. Эти величины мы будемъ называть физическими.

Слѣдуетъ строго отличать величины, понятіе или представленіе о которыхъ присуще всѣмъ, разумъ, отъ тѣхъ величинъ, которыя нами вводятся въ науку. Величины перваго рода мы называемъ первоначальными; онѣ, прежде всего, не могутъ подвергаться опредѣленію, т. е. точной формѣ выраженія того, что должно понимать подъ ихъ названіемъ, ибо только опредѣленіе только и можетъ быть сдѣлано путемъ указанія на зависимость опредѣляемой величины отъ чего-либо уже извѣстнаго, т. е. ранѣе подвергнутаго точному опредѣленію. Величины же перваго рода соответствуютъ понятіямъ первоначальнымъ, идеальнымъ; онѣ въ опредѣленіяхъ и не нуждаются, ибо ихъ значеніе а priori ясно каждому. Свойства этихъ величинъ опредѣляются тѣмъ представленіемъ, которое кѣмъ связывается съ ихъ названіемъ и потому указаніе на эти свойства каждый долженъ искать въ самомъ себѣ. Къ величинамъ этого рода во всякомъ случаѣ относятся:

1) продолженности линейная, поверхностная и объемная или точнѣе: длина прямой линіи, площадь части плоскости, ограниченной прямыми линіями и объемъ части пространства, ограниченаго плоскостями. Длина кривой линіи уже не соответствуетъ понятію первоначальному и нуждается въ опредѣленіи;

2) время,

3) давленіе (въ смыслѣ мышечнаго ощущенія),

4) скорость равномернаго, прямолинейнаго движенія.

Оставляемъ въ сторонѣ вопросъ о полнотѣ или неполнотѣ этого списка; величины, понятіе о которыхъ не присуще всѣмъ людямъ и которыя мы вводимъ въ науку, нуждаются въ особомъ опредѣленіи, на крайнюю точность котораго должно быть обращено величайшее вниманіе; оно должно быть таково, чтобы исключалась всякая возможность недоразумѣній, вся-

кое двусмысленно. Определение должно поэтому отличаться полнотою, т.-е. въ немъ должно заключаться все, что можетъ служить отличительнымъ признакомъ определяемой величины. Разъ определение величины сформулировано, слѣдуетъ уже до крайности остерегаться приписывать этой величинѣ такіе свойства, которыя не вытекаютъ изъ самаго опредѣленія. Ошибки въ этомъ направленіи особенно возможны въ тѣхъ случаяхъ, когда съ самымъ названіемъ величины, иногда неудачно выбраннымъ, невольно связывается представление о томъ или другомъ ея свойствѣ.

Величины, соответствующія одному и тому-же опредѣленію и отличающіяся другъ отъ друга только количественно, называются величинами однородными. Такія величины могутъ быть сравниваемы между собою или, какъ еще выражаются, онѣ могутъ быть измѣрены. Измѣрить величину значитъ опредѣлить, сколько разъ въ ней заключается нѣкоторая изоранная величина того же рода, называемая въ этомъ случаѣ единицею этого рода величины (единица вѣса, единица сопротивленія и т. д.). О выборѣ этихъ единицъ мѣры будетъ подробнѣе сказано ниже, замѣтимъ, что вообще стремятся къ тому, чтобы для каждаго рода величинъ была установлена и общепринята одна опредѣленная единица съ ея кратными и долями, взятыми по десятичной системѣ. Сравненіе двухъ величинъ можетъ быть сдѣлано двумя способами: или каждая изъ нихъ порознь измѣрится установленною единицею и затѣмъ сравниваются полученные числовые результаты, или двѣ величины непосредственно сравниваются между собою, причемъ, на дѣлѣ, одна изъ нихъ, хотя иногда только временно, играетъ роль единицы мѣры.

Выборъ единицы для каждаго рода величины, самъ по себѣ, ничѣмъ не обусловленъ и мы можемъ какую угодно изъ величинъ даннаго рода принять за единицу. Мы увидимъ, однако, ниже, что по различнымъ причинамъ въ настоящее время отказались отъ произвола при выборѣ этихъ единицъ и условились выбирать ихъ на основаніи нѣкотораго опредѣленнаго правила, дающаго возможность связать единицы всевозможныхъ величинъ, встречающихся въ физикѣ, въ одно стройное цѣлое, называемое (на темѣю единицъ).

Измѣреніе физическихъ величинъ, т.-е. сравненіе одной данной величины съ установленною единицею или непосредственное сравненіе двухъ данныхъ величинъ представляетъ задачу, которая разрѣшается путемъ опыта, произведеннаго съ опредѣленными инструментами и по опредѣленнымъ методамъ, построеннымъ и выработаннымъ для этой цѣли и весьма различнымъ, смотря по роду измѣряемой величины. Точность полученнаго при измѣреніи результата зависитъ отъ качествъ, иногда весьма индивидуальныхъ, самихъ инструментовъ, отъ избраннаго метода и отъ умѣнья и навыка лица, производящаго измѣреніе.

Результатомъ произведеннаго измѣренія является число, показывающее, сколько разъ выбранная единица содержится въ измѣренной величинѣ. Это число называется численнымъ значеніемъ измѣренной физической величины. Выражая или изслѣдуя закономерную связь между явлениями, мы обыкновенно замѣняемъ арифметическій методъ алгебраическимъ, выражая численное значеніе величины буквою. Слѣдуетъ весьма твердо помнить, что

ти буквы изображаютъ не самыя величины, а исключи-
тельно только ихъ численные значенія, полученные, хотя бы
только мысленно произведеннымъ измѣреніемъ величинъ нѣкоторыми едини-
цами. Забывая объ этомъ, можно прити къ весьма несообразнымъ резуль-
татамъ; возможность же ошибочныхъ представлений является здѣсь вслѣд-
ствие того, что принято эти буквы называть именами самихъ величинъ.
Говорить, напримѣръ, длина l , теплота q , сила тока i ; но l не есть сама
длина, q не есть сама теплота и i не есть сама сила тока; l , q и i суть
числа, показывающія, сколько въ разсматриваемыхъ длинѣ, теплотѣ и
силѣ тока заключается единицъ длины, теплоты и силы тока.

Численное значеніе всякой величины обратно пропор-
ционально избранной единицѣ. Это понятно: если увеличить еди-
ницу въ n разъ, то въ n разъ уменьшится число, показывающее, сколько
разъ данная величина содержитъ въ себѣ эту единицу.

Что буквы, о которыхъ было выше сказано, напримѣръ приведенныя
буквы l , q и i не изображаютъ самыя физическія величины, а лишь ихъ
численные значенія, явствуется изъ того, что ихъ значеніе мѣняется вмѣ-
стѣ съ выборомъ единицы: еслибы подѣ буквою q подразумевалась сама
физическая величина, данная въ каждомъ частномъ случаѣ и очевидно не-
зависимая отъ выбора единицы мѣры, то и значеніе буквы q не мѣнялось
бы вмѣстѣ съ этою единицею.

Въ дальнейшемъ мы иногда будемъ встрѣчаться съ такими величи-
нами, численное значеніе которыхъ, въ каждомъ частномъ случаѣ, не зависитъ
отъ выбора какихъ-либо единицъ мѣры, изъ называютъ отвлеченными
или (менѣе удачно) абсолютичными числами. И эти величины могутъ
быть обозначены буквою. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ оказывается, однако,
возможнымъ выразить можетъ быть не всегда безъ нѣкоторой натяжки,
что мы имѣемъ дѣло съ физическою величиною, для которой единица разъ
навсегда установлена. Разберемъ слѣдующій примѣръ. Изъ элементарной
физики извѣстно, что коэффициентомъ преломленія нѣкотораго вещества
называется отношеніе синуса угла паденія луча къ синусу угла преломле-
нія при переходѣ его изъ пустоты (т.е. изъ эфира) въ это вещество. При
такомъ опредѣленіи коэффициентъ преломленія n явочнымъ образомъ приобрета-
етъ характеръ отвлеченнаго числа (отношеніе двухъ отвлеченныхъ чиселъ) и по-
нятіе о единицѣ отъ выбора которой можно бы зависеть его численное зна-
ченіе, какъ будто вовсе отсутствуетъ. Однако постоянство численнаго зна-
ченія коэффициента преломленія дѣлается уже менѣе абсолютнымъ, если по-
мнить, что «пустота» была въстарину довольно приблизительно и что численные
значенія всѣхъ величинъ n мѣняются, если относить ихъ къ переходу не
изъ пустоты, но изъ воздуха. Можно однако идти дальше и разсуждать
такимъ образомъ: матерія имѣетъ, между прочимъ, свойство вліять на лучъ
свѣта, распространяющійся въ ней. Это свойство, подобно множеству дру-
гихъ, опредѣляется нѣкоторою физическою величиною, количественно раз-
личною для различныхъ веществъ. Принимая эту величину для эфира за еди-
ницу, мы найдемъ, что ея численное значеніе для другихъ веществъ
равно отношенію упомянутыхъ двухъ синусовъ. Теорія даетъ намъ, въ этомъ

случай, возможность идти еще дальше и точней определить эту величину. Она не что иное, как медленность (обратное от скорости) распространения свѣта въ данномъ веществѣ и слѣдовательно ясно, что ея численное значение въ каждомъ данномъ случаѣ зависитъ отъ выбора того вещества, для котораго эта величина принимается равной единицѣ. Только въ томъ случаѣ, если за единицу принять «медленность» въ «эфирѣ», мы для численного значения этой медленности въ другой средѣ получаемъ отношеніе синусовъ. Допуская, что только-что изложенное представится нѣсколько натянутымъ и что для упрощенія можно допустить существованіе между физическими величинами и такихъ, которыя представляются абсолютными числами, все же слѣдуетъ вводить такія величины лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда ихъ замѣна величинами, численное значеніе которыхъ явственно зависитъ отъ выбора единицы, представляетъ безполезное усложненіе. Поэтому ихъ ни въ какомъ случаѣ не слѣдуетъ вводить безъ всякой надобности, когда болѣе общее понятіе о величинѣ, численное значеніе которой зависитъ отъ выбора единицы, вытекаетъ непосредственно изъ наслѣдственныхъ явленій. Вотъ почему нельзя одобрить совершенно излишняго раздвоенія одной и той же по внутреннему ея значенію физической величины на двѣ, изъ которыхъ одна считается за число именованное, а другая за число отвлеченное. Какъ на примѣръ, укажемъ на плотность и удѣльный вѣсъ. Иногда говорятъ, что плотность есть вѣсъ или есть масса единицы объема, а удѣльный вѣсъ есть отвлеченное число, равное отношенію вѣса или массы къ вѣсу или массѣ воды и т. д. Все это не только совершенно излишнее, но и прямо основано на ошибочномъ толкованіи физическихъ формулъ, о чемъ подробнѣе будетъ сказано въ слѣдующемъ параграфѣ. Плотность не есть ни вѣсъ, ни масса и нѣтъ никакой надобности вводить понятіе о какомъ-то удѣльномъ вѣсѣ, какъ отвлеченномъ числѣ. Существовать особаго рода величина, характерная для данной матеріи; ее можно называть какъ угодно, но она во всякомъ случаѣ величина особаго рода (*smi generis*) и уже поэтому не можетъ быть ни массой, ни вѣсомъ, ибо эти послѣдніе суть физическія величины другого рода. Назовемъ ее плотностью. Какъ и всякая физическая величина, она имѣетъ свою единицу, которую можно выбрать произвольно, но которая не можетъ быть ничѣмъ инымъ, какъ опять таки нѣкоторою плотностью. Давать численному значенію этой величины при нѣкоторомъ определенномъ выборѣ единицы (плотность воды принимается за единицу плотности) особое названіе — это совершенно излишнее и вызываетъ только путаницу въ понятіяхъ.

Въ § 1 мы упомянули, что пространство и время представляютъ тотъ двойной фонъ, на которомъ объектируется воспринятая нами ощущенія, а въ началѣ этого § 6 мы указали на протяженность, время и давленіе, какъ на понятія первоначальныя, не требующія опредѣленія, которое впрочемъ даже и не можетъ быть дано. Понятіе о давленіи получается изъ субъективнаго ощущенія усилія противостояемаго внешней причинѣ, производящей давленіе и никакая формулировка его сущности невозможна. Три различныхъ протяженности, время и давленіе суть величины, съ которыми наука о физическихъ явленіяхъ имѣетъ дѣло непрерывно, а потому уже здѣсь

...тъ мѣсто сказать нѣсколько словъ о тѣхъ единицахъ, коими эти три величины нынѣ чаще всего измѣряются.

За единицу длины принимается метръ, равный расстоянію при 0° между черточекъ, проведенныхъ на платиновомъ стеклѣ, изготовленномъ въ началѣ прошлаго столѣтія и хранящемся въ Парижѣ. Эта единица длины замѣтно отличается отъ десятичной доли четверти Парижскаго меридіана, ставившей первоначальное опредѣленіе метра. Международный комитетъ мѣръ и вѣсовъ принялъ 2-го октября 1879 г. рядъ сокращенныхъ обозначеній для различныхъ единицъ протяженностей. Для метра принято обозначеніе *m*. Тысяча метровъ называется километромъ (*km*), метръ дѣлится на десять дециметровъ (*dm*), сто сантиметровъ (*cm*) и тысячу миллиметровъ (*mm*); тысячная доля миллиметра называется микрономъ (μ). Единицы длины еще называются линейными единицами.

За единицу поверхностной протяженности, проще — площади, принимается протяженность квадрата, каждая изъ сторонъ котораго равна линейной единицѣ.

За единицу объемной протяженности, проще — объема принимается объемъ куба, каждое изъ реберъ котораго равно линейной единицѣ; кубическій дециметръ называется литръ (*l*).

За единицу времени мы, даясь поступать строго научно, должны принять время, которое необходимо для совершенія некотораго опредѣленнаго явленія, причемъ явленіе должно быть избрано такое, которое можетъ неопредѣленное число разъ повторяться при вслѣдствіи одинаковыхъ обстоятельствъ, т.-е. безо всякаго измѣненія его причинной группы явленій. Такимъ явленіемъ можетъ служить качаніе любого маятника; время одного качанія и можетъ быть принято за единицу времени. Пользуясь такою единицей времени, мы убѣждаемся, что земни вращается около своей оси равномерно, и что уже даетъ намъ научное основаніе и право принять за единицу времени время обращенія земни около ея оси, такъ называемыя средня солнечная сутки, которыя дѣлятся на 24 часа, на $24 \times 60 = 1440$ минутъ и на $24 \times 60^2 = 86400$ секундъ. Историческій ходъ выбора единицы времени былъ обратный.

Исходя изъ субъективнаго представленія о давленіи мы убѣждаемся въ томъ, что на земной поверхности всякое тѣло, когда оно находится въ покоѣ, производитъ давленіе на то другое тѣло, на которомъ оно постоитъ. Это давленіе называется вѣсомъ тѣла, вѣсъ, будучи лишь частнымъ случаемъ давленія вообще, долженъ имѣть общую съ нимъ единицу. За единицу давленія и вѣса принимается вѣсъ, т.-е. давленіе на опору въ Парижѣ некотораго опредѣленнаго тѣла, которое въ концѣ прошлаго столѣтія было изготовлено изъ платины и которое хранится въ Парижѣ; предпологается и потому что это тѣло находится въ безвоздушномъ пространствѣ. Эта единица вѣса и давленія называется килограммомъ. Кубическій дециметръ (литръ) чистой воды при 4°C . имѣетъ вѣсъ, близкій къ одному килограмму. Килограммъ обозначается буквами *kg*; онъ дѣлится на 1000 граммовъ (*g*); граммъ равенъ 10 дециграммамъ (*dg*) 100 сантиграммамъ (*cg*) и 1000 миллиграммамъ (*mg*). Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что вѣсъ кубическаго сантиметра чистой воды при 4°C . близокъ къ 1 грамму.

Для отличія отъ другихъ единицъ, мы, въ дальнѣйшемъ, только-что разсмотрѣнныя единицы вѣса и давленія будемъ иногда называть французскими. Въ слѣдующемъ отдѣлѣ мы познакомимся съ другою единицею давленія—диномъ.

Мы упоминали выше старинный терминъ «невѣсомое» и указали на то, что его слѣдовало бы замѣнить словомъ «невѣсящій». Что о «невѣсомости» эфира не можетъ быть и рѣчи, видно изъ того, что соображенныя о которыхъ здѣсь не мѣсто распространяться, привели къ приблизительному опредѣленію вѣса эфира. Онъ очень малъ, но не равенъ нулю. Эфирный шаръ, по размерамъ равный земному шару, обнаружилъ бы вѣсъ, превышающій 200 kg., еслибъ его можно было поставить въ тѣ условия, при которыхъ находится взвѣшиваемый нами тѣла. Тутъ, впрочемъ, необходима одна оговорка, которую мы выскажемъ ниже, въ Отдѣлѣ второмъ.

§ 7. Физическіе законы. Отысканіе закономѣрной связи между физическими явленіями приводитъ къ открытію такъ называемыхъ физическихъ законовъ. Этими законами устанавливается ближайшій характеръ зависимости различныхъ физическихъ величинъ другъ отъ друга. Такая зависимость можетъ быть качественная или количественная. Физическіе законы относятся почти исключительно къ количественной сторонѣ явленій, т. е. ими опредѣляется, какимъ образомъ, количественно мѣняется одна величина при количественномъ измѣненіи другой величины, съ которой она закономѣрно связана или, какъ говорить, отъ которой она зависитъ. Законовъ физики, которые относились бы къ качественной сторонѣ явленій, сравнительно немного. Ими устанавливаются иныя признаки явленій, а за ними всегда скрытъ какой-нибудь количественный законъ, еще не выясненный. Нередко злоупотребляютъ терминомъ «законъ», пользуясь имъ тамъ, гдѣ вѣрнѣе было бы говорить о правилѣ, которому явленія подчинены.

Открытие или проверка физическаго закона достигается слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ символически черезъ A и B двѣ физическія величины (не ихъ численныя значенія). Законъ выражается математически, какъ зависимость между численными значеніями a и b величинъ A и B . Чтобы открыть эту зависимость, мы должны опыты или наблюденіе устроить такъ, чтобы величина A могла послѣдовательно имѣть рядъ количественно различныхъ значеній, вследствие чего и величина B будетъ количественно мѣняться. Далѣе мы должны имѣть возможность, каждый разъ измѣрить величины A и B , т. е. опредѣлить ихъ численныя значенія, выбрать для этого какъ для одной, такъ и для другой величины опредѣленные единицы.

Непосредственнымъ результатомъ опыта и наблюденій является такимъ образомъ два ряда чиселъ, которые суть не что иное, какъ числовыя значенія этихъ двухъ физическихъ величинъ, зарисованія, какъ мы видимъ, отъ выбора единицъ мѣры. Числа двухъ рядовъ, повѣстно, сопряжены, т. е. каждому числу a одного ряда соответствуетъ одно число b другого. Некомый законъ выражается тѣмъ, что всѣ числа a могутъ быть получены изъ чиселъ b путемъ одной и той же арифметической манипуляціи, произведенной надъ этими числами, т. е. подстановкою ихъ въ одно и то же алге-

браическое выраженіе, содержащее букву b . Символически можно это выразить равенством $a=f(b)$, т. е. a есть некоторая функция отъ b . Зѣеь необходимо обратить вниманіе на два обстоятельства, играющія весьма важную роль.

Во-первыхъ никакіе опыты или наблюденія не могутъ намъ дать некоторыхъ численныхъ значеній a и b съ совершенною точностью. Этотъ вопросъ будетъ подробно разсмотрѣнъ въ Отдѣлѣ третьемъ. Незоѣзанныя, такъ называемыя «ошибки наблюденій» даютъ въ результатѣ неточныя значенія чиселъ a и b , которыя вообще не удовлетворяютъ вышеупомянутому равенству чиселъ a и результатовъ подстановки чиселъ b въ некоторое определенное алгебраическое выраженіе. Всегда оказывается отступленіе отъ такого равенства. Дѣю наблюдателя рѣшить путемъ критическаго разбора результатовъ измѣреній, могутъ ли замѣченныя отступленія дѣйствительно быть объяснены ошибками наблюденій или слѣдуетъ на основаніи ихъ присутствія заключить о несуществованіи гипотетически предполагаемаго закона $a=f(b)$.

Во-вторыхъ въ самихъ числахъ a и b заключается некоторый произволъ, являющійся какъ слѣдствіе произвольности выбора единицъ величинъ A и B . Еслибы мы выбрали другія единицы, то числа каждаго изъ двухъ рядовъ a и b оказались бы помноженными на одно и то же постоянное число, равное отношенію старой единицы соответствующей величины къ ея новой единицѣ. Указаннымъ произволъ съ выбранной стороны обнаруживается тѣмъ, что въ выраженіе, которое содержитъ буквы b и должно быть равно a , войдутъ одинъ или нѣсколько чиселъ, специальное значеніе, т. е. величина которыхъ, не будучи характернымъ для самаго физическаго закона, зависятъ отъ выбора единицъ величинъ A и B . Эти числа называются вообще коэффициентами. Одинъ изъ этихъ коэффициентовъ всегда можетъ быть поставленъ какъ множитель, общій всѣмъ членамъ выраженія $f(b)$. Онъ называется коэффициентомъ или множителемъ пропорциональности; его значеніе во всякомъ случаѣ зависитъ по крайней мѣрѣ отъ выбранной единицы величины A . Обобщимъ, мы можемъ сказать:

Въ выраженіи физическихъ законовъ, $a=f(b)$, должны входить коэффициенты, численные значенія которыхъ не характерны для вида закона и зависятъ отъ выбора единицъ, коими мы измѣряемъ тѣ физическія величины, о которыхъ говорится въ этомъ законѣ.

Иногда говорятъ, что коэффициентъ пропорциональности можетъ самъ имѣть определенное физическое значеніе, представляя численное значеніе некоторой определенной новой физической величины. Это неверно. Во всѣхъ случаяхъ, когда, помимо, представляется нѣчто подобное, дѣю въ дѣйствительности сводится къ тому, что первоначально выраженный нами законъ не исчерпываетъ всѣхъ сторонъ явленія, что величина A зависитъ не только отъ величины B , но еще отъ другихъ величинъ C , D и т. д. Если исчерпать все эти зависимости то всегда окажется, что коэффициентъ пропорциональности есть число и только число и не можетъ

быть рассматриваемо как численное значение какой бы то ни было физической величины.

Перейдемъ къ примѣру отысканія и выраженія физическаго закона.

Изъ элементарной физики извѣстна важная роль, которую играетъ физическая величина, названная силой тока, и что существуютъ методы ея измѣренія, причемъ некоторая опредѣленная сила тока принимается за единицу. Наблюдения показываютъ, что въ проводкѣ, черезъ которую проходитъ токъ, выделяется теплота, которую также можно измѣрить своей, впрочемъ, какъ и всѣ другія, произвольной единицей. Опыты указываютъ дѣйствительно, что количество теплоты, образующейся въ проводкѣ, зависитъ отъ силы тока и отъ промежутка времени, въ течение котораго продолжалось явленіе тока; кромѣ того оно еще зависитъ отъ такъ называемаго сопротивленія проводки, величины, которую мы также умѣемъ измѣрять особою единицей сопротивленія. Чтобы найти закономерную связь между явленіемъ выделения теплоты въ проводкѣ и явленіемъ электрическаго тока, мы должны открыть три закона, выражающіе зависимость количества теплоты Q отъ силы тока I , сопротивленія W и времени T (продолжительности). Для этого слѣдуетъ произвести три двойныхъ ряда измѣренія.

Сперва мы опредѣляемъ численные значенія q и i , количества теплоты и силы тока, оставляя сопротивленіе и время безъ измѣненія; для этого мы должны черезъ одну и ту же проводку, въ теченіе одного и того же промежутка времени пропускать токи различной силы и каждый разъ опредѣлять числа q и i . Рассматривая получившіеся два ряда чиселъ, мы убѣждаемся, что всѣ числа q получаются отъ умноженія квадрата соответствующаго числа i на одно и то же число, которое для общности обозначимъ черезъ C_1 ; такъ мы находимъ, что $q = C_1 i^2$. Понятно, что коэффициентъ C_1 получился бы другой, если бы величины Q и I измѣряли другими единицами — въ этомъ случаѣ всѣ числа q и i получились бы другія. Если бы мы, не мѣняя единицъ величинъ Q и I взяли бы другую проводку или измѣнили бы продолжительность опыта, то число C_1 также получилось бы другое. Этимъ доказывается, что Q зависитъ не только отъ I , но еще отъ другихъ обстоятельствъ и что формулою $q = C_1 i^2$ не исчерпывается закономерность, проявляющаяся въ изслѣдуемомъ явленіи выделения тепла въ проводкѣ, черезъ которую проходитъ токъ.

Мѣняя проводку, но оставляя силу тока и продолжительность опыта безъ измѣненія и измѣряя каждый разъ сопротивленіе W и количество тепла Q , мы вновь получаемъ два ряда чиселъ w и q . Оказывается, что числа q получаются отъ умноженія соответствующихъ чиселъ w на одно и то же число, которое обозначимъ черезъ C_2 . Это дастъ намъ формулу $q = C_2 w$, число C_2 зависитъ отъ единицъ, которыми мы пользовались при измѣреніи количества теплоты и сопротивленія.

Оставляя, какъ и прежде, силу тока и сопротивленіе (проводку) безъ измѣненія, измѣряя время t и количество теплоты, мы убѣждаемся въ третьемъ соотношеніи $q = C_3 t$.

Три ряда опытовъ показали, что численное значеніе q количества тепла мѣняется пропорціонально квадрату численного значенія i силы тока,

пропорционально численному значению x сопротивлению и пропорционально действующему значению i времени. Отсюда следует, что q пропорционально произведению чисел i^2 , x и t , т. е. что, если мы будем произвольно выбирать L , W и T , каждый раз измерять Q , то все числа q получатся, если помножить произведение чисел i^2 , x и t на одно и то же число, которое мы обозначим через C . Это выражается формулой

$$q = C i^2 x t. \quad (1)$$

Здесь коэффициент пропорциональности C есть только число, значение которого зависит от выбора всех четырех единиц количества теплоты, силы тока, сопротивления и времени.

Следует твердо помнить, что все формулы, подобные (1), встречающиеся в физике, выражают связи между численными значениями различных величин и что поэтому буквы, входящие в формулы, суть представители чисел. Это тем более необходимо помнить, что общепринято сокращенно формулировать законы физики, называя при этом самые величины и упуская слова «численное значение». Вместо правильной формулировки закона, которую мы привели выше, принято выражаться так: количество теплоты, выделяющегося в проволокѣ при прохождении через нее тока, пропорционально квадрату силы тока, пропорционально сопротивлению проволоки и пропорционально времени. Мы увидим ниже, к каким уже прямо опасным последствиям может повести в частных случаях такая сокращенная формулировка.

Коэффициент пропорциональности имеет всегда несколько (по крайней мере два) физических значений, которые легко указать. Ограничимся примером. Формула (1) показывает, что при $i = 1$, $x = 1$ и $t = 1$ число $q = C$. Отсюда следует, что число C равно числу единиц теплоты, которая в единицу времени выделяется в проволокѣ, сопротивление которой равно единице, если через нее проходит единица силы тока (как принято выражаться). Та же формула дает однако при $q = 1$, $i = 1$ и $t = 1$, что $C = \frac{1}{x}$. Это показывает, что число C равно также единице, деленной на число единиц сопротивления, которым должна обладать проволока, в которой в единицу времени выделяется единица количества теплоты при единице проходящего тока.

Положив $q = 1$, $i = 1$, $x = 1$ получим также, что $C = \frac{1}{t}$, и наконец при $q = 1$, $x = 1$, $t = 1$, что $C = \frac{1}{i^2}$. Отсюда получаются еще два значения числа C , которые легко формулируются. Все это еще более выясняет, что коэффициент пропорциональности C в физических формулах зависит от выбора единиц тех величин, которые входят в формулу. При безконечно разнообразных возможных единицах и коэффициент C может принимать всевозможные численные значения.

Обратимся к важному вопросу о том, что произойдет, если мы коэффициенту пропорциональности придадим определенное численное зна-

числѣ, произвольно нами выбранное. Въ этомъ случаѣ мы лишаемся возможности произвольно выбирать единицы всѣхъ величинъ, входящихъ въ нашу формулу; отъ насъ зависитъ въ этомъ случаѣ выборъ единицъ всѣхъ этихъ величинъ кромѣ одной, впрочемъ, опять-таки произвольно которой изъ нихъ. Единица этой величины оказывается уже однозначно опредѣленною: эта единица какъ бы является сама собою въ зависимости отъ выбранныхъ нами остальныхъ единицъ и коэффициента пропорціональности.

Положимъ, что мы делаемъ, чтобы въ формулѣ (1) коэффициентъ C былъ равенъ пяти, такъ что получается $q = 5i^2\ell t$. Выберемъ, напримеръ произвольно единицы величинъ Q , I и T : при $q = 1$, $i = 1$ и $t = 1$ имѣемъ $\kappa = \frac{1}{5}$. Отсюда слѣдуетъ, что выбравъ произвольно единицы количества теплоты, силы тока и времени, мы за единицу сопротивления уже непосредственно должны выбрать пятикратное отъ сопротивления такой проволоки, въ которой при единицѣ силы тока въ единицу времени выделяется единица количества теплоты. Не трудно сообразить, какия пришлось бы принять единицы количества тепла или силы тока или времени, если каждая изъ единицъ остальныхъ трехъ величинъ изорана нами произвольно.

Весьма часто принимаютъ коэффициентъ пропорціональности равнымъ единицѣ. Формула (1) въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ $q = i^2\ell t$. Если мы напримѣръ, произвольно выбрали единицы количества тепла, сопротивления и времени, то мы за единицу силы тока въ этомъ случаѣ должны принять силу того тока, который, проходя въ течение единицы времени по проволоцѣ, сопротивление которой равно единицѣ, выделяетъ въ ней единицу количества тепла, ибо при $\kappa = 1$, $t = 1$ и $q = 1$ наша формула даетъ $i = \pm 1$. Двойной знакъ, какъ увидимъ впоследствии, показываетъ, что этотъ токъ можетъ имѣть произвольное направление.

Мы указали выше на часто встрѣчающееся утверждение, будто множитель пропорціональности можетъ иногда имѣть значение физической величины, измѣряющейся своею единицею, и упомянули, что это не вѣрно, что въ подобныхъ случаяхъ мы имѣемъ дѣло съ неполнымъ выражениемъ закона, которое не исчерпываетъ всѣхъ сторонъ данного явленія. Приведемъ примѣръ. Положимъ,* что мы изслѣдуемъ прохожденіе тепла черезъ пластинку, сдѣланную изъ какого-либо вещества въ томъ случаѣ, когда одна изъ ея сторонъ поддерживается при постоянной температурѣ T_1 , а другая при другой, болѣе низкой температурѣ T_2 . Пусть площадь каждой изъ сторонъ пластинки равна s квадратнымъ единицамъ, а толщина ея равна d единицамъ длины. Положимъ далѣе, что мы произвели рядъ опытовъ, измѣривъ разность температуръ $T_1 - T_2$, площадь s , время t , количество тепла q и наконецъ толщину d различныхъ взятыхъ для опытовъ пластинокъ, сдѣланныхъ однако изъ одного и того же материала. Опыты покажутъ, что числа q пропорціональны числамъ s , числамъ t и числамъ $T_1 - T_2$ и обратно пропорціональны числамъ d . Обозначивъ коэффициентъ пропорціональности черезъ k , имѣемъ формулу

$$q = kst \frac{T_1 - T_2}{d} \dots \dots \dots (2)$$

неоживленно рассуждают так: полагая в этой формуле $s = 1$, $F = T = 1$ (т. е. 1) и $d = 1$, находим $q = k$; следовательно k — количество тепла, которое в единицу времени протекает через единицу площади, параллельной сторонам пластинки, если температура каждой единицы длины уменьшается на один градус. Это k зависит от вещества пластинки, представляет особую физическую величину, которая имеет и свое единичство.

Такое рассуждение неправильно. Приведенные выше, найденные из формулы зависимости не исчерпывают всевозможные явления: количество тепла зависит не только от величины площади s , от времени t , от разности температур $T_1 - T_2$ и от толщины d , но также еще от новой величины нами введенной, которую назовем теплопроводностью и обозначим q . Мы с своей стороны зависимость от материала пластинки, опыты, конечно, не могут дать нам зависимость q от k , ибо мы ввели эту новую величину и мы полагаем, что q пропорционально k . Но этим мы забываем сущность дела, заключающуюся в том, что q зависит от шести величин $k, s, t, T_1 - T_2$ и d . Здесь мы имеем всего шесть существенно различных физических величин, из которых каждая может быть измерена своим, совершенно произвольным единичством. За единицы можно, например, принять малую калорию (q), квадратный дюйм (s), сантиметр (d), минуту (t), градус Цельсия ($T_1 - T_2$) и теплопроводность меди (k). В этом случае мы должны формулу (2) заменить формулою,

$$q = Ckst \frac{T_1 - T_2}{d} \dots \dots \dots (3)$$

в которой C , действительный множитель пропорциональности, есть только число, не представляющее численного значения какой-либо физической величины и зависящее только от выбора единиц шести величин, входящих в формулу. Принимая в (3) $C = 1$, мы уже лишаемся возможности произвольно выбрать все эти единицы, мы можем выбрать единицы только пяти величин. Естественно всего (но не необходимо) произвольно выбрать единицы величин $q, s, t, T_1 - T_2$ и d . В этом случае при $q = 1, s = 1, t = 1, F = T = 1$ и $d = 1$ мы получаем $k = 1$. Отсюда следует, что, принимая в общей формуле (3) $C = 1$, мы за единицу теплопроводности должны принять теплопроводность материала такой пластинки, через единицу поверхности которой в единицу времени проходит единица количества теплоты, если на единицу толщины температура падает на один градус. Если при тех же условиях продукт не одна, а q единиц тепла, то и теплопроводность будет не единица, а некоторое k , причем числа q и k окажутся равными. Равенство $q = k$ говорит теперь, что число q единиц тепла равно числу k единиц теплопроводности, и это получается только в том частном случае, когда мы в общей формуле (3) произвольно поставим $C = 1$. Теперь ясно, что упомянутое выше обычное рассуждение, приводящее к определению: « k есть то количество тепла и т. д.» неправильно.

Опасная путаница в понятиях особенно возможна в тех простых

совершенно произвольно (например фунты, кубическій дециметр и плотность ртути). Они связаны формулою $\rho = \frac{G}{V}$. Плотная ($V = 1$) имѣемъ $\rho = G$ и въ этомъ случаѣ мы за единицу плотности уже обязаны принять плотность такого тѣла единицы объема котораго обладаетъ единицею веса. Тогда при $V = 1$ получается $\rho = G$, откуда не слѣдуетъ, что плотность вообще равна весу единицы объема. Мы должны сказать, что «плотность имѣется въсомъ единицы объема» (плотность, измѣряемая массою единицы объема, совсѣмъ другая величина).

Одна физическая величина измѣряется другою — означаетъ, что при некоторомъ особомъ, но не необходимомъ выборѣ единицъ этихъ двухъ величинъ, ихъ численные значенія дѣлаются равными.

Эмпирическія формулы. Отыскивая путемъ опыта или наблюденья закономерную связь между двумя величинами, мы получаемъ два ряда сопряженныхъ численныхъ значеній a и b этихъ величинъ. Весьма часто оказывается, что вследствие крайней сложности искомой связи мы не въ состояніи ее угадать, искомый истинный законъ остается намъ неизвѣстенъ. Изъ такихъ случаевъ можно вывести результаты наблюденьй эмпирической формулою, т. е. подобрать такую аналитическую зависимость $a = f(b)$, которая для всѣхъ измѣренныхъ значеній b давала бы измѣренныя a съ достаточнымъ приближеніемъ. Равенство $a = f(b)$ и выражаетъ эмпирический законъ, въ предѣлахъ наблюденій близкій къ истинному закону. Удача подбора относится, какъ къ общему виду функции $f(b)$ такъ и къ численнымъ значеніямъ входящихъ въ нее коэффициентовъ.

Если намъ удалось найти такую эмпирическую зависимость $a = f(b)$, которая въ предѣлахъ опыта достаточно хорошо выражаетъ зависимость между числами a и b , то мы можемъ пользоваться ею чтобы вычислить числа a' , соответствующія такимъ числамъ b' , которыя непосредственно не измѣрялись. Такое вычисленіе возможно въ случаѣ, когда эти числа b' находятся въ промежуткахъ между числами b , которыя были нами измѣрены; оно называется интерполированіемъ и даетъ надежные результаты особенно въ тѣхъ случаяхъ, когда измѣренныя числа b близки другъ къ другу. Съ другой стороны слѣдуетъ весьма осторожно пользоваться эмпирическими формулами для вычисленій чиселъ a , соответствующихъ числамъ b , лежащимъ внѣ предѣловъ наблюденій. Слѣ истинный, неизвѣстный законъ можетъ весьма существенно отличаться отъ закона эмпирическаго. Такое вычисленіе называется экстраполированіемъ, имъ слѣдуетъ пользоваться съ величайшею осторожностью.

§ 8. Величины, имѣющія и величины, не имѣющія геометрическаго отношенія. Величины, съ которыми мы будемъ встрѣчаться въ курсѣ физики, могутъ быть раздѣлены на двѣ группы, отличающіяся другъ отъ друга весьма важнымъ и характернымъ признакомъ на который рѣдко обращаютъ должное вниманіе.

Къ первой группѣ относятся величины въ обыкновенномъ смыслѣ этого слова: для нихъ возможность значенія нуль непосредственно ясно, ихъ можно между собою складывать и ихъ геометрическое отношеніе есть от-

вложенно число, выражающее сколько разъ одна изъ величинъ заключается въ другой. Къ такимъ величинамъ относятся длина, поверхность, объемъ, скорость, сила, давленіе, электрическое сопротивленіе, электродвижущая сила, сила звука, сила свѣта, напряженіе магнитнаго поля и т. д.

Но существуютъ другая группа величинъ, которыя безъ оговорокъ или разъясненій даже нельзя считать за величины. Понятіе о нулѣ для нихъ не существуетъ и можетъ быть введено лишь весьма условно. Нельзя говорить объ ихъ геометрическомъ отношеніи. Такія величины вводятся въ науку, прежде всего, для того, чтобы служить характеристическою качественныхъ различій. Составляя непрерывный рядъ, онѣ даютъ возможность ввести понятіе о разности двухъ величинъ, какъ о нѣкоторомъ количествѣ.

Два примѣра различенія въ чемъ дѣло. Къ величинамъ второй группы относится, напр., температура и высота тона, очевидно характеризующія нѣкоторые качественные различія. Отмѣчая нѣкоторыя опредѣленные температуры или высоты опредѣленныхъ тоновъ мы можемъ ввести понятіе о разностяхъ или интервалахъ двухъ температуръ или высотъ тона, а это даетъ возможность составить шкалу температуръ и тоновъ и выбрать единицу разности температуръ (градусовъ) или высотъ тоновъ (октава или, напр., большой полутоновъ). Эти разности суть величины перваго рода: онѣ могутъ быть измѣрены и геометрическое отношеніе двухъ разностей можетъ быть найдено. Но температуры и высоты тоновъ сами по себѣ измѣрены быть не могутъ, нуль для нихъ не существуетъ и нельзя говорить о геометрическомъ отношеніи двухъ температуръ или высотъ двухъ тоновъ. Этому не противорѣчитъ то условное понятіе объ абсолютной температурѣ, которое отчасти будетъ введено ниже, отчасти будетъ разсмотрѣно въ ч. III (см. шкалу лорда Кельвина) или вообще условное измѣрение высоты тона числомъ колебаній. Мы въ слѣдующемъ познакомимся еще съ другими величинами второго рода (напр., электрический потенциалъ). Строго говоря, къ нимъ относится и время.

§ 9 Состояніе матеріи Въ § 1 мы назвали матеріей или веществомъ содержимое того мѣста пространства, въ которомъ мы объектируемъ причину воспріятого нами ощущенія; матерію, наполняющую ограниченную часть пространства, мы назвали тѣломъ. Физика имѣетъ главнымъ образомъ дѣло съ матеріей и сравнительно рѣдко обращается къ изслѣдованію свойствъ тѣлъ, поскольку эти свойства зависятъ отъ ихъ формы.

Матерія можетъ быть однородною и неоднородною. Въ первомъ случаѣ еѣ части обладаютъ абсолютно одинаковыми, во второмъ — неодинаковыми свойствами. Соответственно принято говорить объ однородныхъ и неоднородныхъ тѣлахъ. Неоднородность матеріи можетъ происходить отъ двухъ причинъ.

Въ первыхъ, различныя ея части могутъ быть таковыми, что ни при какихъ условіяхъ одна часть не можетъ приобрести всѣхъ свойствъ другой части (по крайней мѣрѣ, по возрѣзаніямъ современной науки). Въ этомъ случаѣ части матеріи отличаются по составу, ихъ различіе химическое.

Во вторыхъ различныя части матеріи, отличаясь по свойствамъ, мо-

имѣть однако при нѣкоторыхъ условіяхъ приобретать, каждаго, всѣ свойства любой другой части; въ этомъ случаѣ неоднородность (физическая и части матеріи отличаются по состоянію.

Свойства матеріи опредѣляются цѣлымъ рядомъ различныхъ физическихъ величинъ. Мы будемъ называть функциями точки такія величины, которыя въ различныхъ точкахъ пространства обладаютъ различными численными значеніями; сюда относятся физическія величины, характеризующія свойства матеріи въ различныхъ ея точкахъ. Великая величина, которая, относясь къ опредѣленной точкѣ, обладаетъ еще и опредѣленнымъ направлениемъ, называется векторомъ (скорость, сила, электрический токъ). Нѣкоторые свойства векторовъ будутъ разсмотрѣны ниже.

Матерія называется изотропною, когда не только всѣ ея части обладаютъ одинаковыми свойствами, но и во всякой точкѣ ея свойства во всѣхъ направленіяхъ одинаковы, не зависятъ отъ направленія (напр. теплопроводность во всѣхъ направленіяхъ одинакова). Матерія называется анизотропною, когда она въ данной точкѣ обладаетъ различными свойствами въ различныхъ направленіяхъ. Матерія анизотропная можетъ быть въ то же время однородною, а именно когда во всѣхъ точкахъ, а также въ параллельныхъ направленіяхъ ея свойства одинаковы. Для простоты иногда говорятъ объ изотропныхъ и анизотропныхъ тѣлахъ.

Изъ элементарной химіи извѣстно, что матерія бываетъ простая и сложная. Последняя состоитъ изъ такъ называемаго химическаго соединенія нѣсколькихъ простыхъ матерій.

Матерія состоитъ изъ весьма малыхъ частей, называемыхъ частицами. Частица, вообще, наименьшая часть, которая еще способна сохранять хотя бы существеннѣйшія свойства данной матеріи. Смотри по характеру этихъ свойствъ, иногда отличаются частицы физическія и химическія, причемъ физическимъ частицамъ приписываютъ болѣе сложный составъ, чѣмъ химическимъ; первыя могутъ содержать въ себѣ, каждаго, большое число послѣднихъ.

Современная химія допускаетъ существованіе атомовъ, т.е. такихъ мельчайшихъ частей матеріи, которыя ни при какихъ намъ извѣстныхъ измѣненіяхъ не раздѣляются далѣе на части. Ихъ слѣдуетъ поэтому называть не тѣлами, а атомами. Этотъ терминъ слѣдуетъ пріимать, опуская общепотребительному «сложимое», съ которымъ по недоразумѣнію связано неправильное представленіе, какъ о чемъ-то, даже мысленно, вѣдѣніи своей малости, вѣдѣніи. Простейшая химическая частица состоитъ изъ атомовъ и притомъ частица вещества проста изъ одного или нѣсколькихъ одинаковыхъ, частица вещества сложна изъ двухъ или большаго числа, по крайней мѣрѣ отчасти различныхъ атомовъ.

Говоря о тѣлахъ неоднородныхъ, мы упоминали о томъ, что одна и та же по составу матерія можетъ находиться въ различныхъ физическихъ состояніяхъ. Терминъ «состояніе матеріи» употребляется двояко. Въ тѣсномъ смыслѣ слова отличаютъ три состоянія матеріи: твердое, жидкое и газообразное. Объ нихъ мы скажемъ ниже.

Въ общирномъ смыслѣ слова всякая матерія можетъ имѣть безко-

печное множество состояний, если мы «состояние» условимся характеризовать совокупностью всѣхъ свойствъ матеріи, такъ что измѣненіе хотя бы только одного свойства будетъ соответствовать измѣненію состоянія. Всѣ величины, которыя характеризуютъ свойства матеріи, мѣняющіяся такимъ образомъ вмѣстѣ съ ея состояніемъ, называются функциями состоянія; такихъ свойствъ очень много. Оказывается, что состояніе матеріи (даннаго рода или состава) вообще опредѣляется двумя функциями состоянія, которыя, однако, должны быть выбраны такимъ образомъ, чтобы одна изъ нихъ не опредѣлялась другою на основаніи какихъ-либо специальныхъ свойствъ разматриваемой матеріи, онѣ должны быть независимы другъ отъ друга.

Къ наиболѣе важнымъ функциямъ состоянія принадлежатъ: температура, плотность (или вмѣсто нея удѣльный объемъ) и давленіе или упругость. Разсмотримъ вкратцѣ эти величины.

I. Температура. Органъ осязанія подвергается при соприкосновеніи нашего тѣла съ матеріей, особно рода раздраженію, дасть намъ знаніе о такъ называемомъ тепломъ состояніи матеріи, о степени ея нагрѣтости. Понятія о холодномъ, тепломъ, горячемъ столь же мало поддаются опредѣленію, какъ и другія субъективныя ощущенія (краска, высота звука и др.), какъ общедоступныя, они понятны всѣмъ. Величина, характеризующая степень нагрѣтости вещества, называется температурою; увеличеніе нагрѣтости соответствуетъ увеличенію или возвышенію температуры; уменьшенію — пониженію температуры. Причину большей или меньшей степени нагрѣтости тѣлъ называютъ теплою.

На стр. 24 было указано на температуру, какъ на примѣръ величины «второго рода», которая сама по себѣ измѣрена быть не можетъ. Отмѣчая некоторыя температуры, мы получаемъ возможность построить шкалу температуръ и ввести разности температуръ какъ величины «перваго рода».

Субъективному ощущенію измѣненія температуры должно соответствовать некоторое опредѣленное измѣненіе, происходящее въ самомъ тѣлѣ, температура котораго мѣняется. Это измѣненіе заключается въ слѣдующемъ. Частицы тѣла никогда не находятся въ покоѣ, онѣ постоянно движутся. Быстрота движеній частицъ можетъ, однако, мѣняться и потъ это-то измѣненіе и представляеть собою сущность того, что въ нашемъ органѣ осязанія вызываетъ представленіе объ измѣненіи теплотаго состоянія матеріи. Чѣмъ быстрее частицы движутся, тѣмъ выше температура данной матеріи.

Для огромнаго большинства матерій мы замѣчаемъ, что съ повышеніемъ температуры увеличивается объемъ, занимаемый опредѣленнымъ ея количествомъ, и вотъ этимъ-то пользуются для опредѣленія единицы разности температуры, называемой градусомъ, и для составленія температурной шкалы. Напомнимъ, какимъ образомъ такая шкала можетъ быть получена, основываясь на наблюденіи измѣненія объема водорода, находящагося при постоянномъ вѣншемъ давленіи. Въ т. III, гл. 2 мы познакомились съ другимъ способомъ построения температурной шкалы, основаннымъ на наблюденіи измѣненія давленія водорода, сохраняющаго по-

стойный объемъ. Опыты указали на существование, между прочими, двухъ вполне определенныхъ температуръ: температуры таяния льда и температуры кипения воды, на поверхность которыхъ производится (воздухомъ или инымъ газомъ) давление, составляющее 10.336 килогр. на каждый квадратный сантиметръ или 10336 килогр. на каждый квадратный метръ, каковое давление равно давлению столба ртути (при 0°) толщиной въ 760 мм.

Возьмемъ некоторое определенное количество водорода, напр., 1 килогр., и поместимъ его въ сосудъ, окруженный талымъ льдомъ, вследствие чего онъ приметъ температуру этого льда. Обозначимъ его объемъ при этомъ черезъ v , где v число хотя бы кубическихъ метровъ, занимаемыхъ водородомъ. Если затѣмъ то же количество водорода окружить парами кипящей воды, то онъ займетъ болѣе большой объемъ V . Полное увеличеніе объема $V - v$ раздѣлимъ на 100 равныхъ частей и условимся называть однимъ градусомъ (1°) ту разность температуръ, которой соответствуетъ увеличеніе объема водорода на величину $\frac{V - v}{100}$. Температуру таяния льда можно принять за начало шкалы температуръ; съ нею сравниваются всѣ другія температуры. Условно это выражается тѣмъ, что температуру таяния льда принимаютъ равною нулю (0°) ей соответствуетъ объемъ v ; ясно, что температура кипения воды, при которой взятое нами количество водорода имѣетъ объемъ V , при такомъ счетѣ температуръ будетъ равна 100°. Температуру, при которой этотъ объемъ равенъ

$$v - n \frac{V - v}{100}$$

принимаютъ равною n° . Повѣрно, что 100° и n° не суть, строго говоря, температуры тѣлъ, но лишь разности температуръ тѣлъ и температуры таящаго льда.

Весь промежутокъ между температурами таяния льда и кипения воды оказывается у насъ раздѣленнымъ на 100 частей или градусовъ, причемъ каждый градусъ повышения температуры вызываетъ одинаковое увеличеніе $\frac{V - v}{100}$ объема водорода. Отношеніе этого увеличенія къ объему v водорода при 0° называется коэффициентомъ расширенія водорода; обозначимъ его черезъ α ; въ такомъ случаѣ

$$\alpha = \frac{V - v}{100v} \dots \dots \dots (5)$$

Изъ опытовъ оказалось, что

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0,00366 \dots \dots \dots (6)$$

Величина α представляется отвлеченнымъ числомъ; но, какъ это было показано на стр. 13—14, не трудно убѣдиться, что α есть численное значеніе некоторой особой физической величины, которую можно назвать тепловою расширенностью водорода. Еслибы мы измѣнили единицу температуръ (градусъ), раздѣливъ, напр., объемъ $V - v$ водорода не на 100 (шкала Цель-

зия), а на 80 (Резюмюр) или на 180 (Фаренгейтъ) частей, то измѣнилась бы и единица теплотовой расширяемости, а вмѣстѣ съ нею и численное ея значеніе α .

Изъ самаго опредѣленія коэффициента расширенія α слѣдуетъ, что это (для водорода) величина постоянная, независящая отъ температуры и что если теперь обозначить черезъ v_0 объемъ даннаго количества водорода при 0° , черезъ v_T и v_t объемы при температурахъ T и t , то для α можно написать

$$\alpha = \frac{1}{v} \frac{v_T - v_t}{T - t} \quad (7)$$

пбо измѣненія температуры мы положили пропорциональными измѣненіямъ объема водорода, такъ что $(T - t) : (v_T - v_t) = 100 : (v_{100} - v_0)$. Въ формулѣ (5) $V = v_{100}$ и $v = v_t$. Изъ (7) получается, какъ частный случай

$$\alpha = \frac{v_t - v_0}{v_0 t} \quad (8)$$

если положить $t = 0$ и вмѣсто T написать t . Наконецъ, (8) даетъ

$$v_t = v_0(1 + \alpha t) \quad (9)$$

Для другой температуры T имѣемъ $v_T = v_0(1 + \alpha T)$, откуда

$$v_T = \frac{v_t(1 + \alpha T)}{1 + \alpha t} \quad (10)$$

Дважды $1 + \alpha t$ называется блнжнмомъ расширенія.

Приборъ, который даетъ намъ возможность по объему даннаго количества водорода судить о температурѣ, называется водороднымъ термометромъ. Его устройство будетъ описано въ ч. III.

Возьмемъ вмѣсто водорода опредѣленное количество произвольнаго другаго вещества и сдѣлаемъ рядъ измѣреній его объемоу v_t и соответствующихъ имъ температуръ t , которыя измѣряемъ помощью водороднаго термометра. Получается два ряда чиселъ v_t и t . Если при этомъ окажется, что равнымъ повышеніямъ температуры соответствуютъ и равныя измѣненія объема, то величина α , вычисленная по одной изъ формулъ (7) или (8), окажется нѣкоторымъ постояннымъ числомъ, которое мы назовемъ коэффициентомъ расширенія изслѣдуемаго вещества. Останется также справедливыми формулы (9) и (10).

Если же однако окажется, что числа, найденныя для объема и температуры вещества, не даютъ постояннаго числа α , вычисленнаго по формулѣ (7), то понятіе о коэффициентѣ расширенія вещества, соответствующее введенному нами понятію о такой же величинѣ для водорода (величинѣ постоянной по самому себѣ опредѣленно) теряетъ смыслъ. Въ этомъ случаѣ мы, однако, можемъ ввести понятіе о коэффициентѣ расширенія, какъ величинѣ переменной, зависящей отъ температуры. Формула (7) даетъ намъ сперва

такъ называемый средний коэффициентъ расширения α_m между температурами T и t , такъ что

$$\alpha_m = \frac{1}{t} \frac{v_T - v_t}{T - t} \quad (11)$$

Эта величина зависитъ отъ двухъ температуръ T и t .

Формула (8) дастъ намъ средний коэффициентъ расширения между температурами 0^0 и t' , каковая величина войдетъ и въ формулу (9)

$$v_t = v_0(1 + \alpha_m t) \quad (12)$$

гдѣ α_m зависитъ отъ t . Въместо (10) получаемъ теперь

$$v_T = \frac{v_t(1 + \alpha_m T)}{1 + \alpha_m t} \quad (13)$$

гдѣ α_m средн. коэфф. расширения между 0^0 и t' , а α_m средн. коэфф. расширения между 0^0 и T^0 .

Положимъ, что вещество имѣетъ при t^0 объемъ v ; увеличимъ температуру на малую величину Δt ¹⁾, что вызоветъ увеличение объема на малую величину Δv .

По формулѣ (11) находимъ величину

$$\alpha_m = \frac{1}{t} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (14)$$

т.е. средн. коэфф. расширения для малого температурнаго промежутка Δt между температурами t и $t + \Delta t$. Если уменьшать безпрѣдѣльно величину Δt , то выгѣтъ съ тѣмъ будетъ безпрѣдѣльно уменьшаться и величина Δv ; средн. коэффициентъ α_m при этомъ будетъ стремиться къ некоторому предѣлу α , зависящему отъ той температуры t , къ которой мы прибавили малую величину Δt . Итакъ

$$\alpha = \frac{1}{v} \lim_{\Delta t} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (15)$$

Величина α называется коэффициентомъ расширения вещества при температурѣ t' , она представляется функцией температуры t , определенной водороднымъ термометромъ.

Иногда разсматриваютъ измѣненіе линейныхъ размѣровъ матеріи (твердой) въ зависимости отъ измѣненій температуры. Обозначимъ черезъ l_0 , l_T и l_t длину какой-нибудь прямой линіи, соединяющей двѣ точки взятаго количества матеріи при температурахъ 0^0 , T^0 и t^0 , измѣряемыхъ, какъ

¹⁾ Малое приращеніе какой либо величины x вообще принято обозначать символомъ Δx .

и прежде, водороднымъ термометромъ: если изъ этой матеріи приготовить стержень, то l_0 , l_T и l_t могутъ обозначить длину стержня. Величина

$$\beta_m = \frac{1}{l} \frac{l_t - l_T}{T - t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

называется среднимъ коэффициентомъ линейнаго расширенія между температурами T и t . Мы возьмемъ далее, соответственно (12)

$$l = l_0 (1 + \beta_m t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

гдѣ β_m средній коэфф. линейнаго расширенія между 0° и t° . Наконецъ

$$\beta = \frac{1}{l} \text{ прел. } \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

дастъ намъ коэффициентъ линейнаго расширенія при температурѣ t .

Температуры ниже 0° считаются отрицательными. Если за температуру нуль принять не температура таянія льда, но другая, лежащая по шкалѣ Цельсія ниже на 273° , то температура называется абсолютною. Обозначимъ ее черезъ T : изъ опредѣленія слѣдуетъ, что

$$T = 273 + t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

гдѣ t температура по обыкновенной шкалѣ Цельсія.

2. Плотность и удѣльный объемъ. Въ физикѣ обозначаютъ терминомъ «плотность» двѣ совершенно различныя величины; съ одной изъ нихъ мы познакомимся въ отдѣлѣ второмъ. Понятіе о другой величинѣ возникаетъ на основаніи наблюденнаго факта, что вѣсъ p матеріи, взятой въ данномъ объемѣ v зависитъ отъ рода этой матеріи. Отсюда возникаетъ понятіе о нѣкоторой величинѣ δ , характерной для каждаго рода матеріи, называя ее плотностью, мы предполагаемъ, что она для различныхъ матерій пропорциональна вѣсу p равныхъ объемовъ v этихъ матерій, опредѣляемому въ одномъ и томъ же мѣстѣ на земной поверхности и обратно пропорциональна объемамъ v различныхъ матерій, имѣющихъ равные вѣса p . Отсюда получается

$$\delta = C \frac{p}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Приравнивая коэффициентъ C единицѣ (см. стр. 20) мы получаемъ

$$\delta = \frac{p}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Эта формула показываетъ, что при $p=1$ и $v=1$ плотность $\delta=1$; отсюда слѣдуетъ, что за единицу плотности слѣдуетъ принять плотность такого вещества, единица объема котораго обладаетъ единицею вѣса. Если граммъ и кубическій сантиметръ принять за единицы вѣса и объема, то единица плотности будетъ приблизительно (см. стр. 15 внизу) плот-

ность воды при 4° Ц. Сохраним формулу (20), мы можем плотность воды принять за единицу и въ то же время совершенно произвольно выбрать единицы объема и вѣса.

Формула (21) дастъ при $\epsilon = 1$ равенство $\delta = p$. Это показываетъ, что при особомъ выборѣ единицъ плотность материи измѣняется вѣсомъ единицы ея объема (какъ для краткости принято выражаться).

Обозначивъ теперь черезъ p_1 вѣсъ объема v воды, плотность которой принимаемъ за единицу, мы получаемъ согласно (20),

$$1 = C \frac{p_1}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Раздѣливъ (20) на (22), получаемъ

$$\delta = \frac{p}{p_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Численное значение плотности некоторой материи получается раздѣленіемъ произвольнаго объема этой материи на вѣсъ такого же объема воды.

Мы на стр. 14 указали на то, что нѣтъ никакой причины вводить понятія о двухъ якобы различныхъ величинахъ, называемыхъ плотностью и удѣльнымъ вѣсомъ.

Обозначая число $\frac{1}{C}$ черезъ ϵ , мы получаемъ вмѣсто (20) и (21) выраженія для численного значения p вѣса однороднаго тѣла

$$p = \epsilon \delta v \quad \text{или} \quad p = \delta v. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Здѣсь ϵ есть численное значение вѣса единицы объема материи, плотность которой принята за единицу; вторая формула относится къ случаю, когда единица объема такой материи совпадаетъ съ единицею вѣса.

Для случая неоднородной материи первоначальное опредѣленіе плотности, выраженное формулами (20) и (21), перестаетъ имѣть смыслъ. Мы можемъ, однако, перейти отъ понятія о плотности, какъ величинѣ постоянной для данной материи, къ понятію о плотности, какъ величинѣ непрерывно мѣняющейся. Мы имѣемъ формулы

$$\delta_m = C \frac{p}{v} \quad \text{или} \quad \delta_m = \frac{p}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

которые даютъ среднюю плотность объема v и формулы

$$\delta = C \text{ прел. } \frac{\Delta p}{\Delta v} \quad \text{или} \quad \delta = \text{ прел. } \frac{\Delta p}{\Delta v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

для «плотности въ данной точкѣ» (около которой бытъ взятъ весьма малый объемъ Δv), какъ предѣлъ средней плотности безпрѣдельно убывающаго объема Δv .

Удельнымъ объемомъ однородной матеріи называется объемъ, занимаемый единицею веса этой матеріи. Обозначимъ эту величину черезъ V . Вторая изъ формулъ (24) даетъ

$$\delta V = 1 \text{ и } V = \frac{1}{\delta} \quad (27)$$

При определенномъ выборѣ единицъ, численное значеніе удѣльнаго объема равно обратному численному значенію плотности.

Съ измѣненіемъ температуры мѣняется удѣльный объемъ согласно формулѣ

$$V_t = V_0(1 + \alpha t) \quad (28)$$

гдѣ α средний коэффициентъ расширенія между температурами 0° и t° . Формулы (27) и (28) даютъ

$$\frac{1}{\delta_t} = \frac{1}{\delta_0} (1 + \alpha t)$$

или

$$\delta_t = \frac{\delta_0}{1 + \alpha t} \quad (29)$$

гдѣ δ_t и δ_0 плотности при t° и при 0° .

Въ таблицахъ численныхъ значеній различныхъ физическихъ величинъ обыкновенно помѣщаютъ плотность при 0° , причемъ плотность воды при 4° Ц. принята за единицу; мы будемъ ее называть табличною плотностью.

Замѣтимъ, что для ртути

$$\delta_0 = 13,6 \quad (30)$$

(точноѣ 13,596).

3. Давленіе и упругость. Тѣла въ природѣ, какъ показываетъ наблюденіе, всегда подвержены давленію на ихъ поверхность, исходящему отъ другихъ, окружающихъ его тѣлъ. Это давленіе p мы будемъ выражать въ килограммахъ на квадратный метръ поверхности, т.-е. за единицу вѣщнаго давленія мы принимаемъ давленіе въ одинъ килограммъ на каждый кв. метръ поверхности. Другая единица давленія называется для краткости атмосферою; она равна давленію столба ртути толщиной въ 760 мм., находящагося при 0° . Обозначимъ эту единицу давленія черезъ A . Такъ какъ столбъ воды, толщиной въ 1 мм., производитъ на квадратный метръ поверхности давленіе равное одному килограмму, то ясно, что $A = 760 \times \delta_0$, гдѣ δ_0 плотность ртути; (30) даетъ

$$A = 760 \times 13,6 = 10336 \text{ килогр. на кв. метръ} \quad (31)$$

Подъ вліяніемъ вѣщаго давленія уменьшается объемъ тѣла, но вмѣстѣ съ тѣмъ увеличивается и противодавленіе сжатого тѣла на непосредственно окружающія его тѣла; это контръ-давленіе мы будемъ называть

упругостью; за единицу упругости тѣла мы принимаемъ ту, при которой тѣло производить на кв. метръ поверхности окружающихъ его тѣлъ давленіе въ одинъ килогр. Измѣненіе объема тѣла тогда только прекращается, когда его упругость равна вѣншнему давленію. Рассматривая тѣло при условіяхъ, когда его объемъ не мѣняется подъ вліяніемъ вѣншнихъ давленій, мы для упругости и для вѣншнаго давленія всегда будемъ имѣть одинаковыя численныя значенія. Вслѣдствіе этого можно, при указанныхъ условіяхъ, даже безразлично пользоваться терминами «давленіе» и «упругость», хотя эти двѣ величины по существу совершенно различны. Впрочемъ легко понять, что давленіе, подъ которымъ находится тѣло, есть не что иное, какъ упругость того или тѣхъ тѣлъ, которыя окружаютъ первое тѣло со вѣхъ сторонъ.

На стр. 26 мы указали на температуру, плотность (или удѣльный объемъ) и давленіе или упругость какъ на важнѣйшія функціи состоянія и упомянули, что при всякомъ измѣненіи какого-либо изъ свойствъ тѣла, характеризованнаго какою-либо изъ этихъ функцій, мы будемъ говорить объ измѣненіи состоянія тѣла. Отсюда слѣдуетъ, что, напр., всякое измѣненіе температуры или плотности или давленія соответствуетъ измѣненію «состоянія» тѣла, понимая этотъ терминъ въ наиболѣе обширномъ смыслѣ слова.

Въ тѣсномъ смыслѣ слова, какъ было сказано на стр. 25, различаютъ три состоянія матеріи твердое, жидкое и газообразное. Они, однако, не отличаются рѣзко другъ отъ друга; иногда матерія находится въ состояніяхъ, которыя можно назвать промежуточными. Особый интересъ представляетъ, какъ мы увидимъ въ отдѣлѣ четвертомъ, матерія въ такъ наз. коллоидальномъ состояніи, промежуточномъ между состояніями твердымъ и жидкимъ.

Укажемъ на нѣкоторые особо характерные признаки трехъ состояній матеріи.

1. Состояніе твердое. Матерія въ твердомъ состояніи, взятая въ опредѣленномъ количествѣ, такъ наз. твердое тѣло, обладаетъ опредѣленною формою, которая, вообще говоря, сохраняется неопредѣленно долго. Эта форма можетъ измѣниться подъ вліяніемъ вѣншнихъ давленій, по исчезновении которыхъ форма болѣе или менѣе возстановляется. Температура и вѣншнее давленіе весьма мало мѣняютъ объемъ твердаго тѣла. Частицы его, хотя и находятся въ движеніи, однако каждая изъ нихъ при этомъ, вообще, весьма мало удаляется отъ нѣкотораго средняго положенія. Раздѣленіе твердаго тѣла на части возможно только при сравнительно большихъ давленіяхъ, производимыхъ на ту или другую часть его поверхности.

2. Состояніе жидкое. Матерія въ жидкомъ состояніи или такъ наз. жидкое тѣло не обладаетъ опредѣленною формою, которая вообще весьма легко мѣняется; столь же легко происходитъ раздѣленіе жидкаго тѣла на части. Объемъ жидкости весьма мало уменьшается, когда она на всей поверхности подвергается давленію, по исчезновении котораго прежній объемъ вполне возстановляется. Частицы жидкости, двигаясь, каждая около нѣкотораго средняго положенія, мало-по-малу переходятъ съ одного мѣста къ другому, такъ что взаимное расположеніе ихъ непрерывно мѣняется.

Жидкости слѣдуютъ основному закону Паскаля: давленіе на поверх-

ность жидкости, произведенное внешними для жидкости силами, передается ею равномерно во все стороны, т.-е. если на единицу поверхности жидкости производится давление, то такое же давление передается ею на каждую единицу поверхности непосредственно окружающую ее тѣло. Если принять во внимание свойственный всей жидкости, то изъ закона Паскаля вытекаетъ, какъ слѣдствие, законъ Архимеда: тѣло, погруженное въ жидкость претерпѣваетъ со стороны послѣдней давление снизу вверхъ, которое вызываетъ кладущуюся потерю вѣса, равную вѣсу вытѣсненной имъ жидкости.

Всѣ жидкости сами собою и при всѣхъ условияхъ непрерывно переходить въ газообразное состояніе, каковое явленіе называется испареніемъ.

3. Состояніе газообразное. Вещество въ газообразномъ состояніи или, проще, газъ состоитъ изъ частицъ, движущихся, каждая, прямолинейно и мѣняющихъ направление движенія только въ случаѣ столкновении между собою или съ поверхностью тѣла, ограничивающаго газъ (напр., стѣны сосуда, въ которомъ газъ помѣщенъ). Вслѣдствіе этого газъ немедленно заполняетъ всякую, расположенную рядомъ съ нимъ пустоту; онъ, какъ говорить, стремится расшириться, т.-е. занять по возможности болѣе обширный объемъ.

Совокупность ударовъ частицъ газа, падающихъ на поверхность соприкосновенія съ газомъ тѣла, складывается въ давленіе, претерпѣваемое этимъ тѣломъ со стороны газа. Это давленіе, называемое упругостью газа, измѣряется какъ мы видѣли, или килограммами на кв. метръ поверхности, или атмосферами. Для неизмѣнности объема газа необходимо, чтобы его упругость равнялась внешнему, производимому на газъ давленію. Объемъ газа увеличивается или уменьшается, если его упругость болѣе или меньше внешнего давленія.

Законы Паскаля и Архимеда остаются вѣрными и для газовъ.

Газы приблизительно слѣдуютъ законамъ Бойля (Мариотта) и Гей-Люссака.

Законъ Гей-Люссака гласитъ, что коэффициентъ расширенія α газовъ, нагрѣваемыхъ при неизмѣнномъ внешнемъ давленіи, есть величина постоянная и притомъ для всѣхъ газовъ одна и та же, а именно

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0,00366 \dots \dots \dots (32)$$

Формула (12) стр. (29) принимаетъ видъ (ишемъ c вмѣсто c_0)

$$c = c_0 \left(1 + \frac{1}{273} t\right) \dots \dots \dots (33)$$

Законъ Бойля объемъ данного количества газа обратно пропорционаленъ внешнему давленію (или упругость данного количества газа обратно пропорциональна его объему), если температура газа остается неизмѣнною.

Эти два закона показываютъ, что объемъ газа можетъ подвергаться весьма значительнымъ измѣненіямъ, когда мѣняется температура или, въ особенности, внешнее давленіе.

Плотность газа. Слѣдуетъ весьма твердо помнить, что для измѣренія плотности газовъ употребляются двѣ различныя единицы.

а. За единицу плотности принимается плотность воды. Численное значеніе плотности данного газа, измѣренной этой единицей, есть величина, мѣняющаяся въ широчайшихъ предѣлахъ въ зависимости отъ температуры газа и того давленія, подѣ которымъ онъ находится. Плотность газа, измѣренную этой единицей, мы будемъ иногда называть первой плотностью газа.

б. Опредѣляя плотность газа, весьма часто принимаютъ за единицу плотность воздуха, находящагося при той же температурѣ и подѣ тѣмъ же давленіемъ, какъ и исследуемый газъ. Эта плотность есть величина постоянная для данного газа по крайней мѣрѣ въ предѣлахъ примѣнимости законовъ Бойля и Гей-Люссака къ воздуху и къ разсматриваемому газу. Мы назовемъ ее второю плотностью газа.

Чтобы яснѣе была понятна необходимость строго отличать эти двѣ плотности, мы замѣтимъ, что въ формулировкахъ различныхъ законовъ, относящихся къ газамъ, принято упоминать просто «плотность газа», хотя въ однихъ законахъ говорится о первой, въ другихъ о второй плотности. Вотъ два примѣра:

1. Законъ Бойля видоизмѣненный плотность данного количества газа при постоянной температурѣ прямо пропорциональна вѣтшнему давленію. Здѣсь говорится о первой плотности.

2. Скорость газовыхъ частицъ при данной температурѣ обратно пропорциональна квадратному корню изъ плотности газа. Здѣсь подразумѣвается вторая плотность; скорость газовыхъ частицъ не мѣняется, если не отличать надлежащимъ образомъ двѣ различныя плотности газовъ.

Состояніе системы. Когда мы имѣемъ дѣло съ системою тѣлъ или отдѣльныхъ частицъ, то понятие о состояніи можетъ быть еще болѣе общо. Мы условимся всякое измѣненіе взаимнаго расположенія частей системы также называть измѣненіемъ состоянія системы.

Замѣтимъ въ заключеніе, что переходъ тѣлъ или системы изъ одного состоянія въ другое можетъ быть совершенъ безконечно многими различными способами или, какъ говорить, путями. Такъ, напр., переходъ данного количества газа отъ состоянія, которое опредѣляется низкой температурой и малымъ объемомъ, къ состоянию, которое опредѣляется высокой температурой и большимъ объемомъ, можетъ быть сдѣланъ, нагрѣвая сперва газъ и неизмѣняющъ объемъ и расширяя его потомъ при постоянной температурѣ или, наоборотъ, мѣняя сперва объемъ, а потомъ температуру или, наконецъ, мѣняя одновременно и объемъ, и температуру, что можетъ быть сдѣлано на безконечное число манеровъ.

§ 10. Сохраненіе матеріи. Въ предыдущемъ параграфѣ мы познакомились съ измѣненіями состоянія матеріи.

Къ измѣненіямъ состоянія матеріи можно причислить и то, что происходитъ при химическихъ реакціяхъ. Когда водородъ и кислородъ

При показанномъ здѣсь способѣ опредѣленія численнаго значенія угловъ, мы, для весьма малыхъ угловъ, можемъ положить

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha &= \alpha \end{aligned} \right\} (36)$$

Это явствуетъ изъ самаго опредѣленія синуса и тангенса.

ТѢЛЕСНЫЙ УГОЛЬ (при вершинѣ произвольнаго конуса) измѣряется слѣдующимъ образомъ. Вообразимъ поверхность шара, радиуса r , центръ котораго находится бы въ вершинѣ тѣлеснаго угла, который выдѣлить изъ поверхности шара нѣкоторую часть; обозначимъ ее черезъ s .

Отношеніе $\frac{s}{r^2}$ не зависитъ отъ радиуса r и такъ какъ s пропорціонально тѣлесному углу α , то мы можемъ положить $\alpha = C \frac{s}{r^2}$. Принимая $C = 1$, получаемъ

$$\alpha = \frac{s}{r^2} (37)$$

т.е. численное значеніе тѣлеснаго угла равно отношенію поверхности s къ квадрату радиуса. За единицу тѣлеснаго угла мы принимаемъ при этомъ такой уголъ, для котораго поверхность s содержитъ r^2 единицъ поверхности. Весь тѣлесный уголъ, окружающій со всѣхъ сторонъ данную точку въ пространствѣ равенъ 4π , такъ какъ для него $s = 4\pi r^2$; тѣлесный уголъ, ограниченный плоскостью, проходящей черезъ его вершину, равенъ 2π , ибо для него s есть поверхность полушарія. Тѣлесный уголъ, образованный тремя взаимно перпендикулярными плоскостями равенъ $\frac{1}{8} 4\pi = \frac{\pi}{2}$. Изъ (37) получаемъ

$$s = \alpha r^2 (38)$$

II. Вычисленіе нѣкоторыхъ величинъ вида пред. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Формулы (15) стр. 29, (18) стр. 30 и (26) стр. 31 указываютъ на необходимость умѣньшать величины вида пред. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, гдѣ Δx весьма малое приращеніе нѣкоторой величины x , а Δy соответствующее приращеніе другой величины y , зависящей отъ x . Если y есть нѣкоторая функція отъ x , что символически пишется такъ

$$y = f(x), (39)$$

то искомый предѣлъ представляется въ видѣ нѣкоторой новой функціи отъ x , которую обозначимъ черезъ y или $f'(x)$, такъ что

$$y' = f'(x) = \text{пред. } \frac{\Delta y}{\Delta x} (40)$$

Эта новая функція называется производною функціею отъ функціи y или производною y -ка «по x ».

Вычислимъ производныя для двухъ частныхъ случаевъ.

1. Положимъ, что

$$y = f(x) = Ax^n + Bx^m + Cx^p + \dots \quad (41)$$

гдѣ n, m, p и т. д. цѣлыя положительныя числа; A, B, C, \dots произвольные численные коэффициенты. Если къ величинѣ x прибавить Δx , то вмѣсто y получится измѣненная величина $y + \Delta y$, причемъ будемъ имѣть равенство

$$y + \Delta y = A(x + \Delta x)^n + B(x + \Delta x)^m + C(x + \Delta x)^p + \dots$$

или

$$y + \Delta y = A \left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots \right) + B \left(x^m + mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2}(\Delta x)^2 + \dots \right) + C \left(x^p + px^{p-1}\Delta x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} x^{p-2}(\Delta x)^2 + \dots \right).$$

Вычитая отсюда (41), раздѣливъ разность на Δx и выписывая сперва члены, не содержащіе Δx , получаемъ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = Anx^{n-1} + Bmx^{m-1} + Cpx^{p-1} + \dots + K\Delta x,$$

гдѣ K сумма членовъ, получающихся, если Δx взять, какъ общій множитель, за скобки. Въ предѣлѣ, при безконечномъ убываніи величины Δx , членъ $K\Delta x$ исчезаетъ и мы получаемъ такой результатъ: если $y = f(x)$ имѣть видъ (41), то производная функція опредѣляется формулою

$$y' = f'(x) = \text{пред.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = Anx^{n-1} + Bmx^{m-1} + Cpx^{p-1} + \dots \quad (42)$$

Такъ напр. $y = 4x^3 - 5x'$ даетъ $y' = 12x^2 - 10x$.

2. Положимъ, что

$$y = A \sin px \quad (43)$$

гдѣ A и p произвольныя числа. Мы имѣемъ

$$y + \Delta y = A \sin p(x + \Delta x) = A \sin px \cos p\Delta x + A \cos px \sin p\Delta x.$$

Вычитая отсюда (43), получаемъ

$$\Delta y = -A \sin px (1 - \cos p\Delta x) + A \cos px \sin p\Delta x.$$

Въ первомъ членѣ замѣняемъ $1 - \cos p\Delta x$ величиною $2 \left(\sin \frac{p\Delta x}{2} \right)^2$, а затѣмъ, на основаніи формулъ (36) стр. 37, синусы весьма малыхъ угловъ самими углами: раздѣливъ все равенство на Δx , получаемъ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} Ap^2 (\Delta x) \sin px + Ap \cos px.$$

Въ предѣлѣ первый членъ исчезаетъ и мы получаемъ такой результатъ:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Если} \\ \text{то} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = A \sin px \\ y' = f'(x) = \text{пред.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A p \cos px \end{array} \quad \dots \dots \dots (44)$$

3. Предоставимъ читателю доказать аналогичную формулу:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Если} \\ \text{то} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = A \cos px \\ y' = f'(x) = \text{пред.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -A p \sin px \end{array} \quad \dots \dots \dots (45)$$

III. Касательная и радиусъ кривизны. Понятіе о касательной въ данной точкѣ M (рис. 1) кривой CD получается слѣдующимъ образомъ. Возь-

мемъ на кривой другую точку M_1 , близкую къ M и проведемъ черезъ M и M_1 прямую AB ; такая прямая называется сѣкущею къ кривой CD . Вообразимъ, что точка M_1 , не сходя съ кривой, начинаетъ безпредѣльно приближаться къ M и что въ то же время сѣкущая BA не перестаетъ проходить черезъ данную точку M и черезъ подвижную точку M_1 . Понятно, что она будетъ вращаться около точки M . Съ приближеніемъ M_1 къ M сѣкущая безпредѣльно будетъ приближаться къ положенію нѣкоторой прямой ST , которая и называется касательною въ точкѣ M .

Прямая UN , перпендикулярная къ касательной, называется нормалію въ точкѣ M къ данной кривой.

Направленіе кривой въ каждой ея точкѣ опредѣляется направлениемъ касательной. Разсматривая кривыя линіи, мы замѣчаемъ, что въ нѣкоторыхъ частяхъ направленіе кривой мѣняется весьма быстро, а въ другихъ частяхъ той же или другой кривой это направленіе мѣняется болѣе медленно; отсюда у насъ является представленіе о большей или меньшей кривизнѣ кривой. Не входя пока, въ точное опредѣленіе этого понятія, мы скажемъ, что кривизна тѣмъ

Рис. 1.

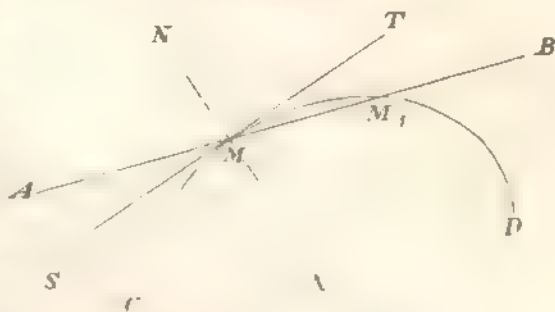
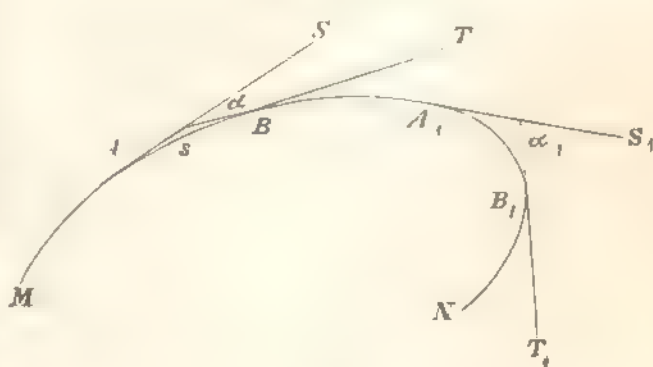
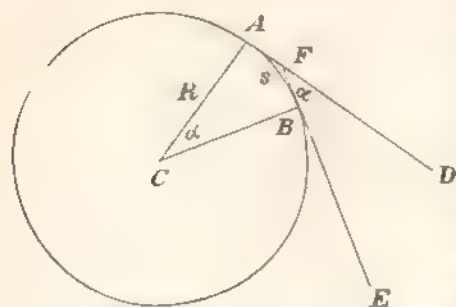


Рис. 2.



больше, чѣмъ больше уголъ α (рис. 2) между касательными AS и BT , проведенными въ концахъ отрезка кривой, имѣющаго данную длину s . Принимая $A_1B_1 = AB = s$ и замѣчая что $\alpha_1 > \alpha$, мы скажемъ, что часть A_1B_1 обладаетъ большею кривизною, чѣмъ часть AB .

Рис. 3.



$= \angle ACB$, то ясно, что уголъ α пропорционаленъ дугѣ s и мы имѣемъ

$$\alpha = \frac{s}{R} \quad (46)$$

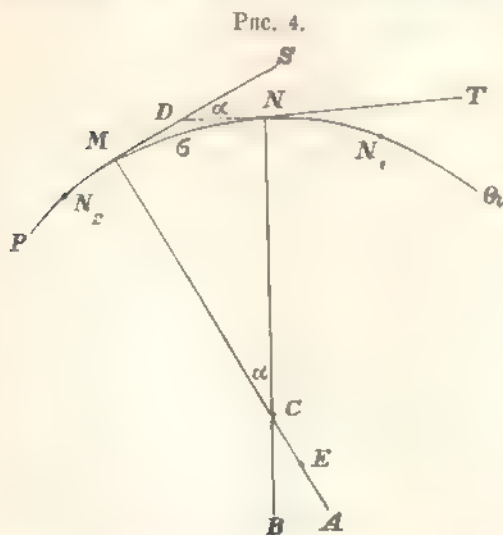
Однако $s = \alpha R$, см. (35) стр. 36, и потому

$$\lambda = \frac{1}{R} \quad (47)$$

Кривизна окружности измѣряется обратнымъ радиусомъ. Единица кривизны есть кривизна окружности, радиусъ которой равенъ единицѣ.

Для произвольной кривой MN (рис. 2) формула подобная (46) дастъ намъ среднюю кривизну λ_m отрезка $AB = s$ кривой:

$$\lambda_m = \frac{\alpha}{s} \quad (48)$$



точкѣ C . Средняя кривизна малой дуги σ будетъ равна $\lambda_m = \frac{\alpha}{\sigma}$. Предѣлъ λ , къ которому стремится эта величина при безконечномъ приближеніи

точки N къ M и дать численное значеніе кривизны въ точкѣ M . Итакъ кривизна

$$\lambda = \text{пред.} \frac{\alpha}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Когда N станетъ приближаться къ M , то нормаль NB будетъ мѣнять свое положеніе и слѣдовательно точка C перемѣняться вдоль нормали MA . Оказывается, что она при этомъ будетъ приближаться къ нѣкоторому предѣльному положенію, которое обозначимъ чертой E .

Проведемъ черезъ точку M окружность, центръ которой находился бы на нормали MA и кривизна которой равнялась бы кривизнѣ кривой въ точкѣ M . Изъ (47) и (49) слѣдуетъ, что радиусъ R этого круга долженъ удовлетворять равенству

$$\lambda = \text{пред.} \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Этотъ кругъ называется кругомъ кривизны, а его радиусъ радиусомъ кривизны данной кривой въ точкѣ M . Можно доказать: 1) что $R = ME$, т.-е. что центръ круга кривизны опредѣляется предѣльнымъ положеніемъ точки пересѣченія двухъ бесконечно близкихъ нормалей къ кривой и 2) что кругъ кривизны есть предѣлъ круга, окружности котораго проходятъ черезъ точку M и двѣ точки N и N_1 или N и N_2 , безпредѣльно приближающіяся къ M .

§ 12. Векторы. На стр. (25) мы назвали векторомъ величину, обладающую въ данной точкѣ не только опредѣленнымъ численнымъ значеніемъ, но и опредѣленнымъ направлениемъ.

Всякій векторъ можетъ быть изображенъ стрѣлкою. Начало стрѣлки берется въ той точкѣ, къ которой онъ относится; эту точку будемъ называть точкою приложенія вектора. Направленіе стрѣлки дѣлается равнымъ направленію вектора и, наконецъ, длина стрѣлки пропорціональной величинѣ вектора, т.-е. число линейныхъ единицъ, заключающихся въ длинѣ стрѣлки, дѣлается равнымъ или (особенно если приходится изображать нѣсколько векторовъ) пропорціональнымъ численному значенію вектора.

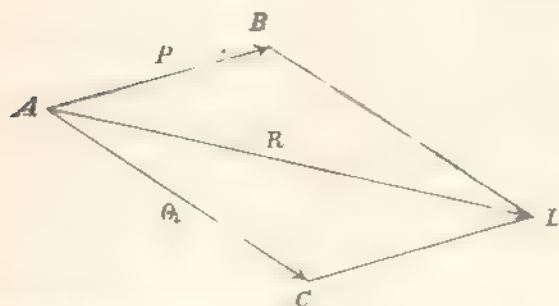
По двумъ даннымъ векторамъ, имѣющимъ общую точку приложенія, можно построить третій, изображаемый диагональю параллелограмма, построеннаго на данныхъ векторахъ, которые называются слагаемыми векторами. Такой переходъ отъ двухъ данныхъ векторовъ къ третьему называется геометрическимъ сложеніемъ для отличія отъ сложения алгебраическаго, т.-е. обыкновеннаго суммированія. Третій векторъ называется геометрической суммой данныхъ векторовъ $P = AB$ и $Q = AC$ (рис. 5); ихъ геометрическая сумма изображена стрѣлкою $R = AD$. Символически принято геометрическое суммирование писать слѣдующимъ образомъ.

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Черточки надъ буквами показываютъ, что складываніе происходитъ геометрическое.

Построеніе геометрической суммы можетъ быть произведено упрощенно, изъ конца B одного изъ двухъ векторовъ проведемъ линію BD , равную

Рис. 5.



и параллельную другому вектору $Q = AC$; съ концомъ D этой линіи соединимъ точку A прямою, которая и представитъ искомую геометрическую сумму.

Если данъ одинъ векторъ R , то отъ него на бесконечное множество манеровъ можно перейти къ двумъ такимъ векторамъ P и Q , что R представить геометрическую сумму векторовъ P и Q . Такой переходъ называется разложеніемъ вектора R на двѣ слагаемыя P и Q . Если P и Q составляютъ прямой уголъ, то

переходъ называется разложеніемъ вектора R на двѣ слагаемыя P и Q . Если P и Q составляютъ прямой уголъ, то

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \cos(R, P) = \frac{P}{R} \text{ и } \cos(R, Q) = \frac{Q}{R}.$$

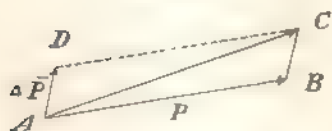
Геометрическая сумма равна алгебраической, когда два слагаемыхъ вектора имѣютъ одинаковое направленіе. Это же относится къ двумъ векторамъ, имѣющимъ противоположныя направленія, если таковымъ приписывались разные знаки, въ противномъ случаѣ геометрическая сумма дѣлается равною алгебраической разности. Если векторы P и Q считать за величины существенно положительныя, то имѣется такое очевидное неравенство

$$P - Q \leq P + Q \leq P + Q \dots \dots \dots (52)$$

если $P \geq Q$.

Измѣненіе вектора можетъ быть геометрическое. Положимъ, что векторъ $P = AB$ (рис. 6) измѣняется по величинѣ и по направленію, такъ

Рис. 6.



что измѣнившійся векторъ изобразится стрѣлкою AC . Построивъ параллелограммъ, мы видимъ, что измѣненіе можно себѣ представить происшедшимъ вследствие геометрическаго сложения вектора P съ некоторымъ векторомъ ΔD , который назовемъ геометрическимъ приращеніемъ вектора P и обозначимъ черезъ $\Delta \bar{P}$, для отличія отъ алгебраическаго приращенія ΔP .

Геометрическая сумма R трехъ векторовъ P_1 , P_2 и P_3 , имѣющихъ общую точку приложенія A (рис. 7), получается, складывая сперва два вектора P_1 и P_2 , геометрическая сумма которыхъ есть векторъ AE и затѣмъ векторы AE и P_3 , сумма которыхъ $R = AF$. Изъ чертежа видно, что

$R = P_1 + P_2 + P_3$ изображается диагональю параллелепипеда, построенного на трех данных векторах.

Проще можно R найти, приводя изъ конца B любого изъ трехъ векторовъ прямую $BE \parallel$ и $= P_2$ и затѣмъ изъ E прямую $EF \parallel$ и $= P_3$. Прямая, соединяющая A съ F и есть искомый векторъ.

Наоборотъ, векторъ R можно на безконечное число манеро́въ замѣнить тремя слагаемыми векторами, ребрами параллелепипеда, диагональ котораго R . Если слагаемые три вектора взаимно перпендикулярны, то параллелепипедъ прямоугольный. Возьмемъ точку приложенія векторовъ за начало координатныхъ осей x, y, z , имѣющихъ направление трехъ слагаемыхъ векторовъ, которые обозначимъ черезъ R_x, R_y, R_z (рис. 8), ихъ геометрическую сумму черезъ R . Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$\bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y + \bar{R}_z \dots (53)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. (53.a)$$

$$\cos(R.x) = \frac{R_x}{R}; \cos(R.y) = \frac{R_y}{R}; \cos(R.z) = \frac{R_z}{R}. (53.b)$$

R_x, R_y и R_z суть проекціи вектора R на направленія координатныхъ осей.

Пусть даны два вектора P и Q и слагаемыя ихъ вдоль координатныхъ осей P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y и Q_z . Изъ аналитической геометріи извѣстно,

что $\cos(P, Q) = \cos(P, x) \cos(Q, x) + \cos(P, y) \cos(Q, y) + \cos(P, z) \cos(Q, z)$.

Вставляя съ правой стороны значенія косинусовъ по формулѣ (53.b), получаемъ

$$PQ \cos(P, Q) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \dots (54)$$

Если произвольное число векторовъ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ имѣютъ общую

Рис. 7.

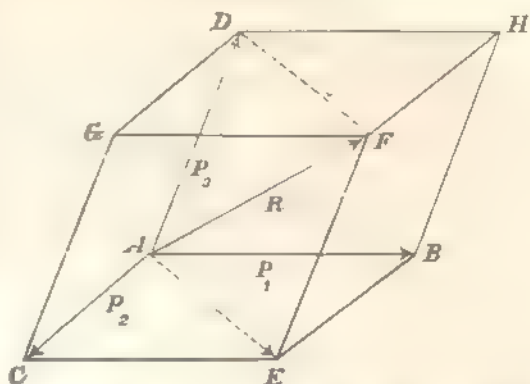
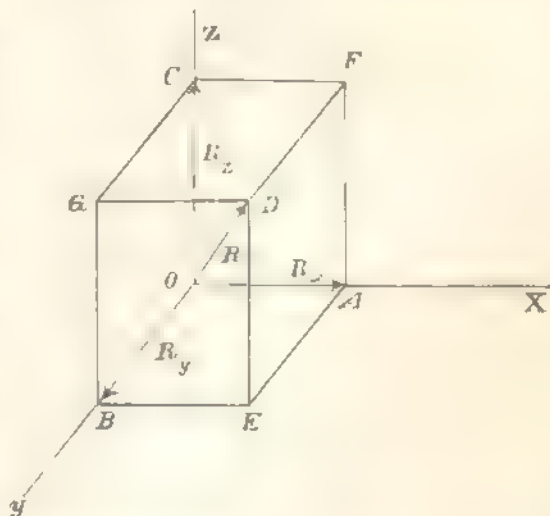


Рис. 8.



точку приложения A (рис. 9), то ихъ геометрическая сумма R получится, если сперва геометрически сложить два вектора; полученную сумму сложить съ третьимъ и т. д. Символически напишемъ

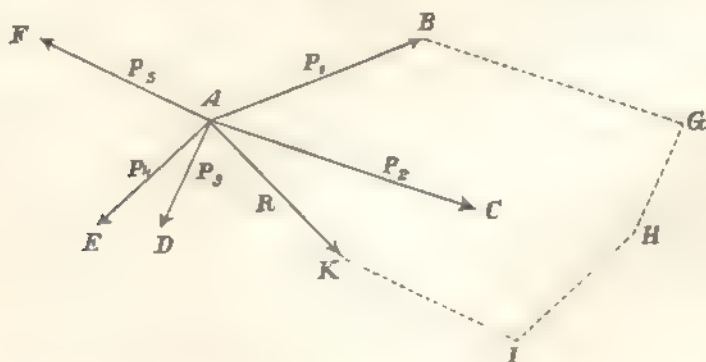
$$R = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3} + \dots + \overline{P_i} + \dots = \sum \overline{P_i} \dots \dots (55)$$

Упрощенно мы построимъ векторъ R при помощи такъ наз. многоугольника векторовъ: изъ конца B одного изъ векторовъ проводимъ

$$BG \parallel \text{и} = P_2;$$

затѣмъ изъ G прямую $GH \parallel \text{и} = P_3$, изъ H прямую $HI \parallel \text{и} = P_4$ и т. д. Прямая, соединяющая точку A съ концомъ K ломанной линии т.-е. такъ

Рис. 9.



назыв. замыкающая ломанной линіи и представить искомую геометрическую сумму R .

Если P_{ix} проекція вектора P_i по произвольному направленію x и R_x проекція вектора R на то же направленіе, то

$$R_x = \sum P_{ix} \dots \dots \dots (56)$$

т.-е. R_x есть алгебраическая сумма векторовъ P_{ix} . Отсюда (53.а) дать

$$R^2 = \left(\sum P_{ix} \right)^2 + \left(\sum P_{iy} \right)^2 + \left(\sum P_{iz} \right)^2 \dots \dots \dots (57)$$

§ 13. Журнальная литература. Литература физики, на сколько она относится къ оригинальнымъ работамъ, не имѣющимъ характера дидактическаго, почти вся разбросана по весьма многочисленнымъ журналамъ, издаваемымъ болѣею частью учеными обществами и учрежденіями (университетами, академіями и др.).

Весьма подробныя литературныя указанія по отдѣльнымъ вопросамъ можно найти, между прочимъ, въ слѣдующихъ книгахъ:

Winkelmann. Handbuch der Physik. Breslau. 1891—1896.

Landolt. Physicalisch-chemische Tabellen. Berlin. 1894. На стр. 539 находится весьма полезный обзор журналов.

Verdet. Conférences de Physique.

Далѣе нѣкоторые учебники, посвященные отдѣламъ физики, изобилуютъ литературными указаниями, напр. *G. Wiedemann*. Electricität; *Verdet*. Théorie mécanique de la chaleur; *H. v. Helmholtz*. Physiologische Optik и т. д.

Указывая на определенную ученую статью, принято сокращенно обозначать наименование журнала. И мы будемъ далѣе пользоваться подобными сокращениями при литературныхъ указанияхъ, помѣщенныхъ въ концѣ отдѣльных главъ, а потому считаемъ нужнымъ познакомить читателей съ нѣкоторыми изъ важнѣйшихъ журналовъ. Замѣтимъ, что нѣкоторые журналы выходятъ сериями, причемъ въ каждой серии нумерация томовъ отдѣльная. Въ цитатахъ номеръ серии помѣщается въ скобкахъ передъ номеромъ тома. Буква *p.* обозначаетъ «pagina», т.-е. «страница».

1. *Журналъ русскаго Физико-химическаго Общества*. С. П., съ 1869 года; ежегодно одинъ томъ (въ 1896 г. томъ 28), начиная съ 1874 г. выходить два отдѣла: химическій и физическій. Каждый отдѣлъ имѣетъ двѣ части; первая содержитъ статьи оригинальныя, вторая — рефераты. Обозначение:

Ж. Ф. Х. О.

2. *Труды отдѣленія физическихъ наукъ общества любителей естествознанія*. Москва. Въ 1895 г. вышелъ томъ 7. Обозначение: **О. Ф. Н. Об. Л. Е.**

3. *Извѣстiя, записки протоколы* и т. д. русскыхъ университетовъ и различныхъ, состоящихъ при нихъ физико-математическихъ или физико-химическихъ Обществъ.

4. *Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St. Petersburg*. С. П. Съ 1843—1859 г. вышли 17 томовъ, подъ названіемъ Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Acad. и т. д., затѣмъ 32 тома съ 1860 до 1888 г. Новая серия съ 1890 г. Обозначение:

Bull. Ac. d. St. Petersburg.

5. *Mémoires de l'Acad. Imper. des sciences de St. Petersburg*. I серия, 14 томовъ (Commentarii) 1726—1746; II серия (Novi commentarii) 1747—1776; III серия (Acta) 1777—1782; IV серия (Nova acta) 1783—1802, V серия 1803—1829; VI серия 1830—1852 (параллельно шли: «Sciences mathématiques et physiques» и «Mémoires, présentes par divers savants»), VII серия началась въ 1859 году; въ 1893 г. вышелъ 41-ый томъ. Обозначение:

Mém. de l'Acad. de St. Petersburg.

6. *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris*. Ежедневно одинъ номеръ; ежегодно два тома; съ 1835 г. Въ 1896 г. вышли томы 122 и 123. Обозначение:

C. R.

7. *Annales de Chimie et de Physique*. Paris. Съ 1789 г.; нынѣ по 3 тома ежегодно. Выходить сериями, начиная съ третьей, каждая серия по 30 томовъ. Въ 1894 г. началась серия 7-ая. Обозначение:

Ann. ch. et phys.

8. *Journal de Physique théorique et appliqué*. Paris. Съ 1872 г.; ежегодно одинъ томъ; выходить сериями по 10 томовъ. Въ 1892 г. началась 3-ья третья. Иногда называется Journ. d'Almeida. Обозначение: **J. de phys.**

9. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, Paris. Съ 1818 г. Обозначение: **Mém. de l'Acad. Fr**

10. *Annalen der Physik und Chemie*, Leipzig. Съ 1799 г., по три тома ежегодно. Съ 1799—1824 г. подъ названіемъ *Gilberts Annalen* (т. 1—76). Обозначение: **Gilb. Ann.**

Съ 1824 г.—1877 подъ названіемъ *Poggendorff's Annalen* (т. 1—160). Обозначение: **Pogg. Ann.**

Между 1842 и 1878 вышли 8 дополнительныхъ томовъ (*Ergaenzungsbande*). Обозначение: **Pogg. Ann. Ergbd.**

Въ 1874 вышелъ *Jubilband*. Обозначение: **Pogg. Ann. Jubilb.**
Съ 1877 г. подъ названіемъ *Wiedemann's Annalen*; въ 1896 вышли томы 57—59. Обозначение: **Wied Ann или W. A.**

11. *Blätter zu den Annalen der Physik und Chemie*, Leipzig. Ежегодно одинъ томъ рефератовъ; съ 1877 г. Въ 1896 г. вышелъ томъ 20-й. Обозначение: **Beibl.**

12. *Sitzungsberichte der königlich preussischen Academie der Wissenschaften*, Berlin. Обозначение: **Berl. Ber или Stzber. Berl Acad.**

13. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften zu Wien*. Съ 1848 г., ежегодно 1 или 2 тома. Въ 1895 г. номеръ т. 104. Обозначение: **Wien. Ber. или Stsber. Wien. Acad.**

14. *Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München*. Съ 1832 г.; выходить неправильно. Обозначение: **Abhandl. Bayer. Ac.**

15. *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der Königl. Bayer. Akad. der Wissenschaften in München*. Съ 1871 г.; ежегодно одинъ томъ. Обозначение: **Stzber. Bayer. Ac.**

16. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. Съ 1856 г.; ежегодно одинъ томъ. Издается Schloemilch'омъ вмѣстѣ съ другими лицами, съ 1893 г. вмѣстѣ съ Cantor'омъ. Обозначение: **Schloemilch's Ztschr.**

17. *Repertorium der Physik*; съ 1805—1883 г. Carl's Repertorium; съ 1883—1891 г. Exner's Repertorium, всего 27 томовъ. Обозначение: **Repert. d. Phys.**

18. *Zeitschrift für physikalische Chemie*, Leipzig. Въ 1896 году вышелъ т. 19. Обозначение: **Ztschr. phys. Ch.**

19. *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, Berlin. Съ 1881 г.; въ 1896 г. вышелъ т. 16. Обозначение: **Instr**

20. *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft*, Berlin. Съ 1868 г.; въ 1896 г. вышелъ т. 29. Обозначение: **Chem Ber.**

21. *Die Fortschritte der Physik*, Berlin. Выходить неправильно за предыдущіе годы. Въ 1895 г. вышли части, относящіяся къ 1893 г. (49-й годъ изданія). Обозначение: **Fortschr.**

22. *Archives des sciences physiques et naturelles*, Женева. Выходить сериями (periodes). Въ 1896 г. началась серия 4-ая. Обозначение: **Arch. sc. phys**

23. *The Philosophical Magazine and Journal of Science*, London. Съ 1798 г.; выходить сериями. Съ 1830 г. подъ названіемъ *The London and*

Edinburg Phil. Mag. и т. д. Въ 1876 г. началась серия 5-ая; ежегодно два тома. Въ 1896 г. вышли томы 43 и 44. Обозначение: **Phil. Mag**

24. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Съ 1665 г. Въ 1896 г. вышелъ т. 187. Ежегодно 1 или 2 тома. Обозначение: **Trans. R Soc**

25. *Proceedings of the Royal Society of London*. Съ 1832 г. Въ 1896 г. вышелъ т. 56. Обозначение: **Proc. R. Soc.**

26. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*. Съ 1822 г., выходить неправильно. Обозначение: **Trans. Cambr. Soc.**

27. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Съ 1866 г.; выходить неправильно. Обозначение: **Proc. Cambr. Soc.**

28. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*. Съ 1788 г.; выходить неправильно. Обозначение: **Trans. Edinb. Soc.**

29. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. Съ 1835 г.; выходить неправильно. Обозначение: **Proc. Edinb. Soc.**

30. *Report of the British Association for the Advancement of Science*. Съ 1833 г. Ежегодно одинъ томъ за годъ предыдущій съ обозначеніемъ года, гдѣ состоялся слѣздъ. Въ 1896 г. вышелъ т. 65. Обозначение: **Report.**

31. *Atti della Reale Accademia del Lincei*. Roma. Съ 1847 г. Выходить сериями. Въ 1892 г. началась серия 5-ая. Обозначение: **Atti Ac. del Lincei.**

32. *Il nuovo Cimento*. Pisa. Съ 1855 г. Ежегодно два тома; въ 1896 г. вышли т. 39 и 40. Обозначение: **Nuov. Cim.**

33. *Memorie della Accademia della scienze dell' Instituto di Bologna*. Съ 1850 г.; выходить сериями; ежегодно одинъ томъ. Въ 1890 г. началась 5-ая серия. Обозначение: **Mém. d. Bologna.**

34. *Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani*. Съ 1872 г.; ежегодно одинъ томъ. Обозначение: **Spectr. Ital.**

35. *The American Journal of Science and Arts*. Иногда называется *Silliman's Journal*. Съ 1849 г. Выходить сериями; въ 1896 г. началась серия 4-ая. Обозначение: **Sill. J. или Amer. J. of Sc**

36. *Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia*. Съ 1840 г.; ежегодно одинъ томъ. Обозначение: **Proc. Phil. Soc. of Philad.**

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

МЕХАНИКА.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Движеніе.

§ 1. Вступленіе. Механикою называется учение о движении физических тѣлъ и о тѣхъ причинахъ, отъ которыхъ можетъ зависеть характеръ этого движения въ различныхъ частныхъ случаяхъ. Въ настоящее время механика, разросшаяся въ весьма обширную науку, составляетъ отдѣльный предметъ преподаванія и ей посвящены многочисленные специальные учебники и курсы. Въ этомъ, второмъ, отдѣлѣ нашего курса мы, не гонясь за полнотою, рассмотримъ исключительно только тѣ вопросы механики, къ которымъ намъ въ послѣдующемъ придется обращаться неоднократно и безъ предварительнаго, своевременнаго изученія которыхъ нѣтъ возможности разобратъ въ такихъ явленіяхъ или теоріяхъ, которыя, по своему характеру, должны быть включены въ курсъ физики.

Въ главѣ I мы рассмотримъ нѣкоторые свойства движенія, не затрогивая вовсе вопроса о причинахъ, которыми это движеніе вызывается.

Прежде чѣмъ говорить о движеніи физическихъ тѣлъ, разные части котораго могутъ, въ одинъ и тотъ же моментъ, обладать различными движеніями, мы обратимся къ болѣе простому случаю — къ движенію материальной точки.

Материальной точкѣ мы приписываемъ слѣдующія свойства:

1. Материальная точка способна двигаться т.-е. мѣнять свое положеніе въ пространствѣ.
2. Она содержитъ нѣкоторое количество матеріи.
3. Она подвержена воздѣйствію остального міра.

Никаких других свойств мы пока не приписываемъ матеріальной точкѣ и, прежде всего, мы не обращаемъ вниманія на ея протяженность, хотя можетъ показаться, что это противорѣчитъ тому, что она содержитъ матерію. Однако, мы предполагаемъ, что матерія, сосредоточенная около матеріальной точки, занимаетъ столь малое пространство, что всѣ части этой матеріи, ни по свойствамъ, ни по характеру движенія другъ отъ друга не отличаются. Поэтому и не приходится разсматривать протяженности матеріальной точки и мы можемъ допустить, что она этимъ свойствомъ не обладаетъ вовсе. Неизмѣняемою системою точекъ называется совокупность произвольнаго числа матеріальныхъ точекъ, которыя могутъ двигаться только съ соблюденіемъ условия неизмѣнности взаимныхъ ихъ разстояній.

Всякое физическое тѣло можетъ быть раздѣлено мысленно на безконечное число безконечно малыхъ) элементовъ, изъ которыхъ каждый можетъ быть принятъ за матеріальную точку, между тѣмъ, какъ элементъ геометрическаго тѣла, поистинѣ, не можетъ быть принятъ за точку геометрическую. Эта разница является слѣдствіемъ того, что матеріальная точка содержитъ матерію, по существу не могущую не занимать пространства.

Въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ физики (въ теоріи упругости и др.) приходится разсматривать элементы физическаго тѣла, изъ которыхъ каждый обладаетъ нѣсколько одинаковыми свойствами или движеніями во всѣхъ своихъ геометрическихъ точкахъ. Такой «элементъ» уже не можетъ быть уподобленъ матеріальной точкѣ.

Физическія тѣла не представляютъ неизмѣнныхъ системъ матеріальныхъ точекъ. Это весьма важное обстоятельство, показывающее, что результаты изученія свойствъ неизмѣнной системы не приложимы, безъ надлежащихъ оговорокъ, къ физическимъ тѣламъ.

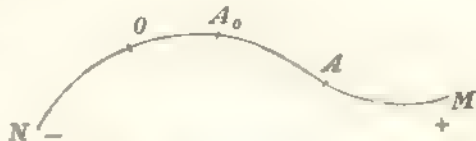
Мы разсмотримъ, прежде всего, движеніе матеріальной точки.

§ 2. Скорость. Изучая движеніе точки, мы имѣемъ дѣло, прежде всего, съ траекторіей, пройденнымъ путемъ, временемъ и направлениемъ движенія.

Траекторіей называется та линія, по которой совершается движеніе. Смотри по роду траекторіи, отличаютъ движенія прямолинейное и криволинейное.

Пройденный путь имѣетъ въ механикѣ значеніе, не всегда совпадающее съ букввальнымъ смысломъ этого термина. Положимъ, что движеніе совершается по нѣкоторой линіи MM (рис. 10), извѣстной намъ по ея геометрическому характеру (прямая, кругъ, эллипсъ и т. д.). Выберемъ на этой линіи произвольную точку O , отъ которой мы, вдоль самой линіи, будемъ

Рис. 10.



¹⁾ Безконечно малую называется такая переменная величина, которая имѣетъ своимъ предѣломъ нуль.

измѣрять расстоянія $s = OA$ точек A на линіи. Величину s будемъ считать положительною въ одну сторону, напр. въ сторону OM , и отрицательною въ другую. Когда точка движется по линіи NM , то переменное ея расстояние отъ O , т.-е. величину s мы и будемъ называть «пройденнымъ путемъ». Если точка начинаетъ свое движеніе отъ O и все время движется въ одномъ направленіи, то s представляетъ пройденный путь въ буквальномъ смыслѣ слова. Если движеніе начинается отъ некоторой точки A , то $s = OA$ называется начальнымъ значеніемъ пути. Когда точка, удалившись отъ O , вновь станетъ къ нему приближаться, то «путь» s уменьшится. Точка имѣетъ положительное направленіе движенія, когда положительное s увеличивается или отрицательное по абсолютному значенію уменьшается, при отрицательномъ направленіи движенія имѣетъ обратное.

Время t считается отъ какого-либо момента; какому позднѣйшему моменту соответствуетъ определенное значеніе времени t . Два момента времени t_1 и t_2 определяютъ промежутокъ времени $t_2 - t_1$, который можно также обозначать черезъ t , подобно тому, какъ и соответствующій ему путь $s_2 - s_1$ иногда будемъ обозначать черезъ s . Начальному пути s_1 соответствуетъ вообще некоторое начальное значеніе t времени.

Путь s вообще представляетъ некоторую функцію времени t , что символически пишется такъ:

$$s = f(t). \quad (1)$$

Простейшія случаи движенія точки по произвольной траекторіи мы имѣемъ, когда

$$s = s_0 + at \quad (2)$$

гдѣ s_0 начальное значеніе пути s , a некоторый коэффициентъ, который равенъ пути, пройденному въ единицу времени, т. е., точнѣе, a есть число, равное числу линейныхъ единицъ, содержащихся въ этомъ пути. Въ случаѣ, къ которому относится формула (2), пути, пройденные въ произвольные, равные промежутки времени, равны между собою. Такое движеніе называется равномернымъ.

Скорость равномернаго движенія есть понятие первоначальное (стр. 11), не поддающееся опредѣленію и въ такомъ же неладномъ. Мы называемъ скоростью равномернаго движенія величину пропорціональную пути s , пройденному въ данное время t и обратно пропорціональную времени t , потребному для прохожденія опредѣленнаго пути. За единицу скорости возьмемъ скорость какого-нибудь равномернаго движенія, численное значеніе v всякой другой скорости выразится формулою

$$v = C \frac{s}{t} \quad (3)$$

гдѣ путь s былъ фактически пройденъ за промежутокъ времени t . Полагая коэффициентъ C равнымъ единицѣ ($C = 1$), мы должны за единицу скорости

принять скорость такого движения, при которомъ въ единицу времени была пройдена единица длины; тогда

$$v = \frac{s}{t} \dots \dots \dots (4)$$

Пользуясь формулою (2), мы должны написать, вмѣсто (3) или (4),

$$v = C \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \text{ или } v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Формула (2) даетъ $s_2 - s_1 = a(t_2 - t_1)$, а слѣд.

$$v = a \dots \dots \dots (5)$$

Эта формула показываетъ, что при $C=1$, т.-е. при указанномъ выборѣ единицы скорости, скорость равномернаго движения численно равна пути, пройденному въ единицу времени, т.-е. она «измѣряется» этимъ путемъ см. стр. 23 (но не скорость равна пути и т. д., скорость есть величина sui generis и потому не можетъ равняться пути).

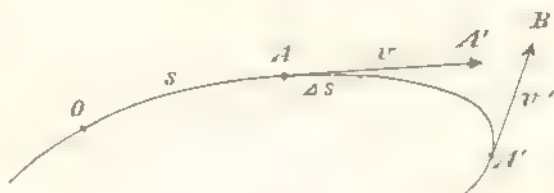
При неравномерномъ движеніи, когда $s=f(t)$, гдѣ f символъ какой-либо зависимости, средняя скорость v_m , т.-е. скорость точки, равномерно проходящей одинаковый съ данной точкою путь въ одинаковое съ нею время, опредѣляется формулою

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s}{t} \dots \dots \dots (6)$$

Понятіе о скорости въ данный моментъ t при криволинейномъ движеніи не есть понятіе первоначальное и нуждается въ опредѣленіи. Поло-

Рис. 11.

жимъ, что въ малый промежутокъ времени Δt , слѣдующій послѣ момента времени t , точка прошла малый путь Δs (рис. 11), положительный или отрицательный, смотря по направленію движенія. Въ такомъ случаѣ отношеніе $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ даетъ среднюю скорость v_m за малый промежутокъ времени Δt . Предѣлъ, къ которому стремится эта средняя скорость при безконечномъ убываніи промежутка времени Δt и называется скоростью v въ данный моментъ. Итакъ мы имѣемъ



$$v = \text{пред. } v_m = \text{пред. } \frac{\Delta s}{\Delta t} \dots \dots \dots (7)$$

На основаніи формулы (40), стр. 39. и введенныхъ тамъ обозначеній термина, мы можемъ сказать, что

$$\begin{aligned} \text{если} & \quad s = f(t) \quad \} \\ \text{то} & \quad v = f'(t) \quad \} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

т. е. «скорость есть производная пути по времени».

Если напр. $s = 4t^3 - 7t^2 + 5t^2$, то $v = 20t^2 - 21t^2 + 10t$ см. форм. (42) стр. 38. Если

$$\left. \begin{aligned} s &= at + bt^2 \\ v &= a + 2bt \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

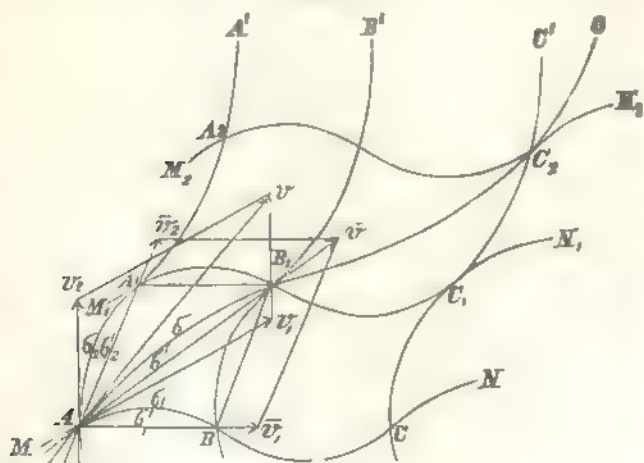
Скорость имѣетъ знакъ величины Δs , т.-е. она положительная или отрицательная, смотря по тому, движется-ли точка въ сторону положительныхъ (возрастающихъ) или отрицательныхъ (убывающихъ) величинъ s . За направление средней скорости $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ можно принять направление весьма малой хорды дуги Δs , направление скорости v въ данный моментъ есть направление касательной къ траектории.

Направление скорости совпадаетъ, такимъ образомъ, съ направлениемъ самаго движенія.

Скорость, имѣя направление, есть векторъ и потому (см. стр. 25 и 41) можетъ быть изображена стрѣлкою, длина которой содержитъ столько единицъ длины, сколько въ изображаемой скорости единицъ скорости. На рис. 11 изображены случаи, когда точка, находясь въ A , обладаетъ положительною скоростью v ; находясь въ A' , ея скорость отрицательна и по величинѣ изображена стрѣлкою v' .

§ 3. Сложеніе скоростей. Положимъ, что нѣкоторая точка движется по кривой MN (рис. 12) и что въ то-же время сама кривая перемѣщается

Рис. 12.



параллельно самой себѣ, такъ что всѣ ея геометрическія точки движутся по одинаковымъ кривымъ AA' , BB' , CC' и т. д., параллельнымъ между собою. Въ этомъ случаѣ наша точка обладаетъ двумя движеніями: одно вдоль кривой MN , другое вмѣстѣ съ этой кривой. Чтобы узнать, каково истинное движеніе точки, заключающееся изъ этихъ двухъ, построимъ для ряда различныхъ моментовъ времени положенія этой точки. Положимъ, что она сперва находится въ A : черезъ нѣкоторое время t она перемѣстилась по кривой MN въ B ; но въ это время сама кривая MN приняла положеніе M_1N_1 , а геометрическая ея точка B перешла въ B_1 ; это и будетъ истинное новое положеніе разсматриваемой двигающейся точки во время t_1 . Подобнымъ же образомъ находимъ ея положеніе C_2 въ другой моментъ времени t_2 . Ука-

заннымъ способомъ мы можемъ построить большое число положений, занимаемыхъ нашей точкой въ разные моменты времени. Соединяя эти точки прямыми, получаемъ нѣкоторую ломаную линию. Если увеличивать (мысленно) безпредѣльно число построенныхъ такимъ способомъ положений нашей точки, то ломанная линия будетъ приближаться къ нѣкоторому предѣлу, который представится въ видѣ нѣкоторой кривой линии AB, C_1O , истинной траектории точки въ ея т. наз. составномъ движеніи. Опредѣлимъ скорость v движенія точки по этой кривой для какого-либо даннаго момента напр. для момента, когда наша точка находится въ A . Скорость v_1 движенія вдоль AN и скорость v_2 движенія вдоль AA' мы считаемъ извѣстными. Пусть теперь, на рис. 12, AB обозначаетъ тотъ малый путь $s_1 = \Delta s_1$, который проходитъ точка въ малое время Δt , въ это же время AN переходитъ въ A_1N_1 , такъ что дуга $AA_1 = s_2 = \Delta s_2$ представляетъ путь, пройденный во второмъ изъ двухъ слагаемыхъ движеній. Истинный путь, пройденный точкою во время Δt изобразится дугою $AB_1 = s = \Delta s$. Хорды s_1', s_2' и s' трехъ указанныхъ дугъ составляютъ двѣ стороны и диагональ параллелограмма AA_1B_1B .

Три среднія скорости двухъ слагаемыхъ и одного составнаго движенія численно равны дугамъ s_1, s_2 и s , дѣленнымъ на Δt . Намъ остается найти три скорости въ точкѣ A , мы будемъ искать предѣлы этихъ трехъ дробей. Изъ начала теории предѣловъ извѣстно, что въ случаяхъ, подобныхъ разобраемому, мы можемъ дуги замѣнить хордами и написать для трехъ среднихъ скоростей, которые обозначимъ черезъ v_1, v_2 и v

$$v_1 = \frac{s_1'}{\Delta t}, \quad v_2 = \frac{s_2'}{\Delta t}, \quad v = \frac{s'}{\Delta t} \dots \dots \dots (10)$$

По направленію эти три скорости совпадаютъ съ соответствующими хордами, какъ показано на рис. 12, а такъ какъ онѣ по величинѣ пропорциональны этимъ хордамъ, см. (10), то ясно, что стрѣлки v_1, v_2 и v , изображающія эти скорости, также составляютъ двѣ стороны и диагональ параллелограмма. При безконечномъ уменьшеніи времени Δt три среднія скорости будутъ приближаться къ тремъ предѣламъ, которые представляютъ не что иное, какъ двѣ скорости v_1 и v_2 слагаемыхъ и скорость v составнаго движенія. По направленію эти три скорости опредѣляются касательными въ точкѣ A къ тремъ кривымъ двухъ слагаемыхъ и составнаго движенія. По величинѣ онѣ должны обладать тѣмъ свойствомъ, которымъ обладаютъ три среднія скорости (10) при всякомъ, произвольно маломъ значеніи времени Δt , т. е. составная скорость v въ каждый данный моментъ по величинѣ и по направленію опредѣляется диагональю параллелограмма, построеннаго на двухъ слагаемыхъ скоростяхъ.

Полученный результатъ можно обобщить и послѣдовательнымъ построениемъ найти скорость составнаго движенія, получающагося какъ результатъ трехъ и большаго числа слагаемыхъ движеній, для возможности одновременнаго существованія которыхъ не трудно подобрать физическія условія. Данную скорость v всегда можно разсматривать, какъ составную и на безконечное число манеръ «разложить» ее на двѣ или большее

$ABCD$; сторона AD и определить скорость Δc . Продолжив AB до величины $AG = AC = c'$, соединив точки G и C и проводя $DF \parallel CG$, мы можем скорость $\Delta c = AD$ разложить на две скорости, которые символически обозначим через $\Delta_1 c = AF = BG$ и $\Delta_2 c = AE = GC$. Из них $\Delta_1 c$ вызывает изменение скорости только по величине, а $\Delta_2 c$ — только по направлению; $\Delta_1 c$ есть алгебраическое, $\Delta_2 c$ — геометрическое приращение скорости c , см. стр. 42.

Обратимся сперва къ случаю прямолинейнаго движенія, при которомъ скорость мѣняется только по величинѣ. Простѣйшій случай такого движенія мы имѣемъ, когда скорость v въ зависимости отъ времени t выражается формулою

$$v = v_0 + bt, \quad (14)$$

въ которой v_0 , т. наз. начальная скорость, соответствуетъ скорости въ моментъ $t = 0$. При такомъ движеніи, называемомъ равнопеременнымъ, скорости прибрѣтаетъ въ произвольные равные промежутки времени одинаковыя приращенія, которыя, смотря по знаку коэффициента b , могутъ быть положительныя или отрицательныя. Формула (14) показываетъ, что b равно численному значенію скорости, прибрѣтенной въ единицу времени. Мы можемъ написать

$$b = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} (15)$$

гдѣ $v_1 = v_0 + bt_1$ и $v_2 = v_0 + bt_2$ суть скорости въ моменты времени t_1 и t_2 . Если прибрѣтенную скорость $v_2 - v_1$ обозначить просто черезъ v , а промежутокъ времени просто черезъ t , то получается

$$b = \frac{v}{t} (16)$$

откуда еще яснѣе усматривается выше приведенное значеніе числа b .

Ускореніе равнопеременнаго прямолинейнаго движенія есть величина своего рода (*sci genus*), служащая характеристикой или мѣрою степени измѣняемости скорости. Она слѣдовательно пропорціональна скорости v , прибрѣтенной (или потерянной) за данный промежутокъ времени t и обратно пропорціональна времени t , потребнаго для измѣненія скорости на данную величину v . За единицу ускоренія мы можемъ принять ускореніе какого-либо равнопеременнаго движенія. Тогда численное значеніе u ускоренія въ произвольномъ случаѣ равнопеременнаго прямолинейнаго движенія выразится формулою

$$u = C \frac{v}{t}, \quad (17)$$

въ которой C равно численному значенію ускоренія такого движенія, при которомъ въ единицу времени прибрѣтается единица скорости. Принимая $C = 1$, т.-е. полагая

$$u = \frac{v}{t} (18)$$

мы за единицу ускорения уже непременно должны принять ускорение такого движения, при которомъ въ единицу времени приобретается единица скорости. Сравнивая (18) съ (16), мы находимъ, что

$$a = b. \quad (19)$$

Это показываетъ (см. стр. 23), что если въ общей формулѣ (17) положить $C = 1$, то ускореніе будетъ измѣряться скоростью, приобретенною въ единицу времени. Мы всегда и будемъ полагать $C = 1$, т.-е. примемъ формулу (18). Въ этомъ случаѣ мы вмѣсто (14), можемъ положить

$$v = v_0 + at, \quad (20)$$

Формулы (9) на стр. 52 показываютъ, что въ томъ случаѣ пройденный путь выразится формулою

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2, \quad (21)$$

причемъ разстоянія s считаются отъ той точки, въ которой находится движущаяся точка во времени $t = 0$, обладая скоростью v_0 . Движеніе, определяющееся формулами (20) и (21), называется равноускореннымъ, при a положительномъ и равнозамедленнымъ, при a отрицательномъ.

Для двухъ моментовъ времени t_1 и t_2 мы имѣемъ скорости $v_1 = v_0 + at_1$ и $v_2 = v_0 + at_2$ и пройденные пути $s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} at_1^2$ и $s_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} at_2^2$. Эти формулы даютъ немедленно

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(s_2 - s_1).$$

Обозначая пройденный путь $s_2 - s_1$ просто буквою s , получаемъ

$$v_2^2 - v_1^2 = 2as \quad (22)$$

т.-е. при равнопеременномъ движеніи измѣненіе квадрата скорости за нѣкоторый промежутокъ времени равно удвоенному произведенію ускоренія на путь, пройденный въ это же время. При $v_0 = 0$ имѣемъ

$$\left. \begin{aligned} v &= at \\ s &= \frac{1}{2} at^2 \end{aligned} \right\} \quad (22.a)$$

откуда, исключивъ t ,

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{2as} \\ s &= \frac{v^2}{2a} \end{aligned} \right\} \quad (22.b)$$

Случай равнозамедленного движенія выражается формулами

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 - at \\ s &= v_0 t - \frac{1}{2} at^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

если ускорение обозначить через w . Вместо (22) имеем теперь

$$v^2 - v_0^2 = 2as \quad (24)$$

Точка, движущаяся равнозамедлительно съ начальной скоростью v , и съ ускорением $-w$ остановится во время T , определяющемся изъ уравненія $v = v_0 - wT = 0$, откуда

$$T = \frac{v_0}{w} \quad (24.a)$$

Подставляя это T вместо t въ выражение (23) для s , получаемъ для всего пути S , пройденнаго точкою отъ момента, когда она обладала скоростью v_0 , до момента остановки

$$S = \frac{v^2}{2w} \quad (24.b)$$

§ 5. Ускореніе при произвольномъ прямолинейномъ движеніи. Въ произвольномъ прямолинейномъ движеніи скорость есть некоторая функция времени t ; обозначимъ ее черезъ

$$v = v(t) \quad (25)$$

Въ этомъ случаѣ мы можемъ говорить о среднемъ ускореніи w_m за промежутокъ времени между моментами t_1 и t_2 , которымъ соответствуютъ скорости v_1 и v_2 , оно равно ускоренію точки, движущейся равнопеременно и приобретающей скорость $v_2 - v_1$ во время $t_2 - t_1$, т.-е.

$$w_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

если приобретенную скорость и промежутокъ времени обозначить просто черезъ v и t .

Отъ среднего ускоренія мы можемъ перейти къ ускоренію въ данный моментъ t . Положимъ, что въ малый промежутокъ времени Δt скорость v изменяется на величину Δv . Тогда $w_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ среднее ускореніе за малый промежутокъ времени Δt . Предѣлъ, къ которому стремится это среднее ускореніе при безконечномъ убываніи времени Δt и составляетъ ускореніе w въ данный моментъ. Итакъ

$$w = \text{пред. } w_m = \text{пред. } \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (26)$$

Форм. (40) стр. 37 показываетъ, что если $v = \varphi(t)$, то

$$w = \varphi'(t) \quad (27)$$

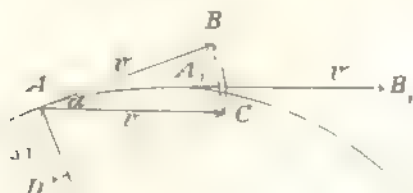
т.-е. ускореніе при прямолинейномъ движеніи есть производная скорости по времени. На основаніи форм. (42) стр. 38 имеемъ, напр.

если $v = 7t^3 - 8t^2 + 5t$, то ускорение $a = 28t^2 - 24t + 5$. Если $v = bt^2$, то $w = 2bt$.

Ускорение a прямолинейного движения имеет направление приращения Δv скорости. Отсюда следует, что ускорение положительное, когда скорость положительная растет или когда скорость отрицательная (стр. 52) по абсолютной величине убывает. Наоборот ускорение отрицательное, когда положительная скорость убывает или отрицательная по абсолютной величине растет. Иначе можно так выразиться: ускорение имеет направление движения, когда скорость по абсолютной величине растет, она имеет направление, противоположное направлению движения, когда эта скорость убывает.

§ 6. Ускорение при криволинейном движении. Рассмотрим сперва случай равномерного криволинейного движения, при котором скорость v , оставаясь постоянною по величине, меняется только по направлению. Положим, что точка движется по плоской кривой MN (рис. 14),

Рис. 14.



M

N

 \vec{v}_m

обладая в A скоростью $v = AB$. Через время Δt , пройдя путь $AA_1 = \Delta s$, она в точке A_1 будет обладать скоростью $v = A_1B_1$. Проведя $AC \parallel A_1B_1$ и по величине $AC = A_1B_1 = v$, мы видим, что скорость v получила во время Δt приращение $\Delta v = AD = BC$. Среднее ускорение w_m и здесь равно

$$w_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{AD}{\Delta t} = \frac{BC}{\Delta t}. \quad (28)$$

При бесконечном уменьшении времени Δt , среднее ускорение w_m будет приближаться к некоторому предельному, который и есть ускорение a в данный момент. Для определения этого предельного мы опишем из A , как центра, дугу BC радиусом $r = AB$ и преобразуем (28), полагая $\angle BAC = \alpha$, так что $\text{ch } BC = r\alpha$ см. (35) стр. 36:

$$w_m = \frac{BC}{\Delta t} = \frac{\text{ch } BC}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{BC}{\text{ch } BC} = r \frac{\alpha}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{BC}{\text{ch } BC} \dots \quad (29)$$

Переходя к предельному, мы имеем пред. $\frac{BC}{\text{ch } BC} = 1$; пред. $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ см. (7) стр. 51 и пред. $\frac{\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}$, где R радиус кривизны кривой в точке A см. (50) стр. 41. Таким образом мы получаем

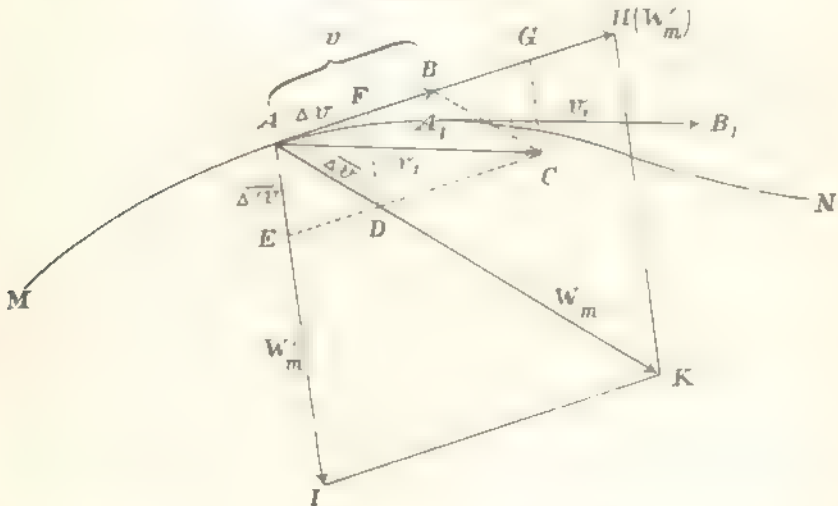
$$w = \text{пред. } w_m = \frac{v^2}{R} \dots \dots \dots (30)$$

Направление ускорения a определяется следующим образом: $a_m \parallel BC$; но линия BC , как основание равнобедренного треугольника, составляет равные углы со сторонами AB и AC . Предельный угол есть нуль, а потому $\angle ABC$ бесконечно приближается к прямому; среднее ускорение a_m , будучи параллельно BC , в предельном случае перпендикулярно AB . Отсюда следует, что ускорение a перпендикулярно к касательной AB , т. е. имѣет направление нормали въ точку A къ кривой MX .

При криволинейномъ равномерномъ движеніи ускорение, въ каждый данный моментъ, направлено по нормали къ кривой и по величинѣ равно $\frac{v^2}{R}$, т. е. его численное значение равно численному значенію квадрата скорости, дѣленному на численное значение радиуса кривизны.

Переходимъ къ общему случаю неравномернаго криволинейнаго движенія. Положимъ, что точка обладаетъ въ A (рис. 15) скоростью $v = AB$

Рис. 15.



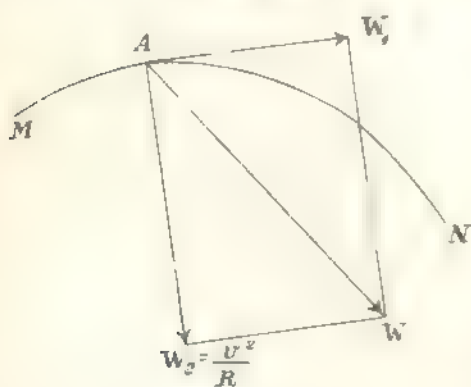
и спустя время Δt въ A_1 скоростью $v_1 = A_1B_1$. Проведемъ AC равно и параллельно A_1B_1 , мы видимъ, что приобретенная скорость $\overline{\Delta v} = AD = BC$. Отсюда среднее ускорение $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{AD}{\Delta t} = AK$. Дѣлается $AG = AC = A_1B_1 = v_1$, проводимъ $DF \parallel CG$ и разлагаемъ $\Delta v = AD$ на двѣ скорости $\Delta v' = AF = BG$ и $\Delta v'' = AE = CG$: изъ нихъ первая вызываетъ алгебраическое измѣненіе скорости, т. е. измѣненіе по величинѣ ($\Delta v' = v_1 - v$), вторая — геометрическое измѣненіе скорости, т. е. измѣненіе по направленію. Соответственно получаемъ среднее ускорение $a'_m = \frac{\Delta v'}{\Delta t} = \frac{AF}{\Delta t} = AH$, которое служить мѣрою средней измѣняемости скорости по величинѣ и среднее уско-

рение $w''_m = \frac{\Delta' v}{\Delta t} - \frac{\Delta E}{\Delta t} = AJ$, которое определяет собою среднюю изменчивость скорости по направлению. Такъ какъ три величины $w_m = AK$, $w'_m = AN$ и $w''_m = AJ$ пропорциональны линиямъ AD , AE и AE , то ясно, что w_m определяется диагональю параллелограмма, построеннаго на w'_m и w''_m . При безконечномъ уменьшеніи времени Δt , три средня ускоренія будутъ стремиться къ предѣльнымъ направлениямъ и значениямъ, которые обозначимъ черезъ w , w_1 , w_2 . Притомъ

$$\left. \begin{aligned} w &= \text{пред. } \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ w_1 &= \text{пред. } \frac{\Delta' v}{\Delta t} \\ w_2 &= \text{пред. } \frac{\Delta'' v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (81)$$

Здѣсь $\overline{\Delta v}$ истинное, т.-е. геометрическое приращеніе скорости (стр. 54), $\Delta' v$ алгебраическое ея приращеніе; наконецъ приращеніе $\Delta'' v$ вполне соответствуетъ величинѣ $\Delta v = AD$ рис. 13-го, а само ускореніе w величинѣ w въ формулахъ (29) и (30). По направленію, w_1 совпадаетъ съ касательной

Рис 16



въ точкѣ 4, а w_2 съ нормалью въ той же точкѣ, отсюда слѣдуетъ, что ускоренія w_1 и w_2 взаимно перпендикулярны. Изъ нихъ первое называется тангенціальнымъ ускореніемъ, а второе—нормальнымъ. Мы видѣли, что w_m есть диагональ параллелограмма, построеннаго на w'_m и w''_m . Это должно оставаться вѣрнымъ, какъ бы мало ни было Δt , слѣд. и въ предѣлѣ. Но въ предѣлѣ $\angle HAJ = \frac{\pi}{2}$ и параллелограммъ превращается въ прямоугольникъ. Изъ всего сказаннаго получается такой результатъ:

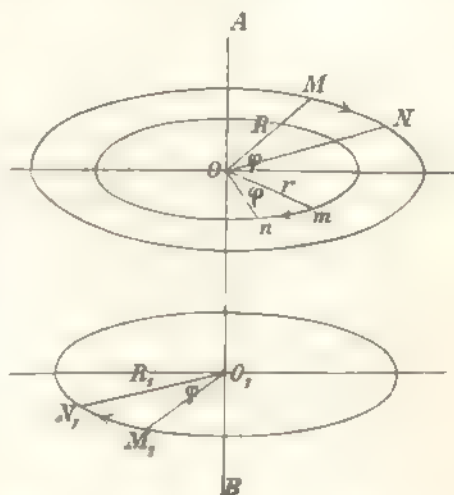
При криволинейномъ, неравнообразномъ движеніи точка обладаетъ въ каждый данный моментъ нѣкоторымъ ускореніемъ w , вообще составляющимъ нѣкоторый уголъ съ направлениемъ движенія и служащимъ мѣрою полной изменчивости скорости. Ускореніе w , рис. 16, можетъ быть геометрически разложено на ускореніе тангенціальное w_1 , направленное по касательной и на ускореніе нормальное w_2 , перпендикулярное къ направленію движенія и равное $\frac{v^2}{R}$, гдѣ R радиусъ кривизны въ данной точкѣ. Ускоренія w_1 и w_2 соответственно служатъ мѣрою изменчивости скорости по величинѣ и по направленію.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\left(\text{пред. } \frac{\Delta t}{\Delta t}\right)^2 \cdot \frac{r^4}{R^2}} \dots (32)$$

§ 7. Движеніе вращательное. Неизмѣнная система точекъ или, какъ мы для краткости будемъ говорить, «тѣло» (хотя, какъ мы видѣли на стр. 49 физическое тѣло не представляетъ примѣра неизмѣнной системы) можетъ обладать весьма различными движеніями, изъ которыхъ мы однако здѣсь рассмотримъ только одно, а именно движеніе вращательное. Оно характеризуется слѣдующимъ образомъ. Дана прямая линія AB (рис. 17), которая называется осью вращенія. Всѣ точки m, M, M_1 и т. д. движутся по кругамъ, плоскости которыхъ перпендикулярны къ оси вращенія и центры которыхъ лежатъ на этой оси. Всѣ радиусы Om, OM, O_1M_1 и т. д. поворачиваются въ одинъ и тотъ же промежутокъ времени на одинъ и тотъ же уголъ $\varphi = \angle mOn = \angle MON = \angle M_1O_1N_1$ и т. д. Если считать уголъ φ отъ нѣкотораго начальнаго положенія радиусовъ (перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ движущихся точекъ на ось вращенія), то, вообще говоря, этотъ уголъ представится нѣкоторою функциею времени. Положимъ,

Рис. 17.



$$\varphi = F(t) \dots (33)$$

Путь s , пройденный точкою, равенъ

$$s = r\varphi \dots (34)$$

гдѣ r радиусъ круга, описываемаго точкою, см. (35) стр. 36.

Простейшій случай вращенія тотъ, когда

$$\varphi = at \dots (35)$$

гдѣ a постоянное число, равное углу, на который система поворачивается въ единицу времени. Такое вращеніе называется равномернымъ. Путь s , пройденный точкою, равенъ, въ этомъ случаѣ

$$s = r\varphi = rat \dots (36)$$

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ точки системы движутся равномерно. Скорость v этого движенія равна

$$v = ra \dots (37)$$

Скорости различных точек системы пропорциональны или расстояниям от оси. Точки самой оси неподвижны.

Обозначим через T время полного оборота системы около оси; в течение этого времени φ увеличивается на 2π . Формула (35) дает $2\pi = aT$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Подставив сюда вместо a его величину, взятую из (37), имеем $2\pi r = vT$ (проще из $s = vt$), откуда

$$v = \frac{2\pi r}{T} \text{ и } T = \frac{2\pi r}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Быстрота вращения характеризуется особой величиною (*sní generis*), называемую угловою скоростью. Она пропорциональна углу φ , на который система поворачивается в данный промежуток времени t и обратно пропорциональна времени t , потребному для поворота системы на данный угол φ . За единицу угловой скорости можно принять угловую скорость какого-либо равномерного вращения, хотя бы, напр., вращения земли. Из сказанного следует, что численное значение θ угловой скорости, вообще, определяется формулою:

$$\theta = C \frac{\varphi}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Положив $C = 1$, мы за единицу угловой скорости уже непременно должны принять угловую скорость такого движения, при котором система в единицу времени поворачивается на единицу угла ($57^{\circ}.29...$ стр. 36). В этом случае имеем, см. (35),

$$\theta = \frac{\varphi}{t} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Угловая скорость измеряется углом, на который система поворачивается в единицу времени. Если секунду принять за единицу времени, то угловая скорость вращения земли равна

$$\theta = \frac{2\pi}{24.60.60} = 0,0000764.$$

Формула (37) дает

$$v = r\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Точка, находящаяся на единице расстояния от оси ($r = 1$), обладает скоростью v , которая численно равна a , см. (37). Теперь (41) дает

$$\theta = v.$$

Угловая скорость измеряется также скоростью точки, находящейся на единице расстояния от оси вращения.

Угловая скорость, смотря по направлению вращения, может быть положительная или отрицательная.

При неравномерном вращении, когда $\varphi = F(t)$, (см. 4.33), средняя угловая скорость $\theta_m = \frac{\varphi}{t}$; средняя угловая скорость за малый промежуток времени Δt , в течение которого система повернулась на малый угол $\Delta\varphi$, равна $\theta_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Предель этой величины, т. е.

[illegible]

называется угловой скоростью в данный момент. Мы видим, что угловая скорость есть производная угла поворота φ по времени. Если напр., $\varphi = bt^3 - ct^2$, то $\dot{\varphi} = 3bt^2 - 2ct$.

Точка, находящаяся на расстоянии r от осп, проходить во времени Δt путь $\Delta s = r\Delta\varphi$. След. его скорость v равна

$$v = \text{пред.} \frac{\Delta g}{\Delta t} = \text{пред.} \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = r \text{ пред.} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

14.111

[illegible]

При $r=1$ имѣемъ, какъ и выше, $\theta = \dots$

Равнопеременным вращением называется такое, при котором угловая скорость θ в одинаковые промежутки времени меняется на одну и ту же, положительную или отрицательную, величину. В этом случае θ вращ.

$$t_1 = t_2 = t_3$$

Угловым ускорением $\dot{\theta}$ называется величина (\sin generis), пропорциональная угловой скорости θ , приобретенной за данное время t и обратно пропорциональная времени t , потребному для приобретения данной угловой скорости θ .

Таким образом вообще $\theta = C \frac{q}{t}$. Полагая $C = 1$, мы должны за единицу углового ускорения принять угловое ускорение такого движения, при котором в единицу времени приобретается единица угловой скорости. В этом случае

$$v = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}. \quad (45)$$

В общем случае угловая скорость $\dot{\vartheta}$ есть некоторая функция $\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}(t)$. Понятие об угловом ускорении в данный момент получается следующим образом. Если в течение времени t была приобретена угловая скорость $\dot{\vartheta}$, то $\dot{\vartheta}_m = \frac{\dot{\vartheta}}{t}$ представлять среднее угловое ускорение, а предель средняго углового ускорения за бесконечно малый промежуток времени и есть угловое ускорение $\ddot{\vartheta}$ в данный момент:

$$b) \text{ — } \Pi f^{(n)}(x) = \Pi f^{(n)}(x) \frac{\Delta t}{\Delta t} = f'(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Угловое ускореніе есть производная угловой скорости по времени. Его знакъ зависить отъ знака величины $\Delta\omega$.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

С и л а.

§ 1. Определеіе термина „сила“. На стр. 48 мы указали на одно изъ свойствъ материальной точки, на ея способность подвергаться воздѣйствію остальнаго міра. Такимъ же свойствомъ обладаетъ и система материальныхъ точекъ, а слѣд. и физическое тѣло. Если это воздѣйствіе такого рода, что оно можетъ имѣть послѣдствіемъ измѣненіе скорости по величинѣ или по направленію, вообще появленіе ускоренія, то мы говоримъ, что на тѣло дѣйствуетъ сила. О присутствіи силы можно судить не только по вызванному ею ускоренію въ движеніи тѣла, но и по той внѣшней обстановкѣ, которая окружаетъ это тѣло и при которой, какъ показали прежнія наблюденія, тѣло подвергается дѣйствию силы. Эта обстановка иногда такова, что мы по ея измѣненію можемъ судить о томъ, во сколько разъ увеличилась или уменьшилась сила дѣйствующая на тѣло. Положимъ, что черезъ неподвижный блокъ перекинута нить, къ концамъ которой прикрѣплены вполнѣ одинаковыя тѣла A и B . Если къ тѣлу B прикрѣпимъ тѣло C , то тѣло A приобретаетъ ускореніе, на него дѣйствуетъ сила. Нево что если къ B прикрѣпимъ два, три и т. д. вполнѣ одинаковыя тѣла C , то сила, дѣйствующая на A , увеличится въ два, три и т. д. раза.

Если за веревку, прикрѣпленную къ какому-либо тѣлу A , будутъ тянуть два три работника или двѣ, три лошади, то сила, дѣйствующая на тѣло A удвоится и утроится, если можно считать силы отдѣльныхъ рабочихъ или лошадей вполнѣ между собою равными. Если къ жѣлзу приложить магнитъ, то на жѣлзо будетъ дѣйствовать сила, которая удвоится, если одновременно приложить два магнита (преенебрежамъ второстепенными обстоятельствами).

Такимъ образомъ получается предположеніе о силѣ, какъ о величинѣ и является возможность сравнивать между собою различныя силы и выбрать какую-либо единицу силы. Замѣтимъ уже теперь, что второй законъ движенія, о которомъ будетъ сказано ниже, только и имѣть смыслъ закона (а не определенія термина «сила») если допустить возможность сравненія силъ независимо отъ сравненія вызванныхъ ими дѣйствій.

§ 2. Инерція. Три основныя закона движенія были впервые формулированы Ньютономъ въ его «Principia Philosophiae Naturalis» въ отдѣлѣ Axiomata sive leges motus. Мы по порядку разберемъ эти три закона.

Первый законъ движенія (законъ инерціи или коности) формулированъ Ньютономъ таклгъ образомъ: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Т.-е.: Всякое тѣло сохранять состояние покоя или равномернаго прямолинейнаго движенія, пока дѣйствіе силъ не заставитъ его измѣнить своего состоянія (движенія). Этотъ законъ, выражающій особое свойство матеріи, называемое инерціей или косностью, былъ открытъ Галилеемъ. Онъ говоритъ, что тѣло, представленное самому себѣ, т.-е. не подверженное силамъ, движется прямолинейно и съ постоянною скоростью или остается въ покоѣ.

Законъ инерціи представляетъ непреодолимое затрудненіе разумію, если постараться выискнуть глубже въ его внутренній смыслъ. Въ немъ говорится о прямой линіи; но непонятно, къ какимъ координатнымъ осямъ слѣдуетъ отнести прямую, по которой стало бы двигаться тѣло, не подверженное абсолютно никакимъ силамъ. Весьма интересныя подробности по этому вопросу, о которомъ писали Ньютонъ, Эйлеръ, Кантъ, Махъ и Пейманъ и друг., можно найти въ книгѣ Н. Streintz'a «Die physikalischen Grundlagen der Mechanik», Leipzig 1883.

§ 3. Второй законъ движенія. Законъ инерціи не можетъ быть подтвержденъ опытомъ, мы доходимъ до его познанія на основаніи того, что для всякаго измѣненія скорости нужна наличность силы, съ уменьшеніемъ которой уменьшается и измѣненіе скорости. На вопросъ о связи между силою и ускореніемъ отвѣчаетъ

Законъ II движения Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimatur.

Т.е., изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и имеет то же направление. Под изменением движения следует подразумевать изменение скорости. Слов «vis motrix» следует понимать в особом смысле, недостаточно выраженном термином «движущая сила». В формулировке Ньютона во втором законе еще не упоминается время: само собою разумеется, что сила вызывает тем большее изменение скорости, чем дольше она действовала. Отсюда следует, что изменение скорости пропорционально силе и времени, в течение которого она действовала.

Разделим время на весьма малые части Δt ; пусть f есть сила, действовавшая в течение времени Δt и пусть скорость v точки приобрела в это же время геометрическое приращение (см. стр. 54) Δv . Смысл второго закона тот, что геометрическое приращение Δv скорости пропорционально силе f и времени Δt и имеет направление силы f . Итак $\Delta v = kf\Delta t$ или наоборот

$$|\Delta t| = c|\Delta r|, \quad (1)$$

где k и $c = \frac{1}{k}$ коэффициенты пропорциональности.

Первое следствие изъ закона П. (Законъ независимости дѣйствія силы отъ состоянія тѣла и присутствія другихъ силъ). Второй законъ, называя отъ какихъ величинъ зависитъ приращеніе скорости, въ то же время обладаетъ и т. е. отрицательною стороною,

силы, мы можем сравнить между собою инертности или массы различных тел. Массу какого-либо определенного тела A мы можем выбрать за единицу массы. Обозначая численное значение массы какого-либо другого тела через m , мы видим, что сила f , действующая на это тело, должна быть пропорциональна числу m и числу a , так что можно положить

[illegible]

В эту формулу входят сила, масса и ускорение, из которых каждая может быть измерена своею, вполне произвольною единицею. Коэффициент пропорциональности C равен числу единиц силы, потребных, чтобы единица массы придать единицу ускорения (при $m = 1$ и $a = 1$ имеем $f = C$).

Если мы положим $C=1$, т.е. напомним формулу (4) в виде

$$f \equiv mc^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (7)$$

то произвольно могут быть выбраны уже только две из трех единиц: силы, массы и ускорения. Выбирая произвольно, напр., единицы массы и ускорения, мы за единицу силы уже и непременно должны выбрать силу, которая, действуя на единицу массы, придает ей единицу ускорения. Можно однако поставить и иначе, а именно произвольно выбрать единицы ускорения и силы, в этом случае за единицу массы придется принять массу тела, которое под действием единицы силы приобретает единицу ускорения. Единицы массы получили различные названия. Одна из важнейших единиц массы получила название грамм, по первоначальному определению, это масса кубического сантиметра чистой воды при 4°С. Русские единицы массы суть пуд, фунт, лот, золотник и т. д. Их не следует смешивать с единицами веса, о которых будет сказано ниже и которые имеют те же наименования.

Можно изготовить тела произвольной формы из железа, меди, алюминия, платины или кварца, масса которых равнялась бы одной из принятых единиц массы или определенной его части или его кратному. Такие эталоны или прототипы массы называются прямыми или разновесами; последнее название неправильное, по сути есть именно эталоны массы, а не веса. В Париже хранится эталон из платины, масса которого называется килограммом, тысячная доля этой массы в настоящее время принимается за единицу массы под названием грамм; указывается, что эта единица не вполне отвечает вышерассмотренному теоретическому определению и что кубический сантиметр чистой воды при 4° С обладает массой, несколько большею одного грамма. Масса однородного тела пропорциональна его объему.

Для тѣхъ однородныхъ можно говорить о «количествѣ матеріи» и понятно, что количества матеріи, содержащейся въ тѣлахъ однородныхъ, пропорциональны объемамъ, занимаемымъ этими тѣлами. Отсюда слѣдуетъ, что массы однородныхъ тѣхъ (т. е. тѣхъ, состоящихъ изъ одной и той же матеріи) пропорциональны количествамъ содержащейся въ ней матеріи.

когда на тѣло A дѣйствуетъ единица силы, мы въ разсматриваемомъ случаѣ получимъ равенство численныхъ значений давленія и силы. Обозначая нѣтъ одинаковою буквою, мы можемъ сказать, что формула (5) $f = mg$ даетъ намъ численное значение давленія тѣла A на тѣло B . Сила и вызванное ею давленіе имѣютъ, при такомъ выборѣ единицъ, одинаковыя численные значенія, а потому измѣреніе силъ можетъ быть произведено путемъ сравненія вызванныхъ ими давленій. Такое измѣреніе силъ называется статическимъ.

§ 6. Вѣсъ. На всякое тѣло, находящееся на земной поверхности дѣйствуетъ сила, направленная приблизительно къ центру земли. Плоскость, перпендикулярную къ направлению этой силы, называется горизонтальною. Эта сила называется вѣсомъ тѣла, мы обозначимъ ее черезъ p . Такъ какъ вѣсъ есть частный случай силы, то ясно, что единица вѣса тождественна съ единицею силы. Тѣла, не опирающіяся на другія тѣла, падаютъ (падаютъ) въ безвоздушномъ пространствѣ подъ влияемъ собственнаго вѣса или, какъ эту силу еще принято называть, подъ влияемъ «силы тяжести», съ ускореніемъ, которое мы обозначимъ черезъ g . Обозначивъ формула (5) принять въ этомъ частномъ случаѣ видъ

$$p = mg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Опыты показываютъ, что g величина постоянная для всѣхъ тѣлъ. Отсюда слѣдуетъ, что сила тяжести, дѣйствующая на тѣла, т.-е. нѣтъ вѣсъ, есть сила, обладающая тою спеціальною особенностію, что она сама пропорціональна массѣ тѣла. Мы видѣли, однако, что сила можетъ быть измѣрена тѣмъ давленіемъ, которое, подъ ея влияніемъ, тѣло производитъ на другое тѣло, служащее ему опорой. Отсюда слѣдуетъ, что давленіе, производимое на земной поверхности тѣломъ на другое тѣло, находящееся подъ нимъ, можетъ служить мѣрою его вѣса. Если же, какъ выше было условлено, за единицу давленія принять давленіе тѣла, на которое дѣйствуетъ единица силы, т.-е. тѣла, обладающаго единицею вѣса, то давленіе дѣлается численно равнымъ вѣсу. Вотъ почему подъ «вѣсомъ» можно понимать давленіе, производимое спокойно лежащимъ тѣломъ. Вытѣсненіемъ называется маневръ, служащий сравненію давленій тѣлъ на горизонтальную опору. Изъ вышеизложеннаго явствуетъ, что вытѣсненіе даетъ отношеніе массъ тѣлъ и что разнородныя тѣла, обладающія одинаковымъ вѣсомъ, обладаютъ одинаковою массою.

Помимо вышеуказаннаго динамическаго способа сравненія массъ разнородныхъ тѣлъ, мы нашли такимъ образомъ еще способъ статическаго ихъ сравненія.

Въ формулѣ (12) g имѣетъ опредѣленное численное значеніе, зависящее отъ избранной нами единицы ускоренія. На стр. 67 было сказано, что пользуясь формулою (5), а слѣд. и частнымъ ея видомъ (12), мы можемъ произвольно выбрать, напр., единицы ускоренія и массы, или ускоренія и силы. (12) даетъ, что при $m = 1$ вѣсъ $p = g$, т.-е. что тѣло, обладающее

единицы массы имѣть g единицъ вѣса. Выбирая произвольно единицу массы, мы за единицу вѣса (и вообще силы) должны принять вѣсъ тѣла, обладающаго $\frac{1}{g}$ единицы массы. Если напр. одну изъ массъ граммъ, фунтъ золотникъ (стр. 67) и т. д. принять за единицу массы, то единица вѣса (и силы) будетъ вѣсъ $\frac{1}{g}$ -ой доли грамма, фунта, золотника и т. д.

Форм. (12) даетъ, даѣтъ, что при $p = 1$ масса $m = \frac{1}{g}$, т. е. тѣло вѣсъ котораго равенъ единицѣ вѣса или силы обладаетъ $\frac{1}{g}$ -ой долей единицы массы. Выбирая произвольно единицу вѣса мы за единицу массы должны принять массу тѣла, обладающаго g единицами вѣса. Подъ названіемъ граммъ, фунтъ, золотникъ и т. д. иногда понимаютъ вѣсы кубическаго сантиметра чистой воды (см. стр. 67) и тѣла ширъ, которыя въ действительности суть эталоны массы. Принимая граммъ или фунтъ за единицу вѣса (и силы), мы за единицу массы должны принять g граммъовъ или g фунтовъ.

Съ понятіемъ о плотности однороднаго тѣла, которая измѣняется вѣсомъ единицы объема, о средней плотности и о плотности въ данной точкѣ мы уже познакомились въ отдѣлѣ первомъ стр. 30 и 31.

§ 7 Третій законъ движенія былъ Ньютономъ формулированъ такимъ образомъ: *actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse equales et in partes contrarias dirigi.*

Т. е. дѣйствіе и противоѣдѣствіе всегда равны по величинѣ и противоположны по направленію, или дѣйствія двухъ тѣлъ другъ на друга всегда равны и направлены въ противоположныя стороны.

Когда два тѣла A и B дѣйствуютъ другъ на друга, то двѣ силы, которыя въ слѣдствіе этого влѣютъ на эти тѣла, равны между собою и направлены въ противоположныя стороны.

Слѣдуетъ отличать два случая взаимодѣйствія тѣлъ.

1. Тѣла соприкасаются и производятъ давленіе другъ на друга. Всякое давленіе на физическое тѣло непремѣнно вызываетъ измѣненіе его формы напр. уменьшеніе объема: въ этомъ случаѣ частицы тѣла стремятся возвратиться къ началъному положенію, т. е. къ возстановленію изначальной формы тѣла. Въ этомъ стремленіи и заключается источникъ реакціи или контръ-давленія тѣла, по сжатію давленія. Измѣненіе формы происходитъ и для движущаго тѣла, на которое непосредственно дѣйствуетъ давленіе f . Въ результатѣ каждое изъ двухъ соприкасающихся тѣлъ давитъ на другое, и вотъ эти то два давленія равны по величинѣ и противоположны по направленію.

Если пружъ A давитъ на горизонтальную поверхность тѣла B съ нѣкоторою силою f , то стремленіе тѣла B возстановить форму (напр., уничтожить образовавшуюся вогнутость) является источникомъ давленія этого тѣла (снизу вверхъ) на тѣло A также равнаго f . Если тѣло A виситъ на шнуркѣ B , то послѣдній натягивается съ нѣкоторою силою, равною вѣсу

тѣла A : съ такою же силою дѣйствовать растянутый шнурокъ B , стремится сократиться до первоначальной длины, на тѣло A . Если газъ заключенъ въ сосудѣ, то, вслѣдствіе своего стремленія расшириться, онъ производитъ на стѣнку сосуда нѣкоторое давленіе f на каждую единицу ея поверхности. Подъ вліяніемъ этого давленія сосудъ нѣсколько расширится и его стремленіе восстановить форму выразится давленіемъ f на единицу поверхности газа.

2. Тѣла не соприкасаются, но присутствіе тѣла A въ опредѣленномъ мѣстѣ пространства должно быть разсматриваемо какъ причина появленія силы f , дѣйствующей на тѣло B . Но и дѣла обладаютъ тѣмъ, что во всѣхъ подобныхъ случаяхъ присутствіе B въ занимаемомъ имъ мѣстѣ является причиною возникновенія силы, дѣйствующей на тѣло A , по величинѣ равной f , но имѣющей противоположное съ f направленіе. Это относится ко всѣмъ тѣмъ случаямъ взаимодействія, для которыхъ роль промежуточной среды, передающей воздѣйствіе отъ одного тѣла къ другому, еще не выяснена, къ числу ихъ всматриваются тяготѣніе, электрическое и магнитныя.

Сила, съ которою землія притягиваетъ камень или луну, равна силѣ, съ которою землія, въ то-же время и по направленію противоположному, притягивается камнемъ или луною. Тоже самое относится и къ взаимодействию тѣлъ намагничиваемыхъ и намагнитченныхъ, къ взаимодействию тѣлъ, черезъ которыя проходятъ электрическіе токи и, наконецъ, къ взаимодействию токовъ и магнитовъ.

Изъ третьяго закона движенія получается какъ слѣдствіе, если взаимодействующія тѣла свободны и каждый изъ нихъ находится только подъ вліяніемъ другого, то они движутся съ ускореніями, обратно пропорциональными ихъ массамъ.

§ 8. Импульсъ силы и количество движенія. Третье слѣдствіе изъ закона II движенія. Положимъ, что сила f , постоянная по величинѣ и по направленію, дѣйствуетъ на тѣло A въ теченіе нѣкотораго времени t . Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что тѣло A подверглось импульсу силы. Импульсъ силы есть величина особаго рода (*impetus generis*), которую мы принимаемъ пропорціональною силѣ f и пропорціональною времени t . Въ единицу импульса K можно принять импульсъ какой-либо произвольной силы, дѣйствовавшей въ теченіе произвольнаго времени. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ вообще $K = Cft$. Принимая $C = 1$, т.-е. полагая

$$K = ft, \quad (13)$$

мы за единицу импульса должны принять импульсъ единицы силы, дѣйствовавшей въ теченіе единицы времени.

Если сила мѣняется по величинѣ и по направленію, то мы раздѣлимъ время t , въ теченіе которой она дѣйствовала, на весьма большое число весьма малыхъ частей Δt . Съ погрѣшностью, которая уменьшается съ увеличеніемъ числа частей, на которыя мы раздѣлимъ время t , т.-е. съ уменьшеніемъ Δt , мы можемъ силу f считать постоянною въ теченіе

каждано изъ малыхъ промежутковъ времени Δt . Импульсъ за время Δt , т.-е. величину $f \Delta t$ мы будемъ называть элементарнымъ импульсомъ. Обозначимъ его символически черезъ ΔK , такъ что

$$\Delta K = f \Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Предельн. къ которому стремится алгебраическая сумма величинъ $\Delta K = f \Delta t$ при безконечномъ возрастанн числа частей Δt , мы назовемъ импульсомъ K перемѣнной силы за время t . Символически это можетъ быть обозначено такимъ образомъ

$$K = \text{пред.} \sum \Delta K = \text{пред.} \sum f \Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Введемъ еще новую величину imp. generis , которую назовемъ количествомъ движенія. Мы принимаемъ эту величину пропорціональною массѣ m и пропорціональною скорости v тѣла. За единицу количества движенія мы можемъ принять количество движенія любой массы, движущейся съ любой скоростью. Въ этомъ случаѣ численное значеніе L количества движенія массы m , обладающей скоростью v , выразится формулою $L = C' m v$. Принимая $C' = 1$, мы за единицу количества движенія должны принять количество движенія единицы массы, движущейся съ единицею скорости. Въ этомъ случаѣ

$$L = m v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Величина L есть векторъ (стр. 41), имѣющій направленіе скорости v . Если скорость v получаетъ геометрическое приращеніе Δv , то количество движенія приобретаетъ также геометрическое приращеніе

$$\overline{\Delta L} = m \overline{\Delta v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

имѣющее направленіе скорости Δv . Новое значеніе количества движенія изобразится диагональю параллелограмма, построеннаго на L и $\overline{\Delta L}$.

Обратимся ко второму закону движенія, выраженнаго формулою (1) стр. 65, изъ которой мы вывели (6). Если формулу (5) сравнить съ форм. (3), то становится яснымъ, что коэффициентъ $c = m$, массѣ тѣла. Поэтому (1) можно написать въ видѣ

$$f \Delta t = m \overline{\Delta v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Сравнивая теперь (18) съ (14) и (17), мы видимъ, что первую изъ этихъ формулъ можно написать въ видѣ

$$\Delta K = \Delta L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

и что второй законъ движенія приводитъ къ такой новой формулировкѣ:

Элементарный импульсъ силы измѣряется геометрическимъ приращеніемъ количества движенія.

Взявъ алгебраическую сумму выражений величины $f\Delta t$ и $m\Delta v$, входящихъ въ (18) и принимая во внимание (15) и (17) мы получимъ

$$K = \text{пред.} \sum f\Delta t = \text{пред.} \sum mv = \text{пред.} \sum \Delta L \quad . \quad . \quad (20)$$

т.е. импульсъ силы за произвольный промежутокъ времени измѣряется алгебраической суммой геометрическихъ приращеній количества движенія.

Эта теорема упрощается въ двухъ частныхъ случаяхъ.

1. Движеніе прямолинейное сила имѣетъ направленіе движенія. Въ этомъ случаѣ Δv равно алгебраическому приращенію Δv скорости, но сумма алгебраическихъ приращеній величины есть не что иное, какъ полное приращеніе этой величины, т.е. разность между ея новыми значениемъ и старымъ. Если скорость въ время t измѣнилась отъ v_1 до v_2 , то (20) даетъ

$$K = \text{пред.} \sum f\Delta t = mv_2 - mv_1. \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Въ случаѣ прямолинейнаго движенія импульсъ силы за произвольный промежутокъ времени измѣряется алгебраическимъ приращеніемъ количества движенія.

2. Сила имѣетъ постоянное направленіе. Въ этомъ случаѣ всѣ геометрическія приращенія Δv имѣютъ одно и то же направленіе и ихъ сумма

очевидно не что иное, какъ полное геометрическое приращеніе скорости.

Когда сила имѣетъ постоянное направленіе, хотя бы и составляющее переменный уголъ съ направленіемъ движенія, то импульсъ силы за произвольный промежутокъ времени

Рис. 18.

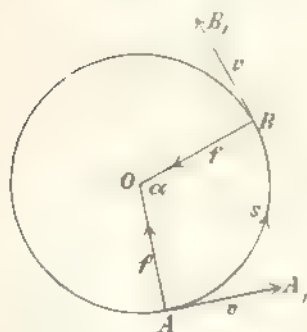


Рис. 19.



измѣряется геометрическимъ приращеніемъ количества движенія за тотъ же промежутокъ времени.

Для общаго случая силы, не имѣющей постояннаго направленія такое упрощеніе не имѣетъ мѣста, такъ какъ алгебраическая сумма геометрическихъ приращеній очевидно не равна полному геометрическому приращенію.

Проверимъ формулу (21) для случая прямолинейнаго равноускореннаго движенія, для котораго ускореніе a , а слѣд. и сила f величина постоянная, а приобретенная скорость $v_2 - v_1 = at$. Общая формула $f = ma$ даетъ въ этомъ случаѣ $ft = mat = mv_2 - mv_1$.

Пусть примем, дабы обобщить формулу (29) для случая равномерного со скоростью v движения по окружности, радиус которой R . Вычислим, сперва полный импульс сил за время t . В течение которого точка проойдет дугу $AB = vt$ (рис. 18), т.е. $\alpha = \angle AOB$. При равномерном движении по окружности ускорение w определяется формулой (30) стр. 58, т.е. $w = \frac{v^2}{R}$; оно направлено к центру. Отсюда следует, что и сила f постоянно направлена по радиусу к центру и по величине равна

$$f = \frac{1}{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Весь импульс равен $ft = \frac{mv}{R}$. Введем, вместо времени, угол α и т. д.
 $R\alpha = s$ следует $\alpha = \frac{s}{R} = \frac{vt}{R}$. (Т. е. импульс)

$$K = \text{mod.} \sum |M - I| = \frac{m'}{L} = m'x \quad , \quad , \quad , \quad (22a)$$

Чтобы найти пред. $\sum m \Delta$, т. е. алгебраическую сумму геометрических приращений количества движения, проведем из произвольной точки O (рис. 19) линии OC и OD — равные и параллельные $AA_1 = BB_1 = c$, а также множество промежуточных линий, равных и параллельных скоростям c ; точки при ее движении по пути AB . Следовательно $\angle (OC) = \angle AOB = \alpha$. Концы прямых, проведенных из точки O , расположены по дуге окружности; элементы этой дуги не что иное, как геометрические приращения Δc скорости (см. стр. 54). Алгебраическая сумма этих приращений равна дуге \widehat{CD} , т. е. αc , а потому алгебраическая сумма геометрических приращений количества движения

$$\text{Hofl.} \sum \Delta L = \text{Hofl.} \sum m \Delta t = m v c^2 (22.b)$$

(22a) и (22b) подтверждают справедливость формулы (20) для рассматриваемого случая. Для полного оборота точкой по окружности получаем импульс $K = 2\pi mv$.

§ 9. Мгновенные силы. Мгновенно называется сила, действие которой продолжается столь малый промежуток времени τ , что лишь при незначительной обстановке, т. е. при помощи особых, сложных инструментов может быть наблюдаемо действие этой силы в различные моменты времени t . В течение короткого сила f , иногда меняется по направлению, непрерывно меняется по величине, начиная от нуля в начале времени t и кончая опять нулем в конце этого времени. Такого рода силы проявляются при соударении тел, при действии мгновенного (напр. индукционного) тока на магнитную стрелку и т. д. Сила f меняется в течение времени τ , вызывает ускорение также непрерывно меняющееся. Но в виду чрезвычайной кратковременности действия силы не приходится говорить о таких ускорениях, а потому и самые переменные значения силы

f весьма часто вовсе не рассматриваются. Мы можем наблюдать скорость, а след. и количество движения до и послѣ дѣйствия мгновенной силы. Обозначая импульсъ переменной силы f за весь промежуток времени τ теперь через F и полагая, что сила f въ течение времени τ не мѣняется по направлению, мы можемъ положить F равнымъ полному геометрическому приращению количества движения. Импульсъ F весьма часто берется за мѣру дѣйствия мгновенной силы и иногда даже называется «величиной мгновенной силы».

Величина мгновенной силы измѣряется геометрическимъ измѣнениемъ количества движения тѣла, на которое она дѣйствуетъ.

Если скорость тѣла имѣла въ течение времени τ приращение самой силы f , то «величина» F мгновенной силы измѣряется разностью между количествами движения тѣла до и послѣ ея дѣйствія, см. (21).

§ 10. С. G. S. система единицъ. Мы видели (стр. 20), что если придать коэффициенту пропорциональности C , входящему въ физическія формулы, выражающія связь между численными значениями различныхъ физическихъ величинъ, определенное значение, напр., $C=1$, то единица одной изъ этихъ величинъ является какъ она сама собою, если единицы остальныхъ величинъ уже были выбраны. Принимая въ рядъ физическихъ формулъ, изъ которыхъ каждая слѣдующая содержитъ одну новую величину, не встречающуюся въ предыдущихъ формулахъ, коэффициенты пропорциональности равными единицѣ, мы можемъ «построить систему единицъ». Оказывается, что такое построение возможно, если произвольно выбрать единицы трехъ величинъ, независимыхъ другъ отъ друга, т.-е. изъ которыхъ одна не опредѣляется бы двумя другими. Эти три единицы называются основными. Единицы другихъ величинъ, получающіяся путемъ приравненія коэффициентовъ пропорциональности единицѣ, называются производными единицами, ихъ также называютъ абсолютными единицами, каковой терминъ нецѣль ирочемъ признавать удачнымъ.

Три основныя единицы можно выбрать весьма различно, такъ напр., существуетъ возможность построить систему абсолютныхъ единицъ на основныяхъ единицахъ длины скорости и силы, или массы, времени и ускоренія и т. д. Остановившись на подобныхъ трехъ основныяхъ единицахъ определенного рода, мы опять-таки можемъ получить безконечное множество различныхъ системъ единицъ производныхъ, мѣняя абсолютныя величины нашихъ трехъ основныхъ единицъ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что за основныя единицы приняты единицы длины l , массы m и времени t . Особенное вниманіе мы при этомъ обратимъ на случаи, когда за единицу длины принятъ сантиметръ (C), за единицу массы — граммъ (G) и за единицу времени — секунда (S). Система абсолютныхъ единицъ, построенная на этихъ трехъ единицахъ длины, массы и времени называется *C. G. S.* системою, а самыя производныя единицы — *C. G. S.* единицами.

C.G.S. единица поверхности есть квадратный сантиметръ, *C.G.S.* единица объема есть кубическій сантиметръ.

Скорость. Полагая въ формулѣ (3), стр. 50, коэффициентъ $C=1$, т. е., принимая (4), мы за абсолютную единицу скорости должны принять скорость точки, проходящей единицу длины въ единицу времени. *C. G. S.* единица скорости есть скорость точки, проходящей одинъ сантиметръ въ одну секунду. Свѣтъ пробѣгаетъ въ одну секунду 300,000 километровъ. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\text{скорость свѣта} = 3.10^{10} \text{ } C. G. S. \text{ едн. скорости} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Ускореніе. Принимая $C=1$ въ (17) стр. 55), т.-е. определяя g формулою (18), мы за абсолютную единицу ускоренія должны принять ускореніе такого движенія, при которомъ скорость въ единицу времени увеличивается на единицу скорости. *C.G.S.* единица ускоренія есть ускореніе такого движенія, при которомъ въ одну секунду скорость увеличивается на *C.G.S.* единицу скорости, т.-е. на сантиметръ въ секунду. При свободномъ паденіи скорость въ одну секунду увеличивается на 981 сантим. въ секунду. Обозначая ускореніе при свободномъ паденіи черезъ g , мы имѣемъ

$$g = 981 \text{ } C. G. S. \text{ единицъ ускоренія} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Формула (70), стр. 58, показываетъ, что *C.G.S.* единица ускоренія есть также ускореніе точки, движущейся со скоростью сантиметра въ секунду по окружности, радиусъ которой 1 сантим.

Вращеніе. Абсолютною единицей угловой скорости, см. (40) и (41) стр. 62, обладаетъ тѣло, поворачивающееся на единицу угла (57.29...) въ единицу времени. *C. G. S.* единицей угловой скорости обладаетъ тѣло, поворачивающееся на единицу угла въ одну секунду. Угловая скорость вращенія земли равна $\frac{2\pi}{24.60.60} = 0.0000764 \text{ } C. G. S. \text{ едн. углов. скорости.}$

Абсолютною единицею углового ускоренія, см. (45) стр. 63, обладаетъ тѣло, угловая скорость котораго въ единицу времени увеличивается на абсолютную ея единицу. *C. G. S.* единицею углового ускоренія обладаетъ тѣло, когда его угловая скорость въ одну секунду увеличивается на *C. G. S.* единицу угловой скорости.

Сила. Полагая $C=1$ въ (4) стр. 67, т.-е. принимая (5), мы за абсолютную единицу силы должны принять силу, подъ влияніемъ которой основная единица массы пріобрѣтаетъ абсолютную единицу ускоренія.

C. G. S. единица силы (сѣд. и вѣса) есть сила, подъ вліяніемъ которой масса граммъ пріобрѣтаетъ *C. G. S.* единицу ускоренія, такъ что его скорость черезъ каждую секунду увеличивается на «сантиметръ въ секунду». Эта сила получила названіе «динъ». Милліонъ диновъ составляетъ мегадинъ. Сравнимъ динъ съ хорошо знакомою намъ французскою единицею силы или вѣса, называемою граммомъ. Для этого сравнимъ дѣйствіе силъ динъ и граммъ на одно и то же тѣло, а именно на такое, которое обладаетъ массою граммъ. Изъ самаго опредѣленія слѣдуетъ, что масса граммъ подъ вліяніемъ силы динъ пріобрѣтаетъ

нения расстоянія AB или вовсе не существуют (случай идеальный) или столь малы, что ими можно пренебречь. Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что данныя двѣ силы взаимно уничтожаются. Непримѣнимое твердое тѣло обладаетъ слѣдующимъ основнымъ свойствомъ: точку приложения силы, дѣйствующей на непримѣнимое тѣло, можно перенести въ любую точку, лежащую по направленію самой силы и принадлежащую этому тѣлу, не мѣняя дѣйствія силы на тѣло.

Слѣдуетъ твердо помнить, что нѣтъ выводовъ, относящихся до замѣны одной или нѣсколькихъ силъ одной или нѣсколькими другими силами, причѣмъ новыя точки приложения не совпадаютъ со старыми, относятся исключительно только къ непримѣнимому твердому тѣлу.

Если нѣсколько силъ могутъ быть замѣнены одною, то первая называется сложными послѣдняя равнодѣйствующею.

Равнодѣйствующая произвольнаго числа силъ, имѣющихъ общую точку приложения, равна геометрической суммѣ дан-

Рис. 20.

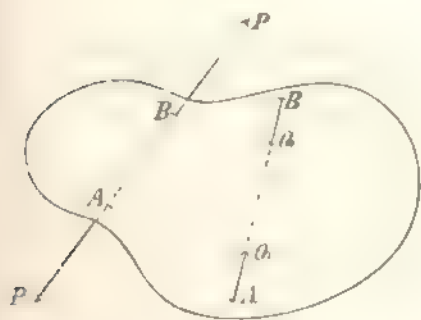
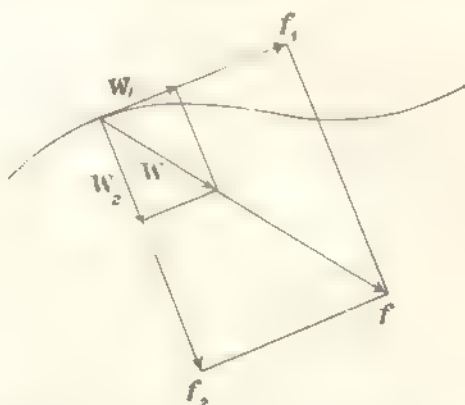


Рис. 21.



ныхъ силъ. Она изображается замыкающею многоугольника, стороны котораго построены, по правилу стр. 44, параллельно этимъ силамъ. Равнодѣйствующая двухъ силъ изображается диагональю параллелограмма, а трехъ силъ — диагональю параллелепипеда, построеннаго на данныхъ двухъ силахъ, какъ на сторонахъ или на данныхъ трехъ, какъ на ребрахъ.

Данную силу можно разложить на двѣ, на три или большее число слагаемыхъ, имѣющихъ точку приложения, общую съ данною силою. Данную силу f можно, напр., замѣнить тремя силами f_1 , f_2 , f_3 , параллельными координатнымъ осямъ въ пространствѣ.

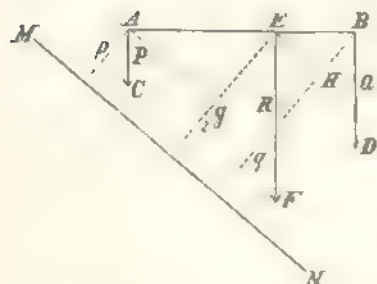
Мы видѣли, стр. 60, что, въ общемъ случаѣ движеніи точки по кривой, ускореніе w можетъ быть разложено на тангенціальное w_1 и нормальное w_2 (см. (31) стр. 60). Дѣйствующую силу f (рис. 21), которая равна ma и до направленію совпадаетъ съ w можно разложить на тангенціальную слагаемую f_1 и нормальную слагаемую f_2 . Изъ рис. 21 видно, что три силы f и f_2 пропорциональны тремъ ускореніямъ w , w_1 и w_2 . Отсюда слѣдуетъ,

что $f_1 = mw_1$ и $f_2 = mw_2$, т. е. тангенциальную и нормальную составляющие силы можно соответственно рассматривать как причины тангенциального и нормального ускорений; первая из этих сил вызывает изменение скорости по величине, вторая изменение скорости по направлению. Импульс $f_1 \Delta t$ силы f_1 равен алгебраическому приращению $m \Delta v$ количества движения. Отсюда следует, что импульс тангенциальной составляющей за произвольный промежуток времени равен алгебраическому приращению количества движения т. е.

$$L_1 = \text{пред.} \sum f_1 \Delta t = m v_2 - m v_1 \dots \dots \dots (26)$$

Из элементарной физики известно, что равнодействующая двух параллельных, в одну сторону направленных сил $P = AC$ и $Q = BD$ (рис. 22) равна их сумме ($R = EF = P + Q$) и имеет одинаковое с ними направление. Ея точка приложения E делит расстояние AB на части, обратно пропорциональные приложенным силам.

Рис. 22.



$$\text{т. е. } \frac{P}{Q} = \frac{EB}{EA}.$$

Введем новую величину, которую назовем моментом силы относительно данной плоскости и которая измерялась бы произведением силы на длину перпендикуляра, опущенного из точки приложения силы на эту плоскость.

Докажем, что момент равнодействующей двух параллельных сил относительно произвольной плоскости равен сумме моментов составляемых.

Пусть за плоскость чертежа 22-го взята плоскость, проходящая через AEB и перпендикулярная к данной плоскости MN , силы P , Q и R могут не лежать в плоскости чертежа. Перпендикуляры, опущенные из A , B и E на плоскость MN , обозначим через p , q и r . Требуется доказать, что $Pp + Qq = Rr$. Из чертежа видно, что

$$Pp + Qq = P(r - GE) + Q(r - HB) = (P + Q)r + Q \cdot HB - P \cdot GE.$$

$$\text{Но } \frac{P}{Q} = \frac{EB}{AE} = \frac{HB}{GE}, \text{ отсюда } Q \cdot HB = P \cdot GE. \text{ Поэтому остается}$$

$$Pq + Qq = (P + Q)r = Rr.$$

Если мы имеем систему параллельных сил P_i их равнодействующую R и перпендикуляры, опущенные из точек приложения сил на произвольную плоскость, обозначим через p_i и r , то

$$\begin{aligned} R &= \sum R_i \\ Rr &= \sum P_i p_i \end{aligned} \quad \left| \dots \dots \dots (27) \right.$$

Изъ элементарной физики известно, дабы, что равнодействующая R двух параллельных силъ P и Q (рис. 23) направленныхъ въ противоположныя стороны, равна ихъ разности, $R = Q - P$, и направлена въ сторону болѣеи силы. Ея точка приложения C находится на продолжении прямой AB со стороны болѣеи силы, причемъ $\frac{P}{Q} = \frac{CB}{CA}$. Считая P и Q

за силы имѣющія противоположные знаки, мы докажемъ, что и въ этомъ случаѣ моментъ равнодействующей равенъ суммѣ (алгебраической) моментовъ слагаемыхъ, т.-е., что $Rr = Qq - Pr$, гдѣ p, q и r длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ A, B и C на плоскость MN . Изъ рисунка видно, что $Qq - Pr = Q(CF) - P(CF) = (Q - P)CF = Rr$. Отсюда слѣдуетъ, что формулы (27) останутся справедливыми и для случая произвольной системы параллельныхъ силъ, изъ которыхъ одѣ имѣютъ одно прямо противоположное направление.

Точка приложения равнодействующей системы параллельныхъ силъ называется центромъ системы параллельныхъ силъ. Положимъ, что дана система параллельныхъ силъ P_i ; пусть точка приложения силы P_i имѣетъ координаты x_i, y_i, z_i , и пусть равнодействующая $R = \sum P_i$ имѣетъ точку приложения координаты которой X, Y, Z . Взявъ координатную плоскость yz за плоскость моментовъ имѣемъ, вмѣсто (27)

$$RX = \sum P_i x_i.$$

Подобныя двѣ формулы получимъ, взявъ моменты относительно координатныхъ плоскостей xz и yz . Замѣнивъ R величиною $\sum P_i$, получаемъ

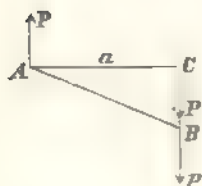
$$X = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}, \quad Y = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}, \quad Z = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} \quad \dots \quad (28)$$

Мы видимъ, что координаты центра зависятъ только отъ величины силъ P_i и отъ положенія ихъ точекъ приложения; но положеніе центра параллельныхъ силъ не зависитъ отъ направленія самихъ силъ, но остается всеъ неизмѣннмъ, если всѣ силы P_i увеличить или уменьшить въ одинаковое число разъ.

§ 12. Пара силъ. Парою силъ называется совокупность двухъ силъ AP и BP (рис. 24) равныхъ и параллельныхъ, но направленныхъ

въ противоположныя стороны. Дѣй силы, изъ которыхъ состоитъ пара, всегда можно расположить такъ, что онѣ окажутся перпендикулярными къ прямой, соединяющей ихъ точки приложения. Для этого стоитъ только провести $AC \perp AP$ и перенести точку приложения силы BP изъ B въ C . Прямая AC а называется плечомъ пары. Введемъ новую физическую величину, которую назовемъ моментомъ пары, пропорциональную силѣ P пары и пропорциональную ей плечу a . Принимая за единицу момента пары моментъ какой-либо пары, мы для численнаго значенія M момента пары получаемъ $M = CPa$. Принимая здѣсь $C = 1$, т.-е. полагая

Рис. 24



$$M = Pa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

мы за абсолютную единицу момента пары силу должны принять моментъ пары, каждаго изъ силъ которой равна абсолютной единицѣ силы и плечо которой равно линейной единицѣ. С. G. S. единица момента пары есть моментъ пары, состоящей изъ двухъ силъ, находящихся на разстоянн одного сантиметра другъ отъ друга. Пара силъ стремится придать тѣлу, на которое она дѣйствуетъ, вращательное движеніе.

§ 13. Центробѣжная сила. Центробѣжное сіюю называется сила, исходящая отъ тѣла, которое движется по кривой линіи и направленная

Рис. 25.



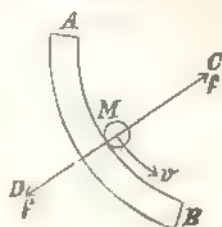
къ тѣлу которое заставляетъ первое уклоняться отъ прямолинейнаго пути. Положимъ, что тѣло M (рис. 25), приращенное къ шкуркѣ AM , закрѣпленной въ точкѣ A , движется равномерно по окружности. Чтобы тѣло M двигалось не по прямой, необходима сила, направленная по радиусу къ центру A окружности. Это есть сила MB натянутого и потому растянутаго шкурка стремится вновь укоротиться. Противодѣйствіе тѣла M на шкурку AM , которое по величинѣ равно дѣйствію шкурки на тѣло M , но имѣетъ направленіе противоположное (третій законъ движенія), есть центробѣжная сила MC , которая, слѣдовательно, приложена къ шкуркѣ, а не къ тѣлу M , какъ иногда поспѣшно определяют. Подъ вліяніемъ этой силы шкурка можетъ разорваться и тогда тѣло M , отлетая отъ точки A , движется по касательной къ кругу, а не по направлению радиуса.

Положимъ, что тѣло M (рис. 26) безъ тренія движется равномерно вдоль кривой стѣны AB . Такое движеніе возможно только при наличности силы $f = MC$, направленной нормально къ стѣнѣ и происходящей отъ давленія стѣны на тѣло M . Равное ему давленіе MD тѣла на стѣну и есть, въ данномъ случаѣ, центробѣжная сила.

Разобранные два примѣра относятся, строго говоря, къ материальнымъ точкамъ, а не къ конечнымъ тѣламъ M . При вращенн физическаго тѣла

около оси, центробежная сила действует на все частицы, кроме слое частиц поверхностных. Предположим что тело B (рис. 27) вращается около оси, проходящей через M . Произвольная частица b движется по окружности под влиянием силы, как бы исходящей от соседней частицы a и не дающей ей удалиться от a ; эта сила направлена от b к M . Обратно частица b действует на a с силой, которая направлена от a к b и которая и есть не что иное, как центробежная сила. Прилагая сказанное ко всем частицам, мы видим, что все они подвержены центробежной силе, исключая частицы, расположенных по поверхности B . Легко сообразить, что степень растяжения тела B будет тем больше, чем ближе рассматриваемое место будет к M .

Рис. 26.



§ 14. Динамическое поле. Мы называем динамическим полем среду (стр. 7), обладающую тем свойством, что на тело, помещенное в какое-либо место среды, действует сила, пропорциональная массе этого тела. Пространство, окружающее земной шар, есть очевидно динамическое поле. Введем новую особую физическую величину (*unit generis*), которую назовем напряжением динамического поля в данной точке и которую примем пропорционально той силе, которая действовала бы на единицу массы, помещенную (мысленно) в этой точке. Если на массу m действует в данном месте поле сила f , и если за единицу напряжения поля принять напряжение в каком-либо месте произвольного поля, то численное значение ϕ напряжения поля выразится формулою $\phi = C \frac{f}{m}$. Принимая $C=1$, т.-е. полагая

Рис. 27



$$\phi = \frac{f}{m} \dots \dots \dots (30)$$

мы за абсолютную единицу напряжения поля должны принять напряжение в такой точке, в которой на единицу массы действует абсолютная единица силы.

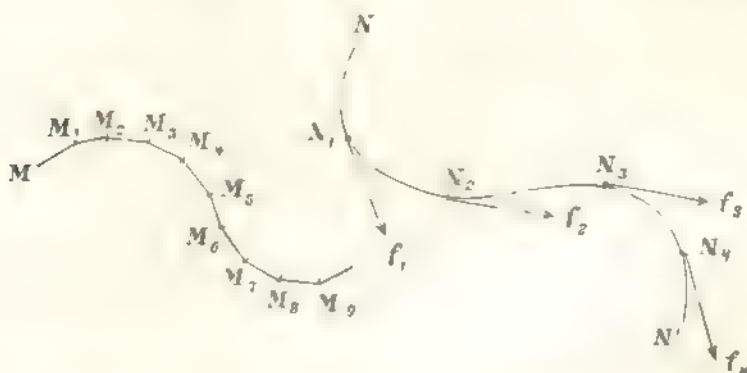
$C. G. S.$ единица напряжения поля есть напряжение в такой точке, в которой на массу грамм действует сила динь. Напряжение поля, вызванное силою тяжести, в местах, близких к поверхности земли, равно 981 $C. G. S.$ единице напряжения. Напряжение ϕ есть вектор, имеющий направление силы f , действующей в данной точке поля на массу m .

Поле называется равномерным, когда во всех его точках напряжение имеет одинаковое направление и величину. Небольшая часть пространства, окружающего земной шар, может быть принята за равномерное поле.

Вообразим какое-либо, вообще неравномерное, динамическое поле.

Из какой-либо точки M (рис. 28) пройдем весьма короткую прямую линию MM_1 по направлению силы, действующей в M , когда бы M находилась материальная точка; из M_1 пройдем линию M_1M_2 по направлению силы, действующей в M_1 , затем M_2M_3 по направлению силы, действующей в M_2 и т. д. Получаем ломаную линию $MM_1M_2M_3, \dots, M_n, \dots, M$ Если укорачивать беспрестанно отрезки MM_1, M_1M_2 и т. д., то ломанная беспрестанно будет приближаться к некоторой кривой линии, проходящей через точку M . Направление кривой, т. е. направление касательной к кривой в каждой ее точке, совпадает с направлением силы, действующей в этой же точке. Такая линия называется линией силы. Касательная к линии сил XX' (с X, X', X'', X''', \dots) указывает направление действующей силы. В равномерном полетении сил суть параллельны между собою прямые линии.

Рис. 28.



тальной к кривой в каждой ее точке совпадает с направлением силы, действующей в этой же точке. Такая линия называется линией силы. Касательная к линии сил XX' (с X, X', X'', X''', \dots) указывает направление действующей силы. В равномерном полетении сил суть параллельны между собою прямые линии.

§ 15. Центр инерции. Центром инерции физического тела называется точка приложения равнодействующей всех сил, действующих на это тело, когда оно помещено в равномерном динамическом полете ϕ . Разделим объем, занятый телом, на весьма малые части Δm и обозначим массу, заключающую одну из частей Δm через Δm , мы можем сказать, что на нее действует сила $f = \Delta m g$. Все силы f между собою параллельны и множить ϕ для всех один и тот же. Из определения следует, что центр инерции есть не что иное, как центр системы параллельных сил f (см. стр. 84), действующих на точки тела, помещенного в равномерном полете. Стоянки центра параллельных сил см. в конце § 11 (стр. 81) показывают, что положение центра инерции тела не зависит ни от направления ϕ полета, ни от самого положения тела в этом полете, но всякое изменение положения тела можно мысленно заменить изменением направления сил, действующих на тело. Центр инерции зависит, следовательно, от распределения массы, входящих в состав рассматриваемого тела.

На основании формулы (28) (стр. 81) мы найдем координаты X, Y, Z центра инерции. Разделим объем τ тела на весьма большое число частей

Δx_i , содержащихъ массы Δm_i . Такъ какъ P , въ (28) равно $\psi \Delta m_i$, то можемъ сократить дроби на ψ ; обозначая всю массу тѣла черезъ $m = \sum \Delta m_i$, получаемъ

$$X = \frac{\text{пред.} \sum x_i \Delta m_i}{m}, \quad Y = \frac{\text{пред.} \sum y_i \Delta m_i}{m}, \quad Z = \frac{\text{пред.} \sum z_i \Delta m_i}{m}. \quad (31)$$

Для однороднаго тѣла, плотность котораго k , имѣемъ $\Delta m_i = k \Delta x_i$ и $m = kV$, подставивъ и сокративъ на k , получаемъ

$$X = \frac{\text{пред.} \sum x_i \Delta x_i}{V}, \quad Y = \frac{\text{пред.} \sum y_i \Delta x_i}{V}, \quad Z = \frac{\text{пред.} \sum z_i \Delta x_i}{V}. \quad (32)$$

Положеніе центра инерціи однороднаго тѣла не зависитъ отъ его плотности.

Центръ инерціи тѣла можетъ быть найденъ, если известны положенія центровъ инерціи двухъ, трехъ или общаго числа частей, на которыя можно мысленно разбить данное тѣло. Для этого слѣдуетъ приложить къ центрамъ инерціи частей тѣла силы, параллельныя и пропорціональныя массамъ этихъ частей и выбрать точку приложенія равнодѣствующей полученныхъ силъ.

§ 16. Моментъ инерціи. Моментомъ инерціи материальной частицы относительно данной оси называется величина второго рода, которая принимается пропорціональною массѣ Δm той частицы и квадрату расстоянія r частицы отъ оси. Полагая коэффициенты пропорціональности равными единицѣ, получаемъ для численнаго значенія K момента инерціи выраженіе $K = r^2 \Delta m$. Моментъ инерціи системы точекъ принимается равнымъ суммѣ моментовъ инерціи этихъ точекъ, т.-е. $K = \sum r^2 \Delta m$. Моментъ инерціи физическаго тѣла получается слѣдующимъ образомъ: разбѣлимъ тѣло на весьма большое число малыхъ частей, пусть Δm масса, r расстояние какон-либо геометрической точки одной изъ этихъ малыхъ частей отъ оси. Составимъ сумму величинъ $r^2 \Delta m$. Пределъ къ которому стремится эта сумма при безконечномъ возрастаніи числа частей, на которыя мы разбѣлимъ тѣло, и называется моментомъ инерціи K физическаго тѣла. Итакъ

$$K = \text{пред.} \sum r^2 \Delta m. \quad (33)$$

Абсолютную единицу момента инерціи необходимо опредѣлять, какъ моментъ инерціи единицы массы, находящейся на единичномъ разстояніи отъ оси, ибо единицу массы нельзя себѣ представить сосредоточенною около одной геометрической точки. Мы скажемъ, что абсолютною единицею момента инерціи обладаетъ тѣло, для котораго формула (33) дастъ $K = 1$, т.-е. имѣемъ Δm и r должны быть выражены въ единицахъ массы и длины. Триблизительно единица момента инерціи есть моментъ инерціи единицы массы, распределенной точками, слоемъ по поверхности круговаго цилиндра, радиуса основанія котораго единица длины, относительно оси цилиндра. Если S единицей момента инерціи обладаетъ масса грамма, распредѣ-

координаты x центра инерции. Но центр инерции C лежитъ въ координатной плоскости yz , слѣд. $X = 0$, а потому получается формула (34), которую следовало доказать. Эта формула даетъ возможность определить моментъ инерции тѣла относительно любой оси, если извѣстенъ моментъ инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей черезъ центръ инерции. Изъ формулы (34) слѣдуетъ далѣе, что моментъ инерции тѣла относительно всѣхъ образующихъ цилиндра ось котораго проходитъ черезъ центръ инерции, имѣть одно и тоже значение. Для вычисления момента инерции тѣла помощью формулы (34) приходится пользоваться приемами интегрально исчисления а потому читателямъ, еще не знакомымъ съ этимъ отдѣломъ математики, придется пока принять на вѣру обобщенные результаты выходящихъ вычислений.

Моментъ инерции выражается тройнымъ интеграломъ, распространеннымъ по всему объему тѣла. Обозначая дифференциалъ объема черезъ dv , дифференциалъ массы черезъ dm и плотность черезъ k , имѣемъ вообще $dm = kdv$ и потому для момента инерции K получается

$$K = \int \int \int r^2 k dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

1. Моментъ инерции полого однороднаго круговаго цилиндра относительно его геометрической оси. Пусть l длина цилиндра, R внутренний, R_2 външнй радиусъ; плотность k величина постоянная. Введемъ цилиндрическия координаты r расстояние точки отъ плоскости одного изъ оснований цилиндра, r расстояние точки отъ его оси и φ уголъ между r и некоторымъ начальнымъ радиусомъ r_0 . Элементъ объема $dv = r dr d\varphi dz$ и потому

$$K = k \int_{z=0}^l \int_{r=R_1}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 dr dz = 2\pi k l \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

или

$$K = \frac{1}{2} \pi k l (R_2^4 - R_1^4).$$

Если m полого цилиндра равно $\pi k l (R_2^2 - R_1^2)$, слѣд.

$$K = m \frac{R_2^2 + R_1^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

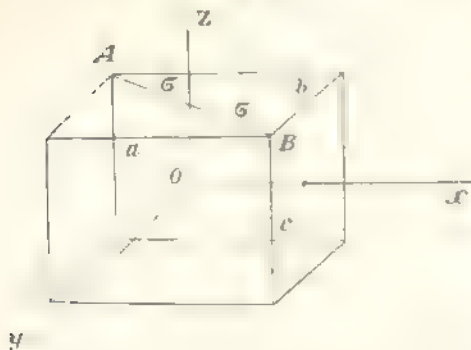
плотнаго цилиндра, радиусъ основани котораго R , имѣемъ изъ (36), полагая $R_2 = R$ и $R_1 = 0$.

$$K = \frac{1}{2} m R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Если малая величина толщы цилиндра превращается въ кольцо съ малѣйшимъ поперечнымъ сѣчениемъ, а сплошной въ круговую пластинку. Формулы (36) и (37) относятся и къ нимъ. Формула

(57) показывать что *C. G. S.* единица момента инерции есть парр. моментъ инерции цилиндра, масса котораго равна двумъ грммамъ, а радиусъ основанія равенъ одному сантиметру, относительно его оси.

Рис. 30.



II. Моментъ инерции однороднаго прямоугольнаго параллелепипеда относительно осл. проходящей черезъ его геометрическій центръ и параллельной одному изъ реберъ (*c*). Пусть *a*, *b* и *c* ребра параллелепипеда (рис. 30); проведемъ координатныя оси съ началомъ въ его центръ *O* и параллельныя ребрамъ. Найдемъ величину *K* относительно оси *Oz*. Элементъ объема $dv = dx dy dz$ имѣетъ

координаты *x*, *y*, *z* и выходитъ отъ оси *Oz* на разстоянн $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Слѣдовательно

$$K = k \int_{x=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Интегрируя по *z*, находимъ

$$K = kc \left\{ \int_{x=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy + \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{x=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \right\} = \frac{1}{12} lab^2 (a^2 + b^2).$$

Но масса *m* нашего тѣла равна *lab* стѣл.

$$K = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} m r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

гдѣ *r* см. рис. 30, половина діагональ *AB*, т.е. разстоянне отъ оси до наиболѣе отъ нея удаленной точки тѣла.

III. Моментъ инерции однороднаго шара относительно оси проходящей черезъ его центръ. Пустьъ радиусъ шара *R*. Возьмемъ координатныя оси съ началомъ въ центрѣ шара и обозначимъ черезъ *K_x*, *K_y* и *K_z* моменты инерции шара относительно координатныхъ осей. Въ виду симметрии шара ясно, что вообще *K = K_x = K_y = K_z*. Очевидно

$$K_x = \text{пред.} \sum \Delta m (y^2 + z^2), \quad K_y = \text{пред.} \sum \Delta m (x^2 + z^2), \quad K_z = \text{пред.} \sum \Delta m (x^2 + y^2).$$

Складывая эти три величины и принимая во вниманнѣ предыдущія равенства, имѣемъ

$$3K = 2 \text{ пред.} \sum \Delta m (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \text{ пред.} \sum r^2 \Delta m.$$

дѣлъ этой суммы не что иное, какъ моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія. см. (33) стр. 85, такъ что

$$J = \frac{1}{2} K^2 \dots \dots \dots (3)$$

Живая сила вращающагося тѣла численно равна полу произведенію квадрата его угловой скорости на его моментъ инерціи относительно оси вращенія. Подставляя въ (3) вмѣсто K одно изъ выраженій (36), (37), (38) и (39) получаемъ живую силу однородныхъ полого цилиндра или кольца съ прямолинейнымъ сѣченіемъ, сплошного цилиндра или кривої пластинки, параллельнаго и шару вращающагося около осей, для которыхъ выраженія момента инерціи были равнены. Формула (34) даетъ намъ возможность опредѣлить живую силу этихъ же тѣлъ при ихъ вращеніи около осей, параллельныхъ вышеуказаннымъ.

§ 2. Работа. Когда движеніе тѣла происходитъ по направлению, противоположному направлению одной изъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, такъ что эта сила препятствуетъ его движенію, то мы говоримъ, что производится работа, препятствующую силу мы будемъ называть сопротивляе-
мымъ. Движеніе на встрѣчу сопротивленія можно назвать его «противо-
вѣшнымъ». Итакъ, работа производится, когда преодолевается
сопротивленіе. Вѣдно замѣтить, что во многихъ случаяхъ движенія
тѣла сопротивленіе развивается только во время самого движенія.

Допустимъ, что на тѣло дѣйствуютъ силы по направлению движе-
нія; мы назовемъ ее движущей силой.

Будемъ отличать два случая дѣйствія движущей силы на тѣло.

I. Первый случай тотъ, когда существуетъ сопротивленіе т.-е. сила, препятствующая движенію и исходящая отъ какихъ либо другихъ тѣлъ, источникъ этого сопротивленія находится во вѣншемъ для данного тѣла мѣстѣ. Допустимъ кромѣ того, что въ каждый данный моментъ движущая сила по величинѣ равна сопротивленію и что тѣло въ слѣдствіе первоначальнаго толчка или по иной причинѣ уже имѣло нѣкоторую скорость v . Такъ какъ движущая сила и сопротивленіе предполагаются равными, а направленія ихъ противоположными, то силы, дѣйствующія на наше тѣло, взаимно уничтожаются и тѣло по инерціи движется равномерно, т.-е. безъ измѣненія скорости v или безъ ускоренія. Работа движущей силы въ этомъ случаѣ заключεται только въ преодо-
лѣніи уравнивающаго его сопротивленія. Обозначимъ ту и другую силу
черезъ f . Работа пропорциональна сопротивленію f или что въ разсмотрѣ-
момъ случаѣ тоже самое, движущей силѣ f и пропорциональна тому пути s , ко-
торый былъ пройденъ тѣломъ по направлению движущей силы или вдоль
котораго движущая сила f преодолевала сопротивленіе f . Выбирая произ-
вольно единицу работы, мы для ея численнаго значенія R получаемъ общее
выраженіе $R = Cfs$. Полагая $C = 1$, имѣемъ

$$R = fs \dots \dots \dots (4)$$

Абсолютная единица работы есть работа единицы силы «на протяжении единицы длины», т.-е. когда точка приложения силы перемещается по направлению силы на единицу длины. *C. G. S.* единица работы есть работа силы динъ на протяжении одного сантиметра. Эта единица работы получила название эргъ. Миллионъ эрговъ называется «мегаэргъ». Десять мегаэрговъ или 10^7 эрговъ получили название джоуль.

Разсмотрѣнный здѣсь случай работы мы имѣемъ при подъемѣ на поверхности земли тѣла, вѣсъ котораго p , на высоту h , при существенномъ условіи, чтобы тѣло не приобрѣтало ускоренія. Работа выражается формулою

$$R = ph \dots \dots \dots (4, a)$$

Если вѣсъ (сопротивление, равное поднимающей силѣ) выраженъ въ килограммахъ, высота подъема въ метрахъ, то за единицу работы въ (4, a) принимается работа подъема килограмма на высоту метра безъ измѣненія его начальной скорости. Эта единица работы называется **килограммъ-метромъ**.

Подобнымъ-же образомъ получаются понятныя по намъ названнымъ единицы работы пудо-футъ, фунто-футъ, граммъ-сантиметръ и т.-д. Аналогично эргъ есть динъ-сантиметръ. Мы видели на стр. 78, что динъ = 1.02 миллигр., Отсюда слѣдуетъ, что мегаэргъ = 10^7 эрговъ = 10^6 1.02 милл.-сант. = 1.02 килогр.-сантим. = 0.0102 килогр.-метр. Итакъ мы имѣемъ

$$\begin{aligned} \text{Джоуль} &= 10 \text{ мегаэрговъ} = 10^7 \text{ эрговъ} = 0.102 \text{ килогр.-метра} \\ \text{Мегаэргъ} &= 10^7 \text{ эрговъ} = 0.0102 \text{ килогр.-метра.} \end{aligned} \quad \} \dots (5)$$

II. Второй случай работы мы имѣемъ, когда сила f дѣйствуетъ на тѣло, не подверженное вліянію сопротивленія, исходящаго отъ вѣнныяго міра. Полагая, что и здѣсь сила f имѣетъ направленіе движенія, мы должны сказать, что результатомъ дѣйствія силы является апобранческое увеличеніе скорости, т.-е. ускореніе. Инерція тѣла, т.-е. его пассивное сохраненіе скорости, играетъ здѣсь роль того сопротивленія, которое преодолевается активной движущей силой; это сопротивленіе дѣйствующей силѣ f исходить, однако, не отъ вѣнныяго міра, но отъ самого движущагося тѣла. Подъ работой силы f мы и здѣсь будемъ понимать величину, численное значеніе которой выражается формулою (4), т.-е. произведеніемъ силы f на путь s пройденный тѣломъ по направленію силы.

Итакъ, слѣдуетъ отличать два случая производства работы: въ первомъ сущность работы заключается въ преодолевании вѣнныяго сопротивленія движению, которое совершается безъ увеличенія скорости тѣла; во второмъ работа обнаруживается увеличеніемъ скорости движенія, къ которому вѣнныяго міръ относится индифферентно.

На дѣлѣ мы имѣемъ весьма часто соединеніе обоихъ случаевъ: сила f преодолеваетъ кака-либо сопротивленіе и въ то же время мѣняетъ скорость движенія тѣла. Работа въ этомъ случаѣ распадается на двѣ части. Одна часть, какъ говорить, «тратится» на преодоленіе сопротивленія, вторая — на измѣненіе скорости движенія тѣла.

Второй из рассмотренных выше случаев есть случай, несущественный на земной поверхности, ноо при каком движении тела у поверхности земли возникает, исходящее от соеденнаго тела сопротивление тому движению сопротивление воздуха, трение на поверхности оси колеса и т. под. Отсюда следует, что на земной поверхности при каком бы то ни было движении часть работы тратится (или как говорят, теряется или пропадает) на преодоление вышних сопротивлений. Происходящее равномерное работа тратится, теряется, пропадает и т. д. выясняется впоследствии.

Сила вышних сопротивлений вызывается разными, для отличия от тела сопротивлен, для преодоления которых мы иногда пользуемся имьющимся в нашем распоряжении силою, заставляя ее напр., приводить в равномерное движение плуг или станки, служащие для обработки дерева, металлов и т. под.

В остальных рассмотренных случаях произведена работы мы предполагаем, что сила действует по направлению перемещения s . Рассмотрим общий случай, когда сила f и перемещение s составляют некоторый угол $(f, s) = \alpha$. Когда $\alpha = 90^\circ$, то работа силы f равна нулю, ибо эта сила не может ни вызвать изменения скорости по величине, ни приложить сопротивления, имьющего направление противоположное направлению движения тела. При произвольном угле α , принимаем f за численное значение R работы величина

$$R = fs \cos \alpha = fs \cos(f, s). \quad (6)$$

которое при $\alpha = 0$ дает (4), а при $\alpha = 90^\circ$ дает $R = 0$. Обозначая чертой f_1 тангенциальную составляющую силы f , имеем $f_1 = f \cos \alpha$; полагая с другой стороны $s_1 = s \cos \alpha$. Сила f_1 есть проекция действующей силы f на направление перемещения s , s_1 есть, наоборот, проекция перемещения s на направление силы f . Мы имеем

$$R = fs \cos \alpha = f_1 s = f s_1. \quad (6.a)$$

В общем случае, величины силы f и угла α непрерывно меняются. Разделим путь s на весьма малые отрезки Δs , тогда работа, соответствующая малому перемещению Δs или т. наз. «элементарная работа»

$$\Delta R = f \Delta s \cos(f, \Delta s).$$

Вся работа, произведенная перемещению силою f при криволинейном движении тела, выразится формулою

$$R = \text{пред.} \sum f \Delta s \cos(f, \Delta s). \quad (7)$$

или

$$R = \text{пред.} \sum f_1 \Delta s. \quad (7.a)$$

гдѣ f_1 тангенциальная составляющая действующей силы.

Докажем весьма важную теорему: если несколько сил имеют общую точку приложения, которая перемещается, то работа равнодействующей силы равна алгебраической сумме работ составляющих сил. Докажем эту теорему для случая двух действующих сил $P_1 = OA$ и $P_2 = OB$ (рис. 31), равнодействующая которых $P = OC$. Пусть точка O переместилась на весьма малый путь Δs по направлению OM . Опустив из точек A , B и C перпендикуляры на OM , имеем $OF = OE + EF$; но $EF = OD$, слѣд. $OF = OD + OE$ или $P \cos(P, \Delta s) = P_1 \cos(P_1, \Delta s) + P_2 \cos(P_2, \Delta s)$. Помножая это уравнение на Δs , получаемъ

$$P \Delta s \cos(P, \Delta s) = P_1 \Delta s \cos(P_1, \Delta s) + P_2 \Delta s \cos(P_2, \Delta s)$$

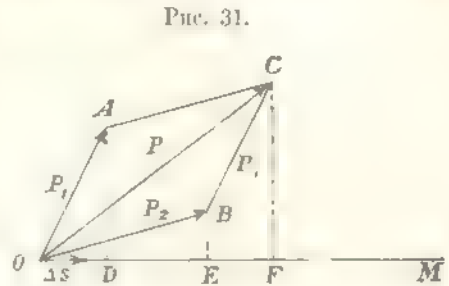


Рис. 31.

каковое равенство и выражаетъ нашу

теорему для случая двухъ силъ. Отъ двухъ силъ уже легко перейти къ тремъ и большому числу и доказать теорему для самого общаго случая.

Формула (16) даетъ для работы R положительное численное значение, если уголъ α острый. Если уголъ α тупой (рис. 32), то работа R отрицательная, причемъ опять возможны два случая

1. Существуетъ другая сила f , составляющая съ Δs острый уголъ, причемъ проекция обеихъ силъ на направление движения равна; тѣло, претерпевающее это состояние, движется равномерно. Тогда наша сила играетъ сопротивляющую роль, работа которой отрицательна и численно равна работѣ другой движущей силы.

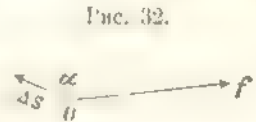


Рис. 32.

2. Сила f (рис. 32) действуетъ съ движущей силой, не перпендикулярно, но тѣло, не подвергнутое постороннимъ вліяніямъ. Въ этомъ случаѣ результатомъ отрицательной работы этой силы является замедленіе движенія тѣла, т.е. уменьшеніе его скорости. Въ общемъ случаѣ, когда проекция силы f на направление движения больше проекции силы f , то потокъ работы силы f надъ работою силы f' вызываетъ замедленіе движенія тѣла.

Опредѣлимъ величину работъ для нѣсколькихъ частныхъ случаевъ.

1. Работа пары силъ. Положимъ, что на тѣло действуетъ пара силъ $PABP$ (рис. 33), моментъ которой $M = Pa$, гдѣ $a = AB$ (см. (29) стр. 82 и положимъ что тѣло повернулось на уголъ α около точки O . Такъ какъ обѣ силы P при этомъ вращеніи постоянно имѣли направленіе движенія точки A и B , то ясно, что полная работа $R = P \times AC + P \times BD = 2P \times AC$. Но $OC \perp AC$ и слѣд. $R = Pa \alpha$ или

$$R = M \alpha \quad \dots \dots \dots (8)$$

т.е. работа пары равна произведенію момента пары на уголъ поворота.

II. Работа при перемещении тѣла въ равномерномъ полѣ.

Пусть AB (рис. 34) направление линий силъ въ рассматриваемомъ равномерномъ полѣ и пусть въ какомъ-то тѣло перемѣщается по произвольной траекторіи отъ точки S къ точке T . Проведемъ черезъ S и T двѣ плоскости

Рис. 33.

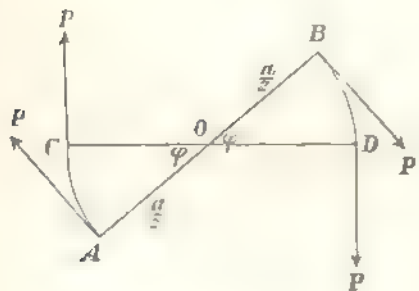
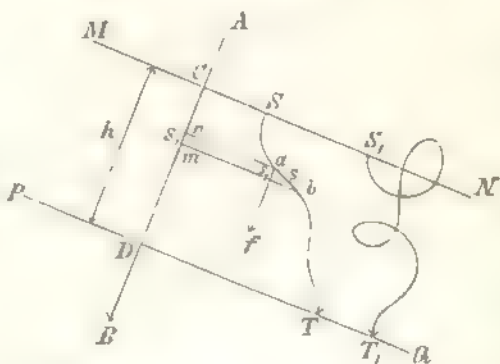
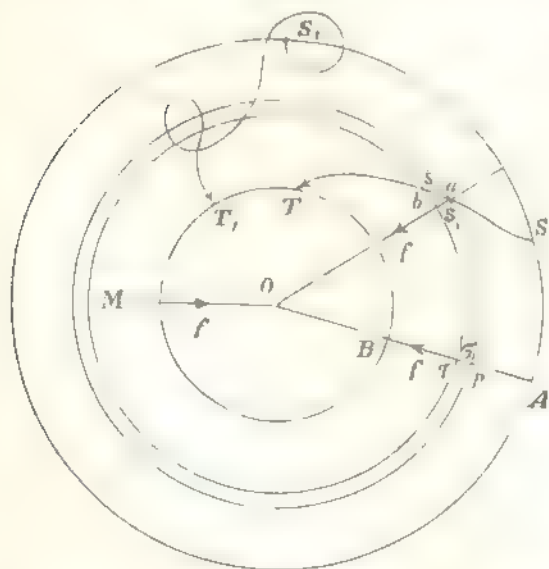


Рис. 34.



MN и PQ , перпендикулярно къ направлению силъ. Эти плоскости пересекутъ прямую AB въ точкахъ C и D , пусть $CD = h$ и пусть f сила, дѣйствующая на тѣло въ рассматриваемомъ равномерномъ полѣ. Разобьемъ

Рис. 35.



путь ST на малые отрѣзки; одинъ изъ нихъ, ab , обозначимъ черезъ s , проекцію его на направление силъ черезъ $s_1 = mn$, гдѣ an и bm перпендикулярны къ AB . Искомая работа $R = \text{пред.} \sum f s \cos(f, s) = \text{пред.} \sum f s_1$. Въ равномерномъ полѣ сила f постоянная, а потому множитель f можно взять за знакъ суммы. Получаемъ $R = f \text{ пред.} \sum s_1$; но послѣдняя сумма очевидно равна $CD = h$, слѣд.

$$R = fh.$$

Эта формула показываетъ, что работа, произведенная при перемѣщеніи даннаго тѣла въ равномерномъ полѣ дѣйствующими въ этомъ полѣ силами, не зависи-

тъ, ни отъ формы пути, ни отъ положеній начальной и конечной точекъ пути на плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ направлению линий

силь, но зависеть только отъ разстоянія этихъ плоскостей другъ отъ друга. Легко сообразить, что работа получится бы та же самая, еслибъ наше тѣло перешло бы отъ MN къ PQ по кривой S_1T_1 .

Если начальная и конечная точки пути лежатъ на одной и той же плоскости, перпендикулярной къ направлению силы, то работа равна нулю.

III. Работа центральныхъ силъ. Центральными называются силы, направленные во всякой точкѣ M пространства къ определенной точкѣ O (рис. 35) и зависящія только отъ разстоянія точки M отъ точки O . Положимъ сперва, что тѣло движется по прямой линіи, проходящей черезъ O отъ A до B . Раздѣливъ весь путь на элементы $s=pq$, получаемъ искомую работу

$$R = \text{пред.} \sum_1^n f s,$$

ибо сила f въ каждой точкѣ p имѣетъ направление перемѣщенія s . Буквы A и B обозначаютъ символически предѣлы, между которыми находится малое пути s .

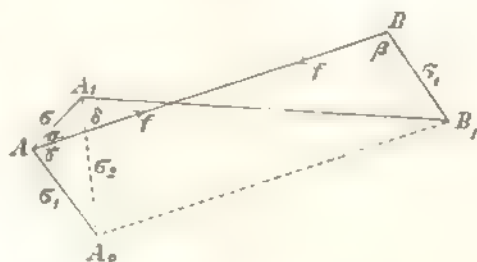
Проведемъ черезъ A и B шаровыя поверхности съ центромъ въ O и положимъ, что тѣло по произвольной кривой переходитъ отъ S къ T , причемъ S и T лежатъ на только что упомянутыхъ шаровыхъ поверхностяхъ. Проведемъ черезъ концы p и q элемента s шаровыя поверхности съ центромъ въ O ; они вырѣжутъ изъ пути ST малый отрѣзокъ $ab = s$. Замѣтимъ, что сила f по условію имѣетъ въ a и въ p одинаковую величину. Работа $R_1 = \text{пред.} \sum f s \cos(f, s)$, но при весьма маломъ s можно принять, что $s \cos(f, s) = s_1 = s$, слѣд.

$$R_1 = \text{пред.} \sum_1^n f s = R.$$

При дѣйствіи центральныхъ силъ, работа зависитъ только отъ тѣхъ двухъ концентрическихъ шаровыхъ поверхностей, съ центромъ въ центрѣ силъ, на которыхъ лежатъ начальная и конечная точки пути, но не зависитъ ни отъ specialнаго положенія этихъ точекъ на шаровыхъ поверхностяхъ, ни отъ вида траекторіи. Таже работа получится сы и при движеніи по кривой S_1T_1 .

IV. Работа внутреннихъ силъ. Силы съ которыми дѣйствуютъ другъ на друга матеріальныя точки, составляющія систему точекъ, называются внутренними силами. Допустимъ, что это силы центральныя. Докажемъ, что работа внутреннихъ силъ равна нулю, когда не мѣняется взаимное расположеніе точекъ, т.е. когда система движется, какъ цѣлое. Разсмотримъ двѣ точки A и B (рис. 36), перемѣстившіяся безъ измѣненія разстоянія, въ A_1 и B_1 . Ихъ взаимодействие выдѣляется двумя силами f и f_1 , которыя по третьему закону дѣйствія равны

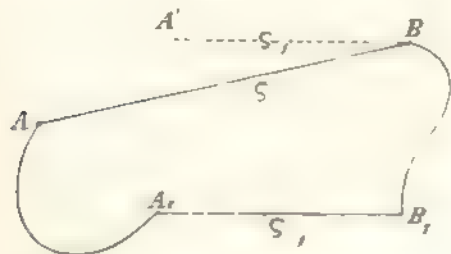
Рис. 36.



между собою (стр. 71) $f = f_1$. Пусть перемещения $AA_1 = \tau_1$ и $BB_1 = \tau_2$ бесконечно малы. Работа $R = f\tau \cos \alpha = f\tau_1 \cos \beta$. Проведем $AA_1 \parallel BB_1$ и $B_1A_1 \perp BA$ и соединим A с A_1 . Тогда $AA_1 \parallel BB_1 = \tau_1$, положим $A_1A_2 = \tau_2$. Очевидно $\tau \cos \alpha = \tau_1 \cos \beta + \tau_2 \cos \delta$, следовательно, имеем, полагая еще $f = f_1$, что $R = f \left\{ \tau_1 \cos \beta + \tau_2 \cos \delta + \tau_1 \cos \beta \right\}$. Но $\cos \beta = \cos \gamma$, да еще $\angle \delta = \angle A_1 A_2 B$ в преломлении припадает к прямому ибо $A_1B_1 \perp A_2B_1$; для бесконечно малых перемещений следует положить $\cos \delta = 0$, так что остается $R = 0$. Относя этот вывод ко всем парам точек, мы видим, что работа всех внутренних сил равна нулю, когда система движется как целое.

Докажем вторую теорему. Работа, произведенная внутренними силами при переходе из одного расположения в другое, не

Рис. 37.



зависит от того, каким образом совершился этот переход, т. е. по каким путям каждая из точек перешла от начального положения в окончательное. Рассмотрим две точки A и B (рис. 37), перешедшие в A_1 и B_1 ; пусть $AB = \rho$, $A_1B_1 = \rho_1$. Придадим совокупности обиль точек движение, которое в каждый данный момент равнялось бы движению точки B, но имело бы обрат-

ное ему направление. При этом мысленно добавленном движении работа внутренних сил будет равняться нулю на основании только что доказанной теоремы. Тогда B при этом останется неподвижно, а точка A перешедет в A' т. е. $BA' = BA$. Работа силы, действующей на A не зависит от того пути по которому точка от A перешла в A' , ибо действующая на нее сила, непрерывно направлена к неподвижной точке B, будучи силой центральной. Сказанное относится ко всем парам точек системы, следовательно, наша теорема доказана. Пользуясь тем, что если система точек, исходя из какого-либо расположения, возвращается через некоторое время к тому же взаимному расположению, то вся работа внутренних сил, произведенная за это время, равна нулю.

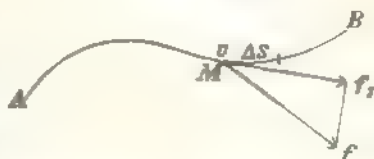
§ 3. Работа и живая сила. Положим, что некоторое тело пробегает путь AB (рис. 38) под действием системы сил, имеющих равнодействующую f, полагая, что источник этих сил находится во внешнем для тела пространстве, мы и сами силы будем называть внешними. На основании теоремы, доказанной на стр. 93, мы найдем работу R системы сил, произведенную при движении тела, если определим работу равнодействующей f. Эта работа дана, см. (7 а) стр. 92,

$$R = \text{пред.} \sum f, \Delta s.$$

гдѣ Δs одинъ изъ элементовъ, на которые мы разбиваемъ путь и $f_1 = -f \cos(f, \Delta s)$ тангенціальная слагаемая равнодѣйствующей f т.-е. слагаемая по направлению движения. Мы видѣли, что тангенціальная слагаемая есть причина тангенціального ускоренія w_1 и что $f_1 = mw_1$, такъ что

$$R = \text{пред.} \sum mw_1 \cdot \Delta s.$$

Рис. 38.



Допустимъ, что наше тѣло въ начальной точкѣ A пути обладало скоростью v_1 , а въ конечной точкѣ B скоростью v_2 , соответствующія значенія живой силы. (1) стр. 81. Пусть $J_1 = \frac{1}{2} mv_1^2$ и $J_2 = \frac{1}{2} mv_2^2$. Скорость въ промежуточной точкѣ M обозначимъ черезъ v , живую силу черезъ $J = \frac{1}{2} m v^2$. Пробѣжавъ элементъ пути Δs , тѣло будетъ обладать новою скоростью $v + \Delta v$ и новою живою силою, равною $\frac{1}{2} m (v + \Delta v)^2$. Измѣненіе живой силы обозначимъ черезъ ΔJ ; оно очевидно равно $\Delta J = \frac{1}{2} m \{ (v + \Delta v)^2 - v^2 \} = \frac{1}{2} m \{ 2v \Delta v + (\Delta v)^2 \}$. Полагая, что Δs , а слѣд. и Δv величины безконечно малы, мы можемъ пренебречь вторымъ членомъ въ скобкахъ и написать $\Delta J = mv \Delta v$. Полное измѣненіе живой силы за время пробѣга всего пути AB , т.-е. $J_2 - J_1 = \text{пред.} \sum \Delta J = \text{пред.} \sum mv \Delta v$. Но $\Delta v = w_1 \Delta t$, гдѣ Δt время пробѣга пути Δs , слѣд. $J_2 - J_1 = \text{пред.} \sum mv_1 \Delta t$; произведению $v \Delta t = \Delta s$, а потому

$$J_2 - J_1 = \text{пред.} \sum mv_1 \Delta s.$$

Сравнивая эту формулу съ послѣднимъ выраженіемъ для R , мы видимъ, что

$$R = \text{пред.} \sum f \Delta s \cos(f, \Delta s) = J_2 - J_1 = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \quad . \quad . \quad (9)$$

Эта формула, одна изъ важнѣйшихъ формулъ физики, показываетъ, что если тѣло движется подъ вліяніемъ вѣншихъ силъ, то работа этихъ силъ численно равняется приросту тѣломъ живой силы.

Для случая движения системы материальныхъ точекъ или физическаго тѣла, мы можемъ для каждой точки написать равенство (9); взявъ сумму этихъ равенствъ и обозначивъ черезъ R сумму работъ вѣншихъ силъ, дѣйствующихъ при перемѣщеніи системы на всѣ ея точки, мы получаемъ

$$R = J_2 - J_1 = \text{пред.} \sum \frac{1}{2} m v_2^2 - \text{пред.} \sum \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad (9.a)$$

Для случая вращенія тѣла около оси формула (3) стр. 90 даетъ

$$R = J_2 - J_1 = \frac{1}{2} K \omega_2^2 - \frac{1}{2} K \omega_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (9.b)$$

гдѣ K моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія; θ_1 и θ_2 угловыя скорости въ началѣ и въ концѣ того промежутка времени, въ теченіе котораго вѣщныя силы произвели работу R .

Положимъ, что на вращающееся тѣло дѣйствуетъ пара силъ, расположенныхъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія и пусть M моментъ этой пары силъ. Если тѣло, въ теченіе малаго промежутка времени dt повернется на уголъ $d\varphi$, то малая работа dR , произведенная парой силъ, равна $dR = M d\varphi$, см. (8) стр. 93. Эта работа должна равняться приращенію живой силы $J = \frac{1}{2} K \theta^2$, см. (9). Итакъ

$$M d\varphi = d \cdot \frac{1}{2} K \theta^2 = K \theta d\theta.$$

Раздѣляемъ обѣ стороны на dt

$$M \frac{d\varphi}{dt} = K \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Но $\theta = \frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt} = \ddot{\theta}$, угловому ускоренію (стр. 63). Остается

$$M = K \ddot{\theta} (10)$$

Моментъ пары силъ, расположенной въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія тѣла, равенъ произведенію момента инерціи тѣла относительно этой оси на его угловое ускореніе.

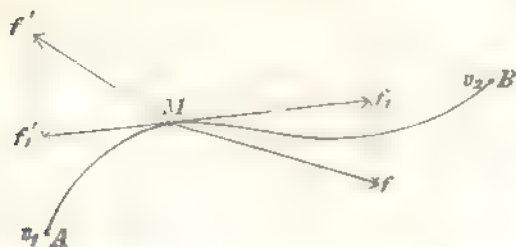
Если точки, изъ которыхъ состоитъ система, дѣйствуютъ другъ на друга съ какими-либо силами, то такія силы для данной системы назы-

ваются, какъ мы видѣли, внутренними; но для каждой отдѣльной точки, силы, съ которыми дѣйствуютъ на нее остальные точки системы, суть силы вѣщныя; при измѣненіи взаимнаго расположенія точекъ системы можно, поэтому, для каждой изъ нихъ написать равенство (9); остается вѣрнымъ и (9, б). Это показываетъ, что

если система точекъ, не подверженная вѣщнымъ силамъ, переходитъ изъ одного расположенія въ другое, то работа внутреннихъ силъ равна увеличенію живой силы системы.

Мы доказали, стр. 96, что эта работа не зависитъ отъ того, по какимъ путямъ точки системы перешли изъ начальнаго расположенія въ новое; отсюда слѣдуетъ такая теорема: если система точекъ не подвержена вѣщнымъ силамъ, то измѣненіе ея живой силы при переходѣ изъ одного расположенія въ другое не зависитъ отъ того, по какимъ путямъ точки перешли изъ начальнаго расположенія

Рис. 39.



въ окончательное. Если система возвращается къ прежнему положенію, то и живая сила принимаетъ прежнее значеніе.

Намъ остается разсмотрѣть общій случай движенія точки подѣ влияніемъ произвольной движущей силы f (рис. 39) и въ присутствіи произвольнаго сопротивленія f' . Обозначимъ черезъ f_1 и f_1' тангенціальныя составляемыя силы f и f' и пусть v_1 и v_2 скорости точки въ положеніяхъ A и B . Тангенціальная составляемая равнодѣйствующей всѣхъ силъ, вѣйствующихъ на нашу точку, равна $f_1 - f_1'$, а потому (9) стр. (97) даетъ

$$\text{пред. } \sum (f_1 - f_1') \Delta s = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2.$$

И въ этомъ случаѣ мы условимся $f_1 \Delta s$ называть элементарною, а $\text{пред. } \sum f_1 \Delta s$ всю работу движущей силы. Предыдущая формула даетъ

$$\text{пред. } \sum f_1 \Delta s = \text{пред. } \sum f_1' \Delta s + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Мы видимъ, что, въ самомъ общемъ случаѣ, работа движущей силы состоитъ изъ двухъ частей: одна «тратится» на преодоленіе сопротивленія, другая на измѣненіе живой силы точки. Если $f_1 > f_1'$, то $v_2 > v_1$ и точка движется ускоренно; она приобретаетъ живую силу. Если $f_1 < f_1'$, то $v_2 < v_1$ и движеніе точки замедленное: она теряетъ живую силу. Если, наконецъ, $f_1 = 0$, т. е. движущая сила нуль или нормальна къ траекторіи точки, то имѣемъ

$$\text{пред. } \sum f_1' \Delta s = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11, a)$$

Правая сторона уравненія представляетъ потерянную живую силу.

Въ частномъ случаѣ, когда f и f' направлены въ противоположныя стороны и остаются за все время движенія точки неизмѣнными по величинѣ и по направленію, (11) даетъ

$$fh = f'h + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ, см. формулу $R = fh$ и черт. 34 на стр. (94). h есть проекція пройденнаго пути на направленіе силъ f и f' . Въ случаѣ $f = 0$ имѣемъ

$$f'h = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12, a)$$

Приложимъ выведенныя нами формулы къ случаю движенія тѣла надъ поверхностью земли, пренебрегая при этомъ измѣненіемъ силы тяжести съ высотой и сопротивленіемъ воздуха.

1. При свободномъ паденіи, тѣло находится подѣ влияніемъ силы тяжести, т. е. своего вѣса p , который играетъ роль движущей силы. Въ этомъ случаѣ $f' = 0$ и (12) даетъ

$$ph = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12, b)$$

Проверим эту формулу для случая падения тела по направлению силы тяжести (по вертикальной линии). Постоянная сила вызывает и постоянное ускорение, которое мы обозначим через g . (см. (12) стр. 70; мы имеем $p = mg$). Для случая прямолинейного движения мы вывели формулу. (см. (22) стр. 56, $v_2^2 - v_1^2 = 2gs$, которая в нашем случае принимает вид $v_2^2 - v_1^2 = 2gh$. Помножая обе стороны этого равенства на $\frac{1}{2}m$ и принимая во внимание, что $p = mg$, получаем (12 б).

2. Полюбим, что тело начинать двигаться вверх, обладая начальной скоростью v_1 . В этом случае весь p играет роль сопротивления f в (12), между тем как $f = 0$. (12 а) даст

$$ph = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12, в)$$

И эту формулу легко проверить. Тело движется под влиянием постоянной силы p , имеющей направление, обратное направлению скорости; след. движение происходит с ускорением, равным g . На стр. 70 мы имели формулу (24): $v_1^2 - v_2^2 = 2gs$. Помножая на $\frac{1}{2}m$ и имея в виду, что $p = mg$, получаем (12. в).

3. Тело движется вертикально вверх под влиянием приложенной к нему движущей силы f , имеющей направление этого движения, весь тела p . Общая формула (11) даст для работы R движущей силы выражение

$$R = \text{прет.} \sum f \Delta h = ph = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (12, д)$$

где h вся высота подъема, Δh элемент пути.

Работа, произведенная при поднятии тела, состоит из двух частей: первая есть собственно «работа поднятия», вторая измѣряется живой силой, приобретенной поднимаемымъ теломъ. Только въ случаѣ $v_2 = v_1$ имѣемъ $R = ph$, т.-е. работа, произведенная при поднятіи тела тогда только равна работѣ поднятія, когда поднимаемое тело въ началѣ и въ концѣ движенія обладаетъ одинаковою скоростью, напр., скоростью нуль. Сила f въ нѣкоторыхъ частяхъ пути h можетъ быть при этомъ и больше p но зато въ другихъ она должна быть меньше p и и даже равняться нулю или отрицательной величинѣ.

При поднятіи килограмма на высоту одного метра тогда только совершается работа въ одинъ килограммъ-метръ, когда поднимаемая масса въ началѣ и въ концѣ поднятія обладаетъ одинаковою скоростью или находится въ покой.

§ 4. Работа и время. Мощность. Существуютъ приборы, снаряды или машины, котормъ, при опредѣленныхъ условіяхъ, способны производить опредѣленную работу R въ теченіе опредѣленнаго времени t и, въ теченіе, вообще говоря, неопредѣленно долгата времени повторять это произведеніе работы R въ какомъ изъ послѣдовательныхъ промежутковъ времени t , пока необходимыя для этого условія останутся выполненными.

Такъ, напр., паровая машина, при условии разветвления паровъ и постоянно поддерживаемой топкой, или водяной двигатель, при условии непрерывнаго притеканія къ нему достаточнаго количества воды, могутъ неограниченно долго, производить въ теченіе каждой минуты определенную работу. Побочныя обстоятельства, въ разѣ необходимости исправленія или чистки частей машины, могутъ ограничить срокъ такого ея дѣйствія. Человѣкъ и животное, при условии достаточнаго питания, обладаютъ поочередно же способностью, въ сѣбѣ большимъ ограниченіемъ срока дѣйствія вследствие беззастовитно необходимаго отдыха. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ мы говоримъ, что машина или животное обладаютъ мощностью (англ. power). Эта величина измѣряется тою работою, которую животное или машина, при соблюденіи определенныхъ условий, способны производить въ каждую изъ большаго ряда положительныхъ единицъ времени. Отсюда слѣдуетъ, что абсолютная единица мощности есть мощность машины, способной произвести по одной единицѣ работы въ каждую единицу времени. Такъ напр., килограммъ-метръ въ секунду представляетъ единицу мощности.

Въ технику общепринята другая единица мощности, названная лошадиною силою: это мощность машины, способной произвести работу въ 75 килогр.-метр. въ сек. Общепринято приписывать машинѣ обладаніе определенной мощностью и въ томъ случаѣ, когда условия, при которыхъ совершеніе ея работы возможно, не сообразены. Такъ говорить о «нормальномъ» двигателѣ: это такой двигатель, который при определенныхъ условияхъ можетъ произвести 75×3 килогр.-метровъ работы въ 1 сек.

C. G. S. единица мощности есть мощность машины, способной произвести одинъ эргъ въ одну секунду. Въ настоящее время преобладаетъ большое значеніе, въ особенности въ электротехникѣ, единица мощности, получившая названіе ваттъ. Это мощность, развивающая одинъ джоуль въ 1 сек.; на стр. 91 мы видели, (см. (5), каковъ расходъ равенъ джоуль; выражая его въ килогр.-метрахъ и принимая во вниманіе данное нами опредѣленіе лошадиной силы, мы видимъ, что

$$\begin{aligned} \text{ваттъ} &= \text{джоуль въ сек.} = 10 \text{ метарг. въ сек.} \\ &= 10^7 \text{ эрг. въ сек.} = 0.102 \text{ килогр. м. въ сек.} \\ \text{ваттъ} &= \frac{1}{736} \text{ лошад. силы.} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots (13)$$

§ 5. Энергія. Принципъ I. Ученіе объ энергіи должно признать за мнѣнiе изъ вѣдѣйшихъ, если не за вѣдѣйшій отдѣлъ современной физики, за несомнѣемый на вѣкъ фундаментъ, на который мы должны опираться, стараясь выяснитъ связь между явлениями окружающей насъ природы.

Если тѣло или группа тѣлъ способны совершать работу, то мы говоримъ, что они обладаютъ энергіею. Чѣмъ больше та работа, которую тѣло или система могутъ совершить, тѣмъ больше, говоримъ мы, ихъ «запасъ» энергіи. Какъ на примѣръ энергіи, укажемъ на движущееся тѣло или систему, которая, какъ извѣстно изъ еже-

Слѣдствіе 2. Perpetuum mobile невозможно. Perpetuum mobile есть такая система тѣлъ (напр. машина), которая, будучи приведена въ какое-либо движеніе, продолжала бы двигаться неопредѣленно долго, непрерывно совершая при этомъ работу. Изъ самаго опредѣленія энергии и изъ принципа I слѣдуетъ, что когда система совершаетъ работу, то ея способность къ дальнейшей работѣ должна уменьшиться. Непрерывное производство работы должно сопровождаться непрерывною убылью запаса энергии движенія (уменьшеніемъ скоростей), который, какъ и любая конечная, должна со временемъ истощиться.

Мы не знаемъ достоверно, встрѣчаютъ ли небесныя свѣтила при своихъ движеніяхъ сопротивленіе со стороны окружающей ихъ среды. Если такого сопротивленія не существуетъ, то возможность вѣчнаго движенія свѣтила не противорѣчила бы невозможности perpetuum mobile, ибо при движеніи свѣтила не тратилась бы энергія. Но на земной поверхности вѣчное движеніе системы неосуществимо, ибо, какъ мы видѣли (стр. 92), нѣтъ возможности избежать вредныхъ сопротивленій, на преодоленіе которыхъ непрерывно должна тратиться энергія движенія.

§ 6. Формы или виды энергіи. Изученіе физическихъ явленій показало, что существуетъ цѣлый рядъ различныхъ формъ или видовъ энергіи. Въ они раздѣляются на два разряда: энергія бываетъ кинетическая и потенціальная. Кинетическая энергія еще называется явной или энергіей движенія, а потенціальная — скрытою или энергіей положенія.

А. Энергія кинетическая, явная или энергія движенія. Во всѣхъ формахъ кинетической энергіи мы имѣемъ тѣло съ движеніемъ какого-либо вещества, т. е. матеріи или эфира. Найдемъ общее выраженіе для энергіи движенія. Пусть m есть движущаяся масса и v ея скорость въ данный моментъ. Для опредѣленія ея энергіи J , мы должны вычислить ту работу R , которая можетъ быть совершена при переходѣ массы изъ данного состоянія (скорость v) въ такое, при которомъ запасъ ея энергіи движенія истощенъ, т. е. ея скорость нуль. Слѣдствіе 1 (стр. 102) показываетъ, что работа R не зависитъ отъ того, какимъ образомъ была совершена переходъ отъ движенія къ покою. Предположимъ, поэтому, что на тѣло стала дѣйствовать нѣкоторая постоянная сила f , имѣющая направленіе прямо противоположное направленію начальной скорости v . Подъ вліяніемъ силы f тѣло начнетъ двигаться съ отрицательнымъ постояннымъ ускореніемъ — $w = -(f/m)$, т. е. скорость уменьшится въ единицу времени на w и, наконецъ, дойдетъ до нуля, пройдя нѣкоторый путь, который мы обозначимъ черезъ h . Изъ опредѣленія термина «работа» слѣдуетъ, что когда сопротивленіе f преодолевается на протяженіи пути h то производится работа R , равная $f \cdot h$. Формула (12.а) стр. 99, въ которой, въ данномъ случаѣ, слѣдуетъ положить начальную скорость $v_1 = v$ и окончательную $v_2 = 0$. Пусть $R = f \cdot h = \frac{1}{2} m v^2$, съѣд. искомая энергія

$$J = R = \frac{1}{2} m v^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Энергия движения тѣла опредѣляется его живою силою. Отсюда слѣдуетъ, что работа произведенная въ теченіе даннаго времени движущимся тѣломъ, измѣряется потерянною имъ живою силою. Если за это время скорость уменьшилась отъ v_1 до v_2 , то произведенная работа R равна

$$R = J_1 - J_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \dots \dots \dots (16)$$

Сравненіе этой формулы съ (9) стр. 97 показываетъ, что если работа совершается внешними для тѣла силами, то она измѣряется приращеніемъ живой силы тѣла; если же работа совершается тѣломъ, т.е. на счетъ его запаса энергии движенія, то эта работа измѣряется убылью его живой силы. Энергію движенія системы точекъ, измѣряетъ ее живая сила, т.е. величиною

$$J = \sum \frac{1}{2} m v^2.$$

Переходимъ къ обзору различныхъ видовъ живой энергии.

I. Энергія движенія тѣла, какъ извѣстно, сюда относятся всѣ случаи, при которыхъ содѣяны частицы матеріи, входящей въ составъ тѣла, обладаютъ одинаковыми или весьма мало различающимися скоростями. Живая сила движенія тѣла служитъ мѣрою той работы, которую тѣло можетъ произвести. Сюда относятся энергія поступательнаго движенія ядра, энергія вращенія тѣла, энергія вѣтра, тѣкущей воды; давленіе, энергія колебательныхъ движеній тѣлъ или ихъ частей и энергія звуковая также должны быть отнесены сюда по крайней мѣрѣ въ опредѣленныхъ стадіяхъ этихъ движеній.

II. Энергія тепловая. Теплота есть форма энергии; на счетъ ее запаса можетъ быть произведена работа. Тепловая энергія измѣряется живою силою безпорядочныхъ движеній частицъ, изъ которыхъ состоитъ тѣло; при этомъ содѣяны частицы могутъ имѣть скорости различныя по величинѣ и по направленію. Когда на счетъ тепловой энергіи тѣла совершается работа, то часть этой энергіи исчезаетъ, скорость движенія частицъ уменьшается и само тѣло охлаждается. Цѣль сомнѣнія что и тепловая энергія есть величина конечная, хотя до сихъ поръ не удалось исчерпать этого запаса энергіи, т.е. отнять отъ какого-либо тѣла всю его тепловую энергію.

Абсолютная единица количества теплоты есть такое его количество, которое должно затратить для получения абсолютной единицы работы.

C. G. S. единица тепла есть эргъ. Для измѣренія тепловой энергіи или, проще, количества теплоты употребляютъ и другія единицы, напр. большую или малую калорію; это тѣ количества тепла, которыя потребны, чтобы нагрѣть одинъ килограммъ или одинъ граммъ воды на 1° Ц. Обозначимъ черезъ Q численное значеніе пѣкотораго количества тепла и черезъ R ту работу, которая получится при его затратѣ. Говорятъ, что тепло Q и работа R другъ другу эквивалентны. Въ какихъ бы еди-

ницах мы вычисляли Q и R эти два числа другъ другу пропорциональны, такъ что можно положить

$$R = EQ. \quad (17)$$

гдѣ E множитель пропорциональности. Полагая

$$A = \frac{1}{E} \quad (18)$$

получаемъ

$$Q = AR \quad (19)$$

Коэффициентъ E называется механическимъ эквивалентомъ тепла, это то число единицъ работы которыя эквивалентны одной единицѣ тепла. По (17) дается $E = 1$ при $Q = 1$. Обратный коэффициентъ A называется термическимъ коэффициентомъ работы, это то число единицъ тепла, которыя эквивалентны одной единицѣ работы. По (19) дается $Q = A$ при $R = 1$.

Опыты, которые мы подробно рассмотримъ въ отѣлѣ о теплотѣ, показываютъ, что если за единицу теплоты принять единицу калорію и за единицу работы килограммъ-метръ, то $E = 426$, это означаетъ что

$$1 \text{ калорія калора эквивалентна } 426 \text{ килогр. метрамъ.} \quad (20)$$

Принимая во вниманіе соотношенія (5) стр. 91, мы легко находимъ связь между абсолютными единицами тепла и работы. Изъ этихъ соотношеній слѣдуетъ, что килогр.-метръ равенъ 981 метрѣмъ = 9.81 дж. и, съ другой стороны метръ калора, равный 0.001 абсолютной калоріи эквивалентна 0.426 килогр.-метрамъ. Отсюда легко получается

$$\left. \begin{aligned} \text{Малая калорія} &= 4.18 \text{ метрѣмъ} = 4.18 \text{ дж.} \\ \text{Дж.} &= 0.24 \text{ мал. калорій.} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Въ учении о теплотѣ мы подробнѣе разберемъ этотъ вопросъ и дадимъ болѣе строгое опредѣленіе калоріи.

III. Лучистая энергія эфира. Мы видѣли изъ стр. 8, что эфиры могутъ производить пертурбаціи, распространяющіяся отъ одного мѣста къ другому. Часть эфира, въ которой совершается пертурбація, обладаетъ запасомъ энергіи, который измѣряется линою силой движенія частицъ эфира. Распространеніе пертурбаціи есть не что иное, какъ передача энергіи отъ однихъ частей эфира къ другимъ. Скорость этой передачи въ свободномъ эфирѣ (пустота въ обыкновенномъ смыслѣ слова) не зависитъ отъ характера пертурбаціи, т.е. отъ вида передаваемого движенія и равна

$$c = 300,000 \text{ килом. въ сек.} = 3 \cdot 10^{10} \text{ сантим. въ сек.} \quad (22)$$

Примѣрами лучистой энергіи эфира могутъ служить видимый свѣтъ, инфракрасныя лучи (т. наз. ультракрасныя, которые прежде назывались тепло-

выми и лучи ультрафиолетовые) и электрические дуги Герца, которые мы рассмотрим впоследствии (Часть II, Гл. первая).

IV. Кинетическая энергия эфира называемая электрическим током (электрическая энергия тока). Электрический ток представляет собой явление, условия возникновения которого весьма хорошо известны, равно как и законы, которым оно подчиняется. О внутренней сущности этого явления мы, однако, не имеем ясно, установившихся пока наук, представлений. Сь достоверностью мы можем только сказать, что электрический ток представляет особый случай энергии движения эфира, которым можно воспользоваться для производства работы (электрические двигатели). Но о характере движения и даже о том, где оно происходит, нам ничего достоверного неизвестно. Прежде всего, что электрическая энергия тока несомненно содержится в тѣлах проводниках (напр. проволоках) через которые, как принято говорить, «ток течет». Но есть повод полагать, что эта энергия большей частью, или вся содержится в эфире пространства, окружающего упомянутые проводники.

В. Энергия потенциальная, скрытая или энергия положения. Мы встречаемъ въ природѣ разнообразныя случаи энергии, т.е. способности производить работу, зависящей отъ взаимнаго расположенія двухъ или многихъ тѣлъ. Теоретически говоря, отдѣльная материальная точка можетъ обладать только кинетическою энергіею (движения), потенциально же энергіей можетъ обладать только совокупность по крайней мѣрѣ двухъ материальныхъ точекъ. Для этого необходимо, чтобы между этими двумя материальными точками существовало стремление сблизиться другъ съ другомъ или стремление удалиться другъ отъ друга или, вообще, чтобы притягиваніе одного тѣла вызывало силу, дѣйствующую на другое тѣло. Вопросъ о причинахъ возникновения такой силы мы оставимъ въ сторонѣ.

а) Если два тѣла стремятся сблизиться или, какъ принято говорить, взаимно «притягиваются», то это стремление можетъ явиться источникомъ работы, выражающейся либо въ преодоленіи взаимныхъ сопротивленій, противодействующихъ сближенію тѣлъ, либо въ преодоленіи инерціи самихъ тѣлъ, представляющихъ ускоренное движеніе. Запасъ энергіи очевидно, тѣмъ больше, чѣмъ дальше тѣла находятся другъ отъ друга и уменьшается, когда, производя работу, тѣла сближаются. Итакъ, мы видимъ, что запасъ энергіи въ этомъ случаѣ зависитъ отъ взаимнаго расположенія тѣлъ.

б) Если два тѣла стремятся удалиться другъ отъ друга или, какъ принято говорить, взаимно «отталкиваются», то и это стремленіе можетъ явиться источникомъ работы. Запасъ энергіи тѣмъ больше, чѣмъ ближе тѣла находятся другъ къ другу; онъ уменьшается по мѣрѣ удаленія ихъ другъ отъ друга. Ясно, что и въ этомъ случаѣ запасъ энергіи зависитъ отъ взаимнаго расположенія тѣлъ.

Понятно, почему въ этихъ двухъ случаяхъ энергія называется энергіей скрытой или энергіей положенія.

Вопроса о причинахъ стремленія тѣлъ сблизиться или удалиться

другъ отъ друга мы зѣсь касаться не будемъ. Разсмотримъ различные виды потенциальной энергии.

I. Энергия массъ, притягивающихся по закону всемирнаго тяготѣнія. Совокупность реальныхъ двухъ несоприкасающихся массъ обладаетъ, въ силу существованія между ними тяготѣнія, энергиею положенія. Солнце и южная планета, взятые вмѣстѣ, или напр., ямы и глыба взятые вмѣстѣ обладаютъ весьма большимъ запасомъ потенциальной энергии.

Принято говорить объ энергій приподнятаго тѣла, но всякое тѣло, поднятое до вѣкотораго горизонта надъ поверхностью земли, способно, опускаясь, производить работу. Но строго говоря, въ данномъ случаѣ энергій обладаетъ не приподнятое тѣло, но совокупность двухъ притягивающихся тѣлъ земли и приподнятаго тѣла.

Потенциальная энергия притягивающейся системы тѣлъ или материальныхъ точекъ зависитъ (принципъ I, стр. 102) только отъ ихъ взаимнаго расположенія. При всякомъ смѣщеніи системы производится работа, величина которой зависитъ только отъ первоначальнаго и окончателнаго расположенія частицъ. При переходѣ матеріи, составляющей свѣтъ, изъ первоначальнаго разреженнаго состоянія (стакана) въ болѣе густое, происходитъ огромная потеря потенциальной энергии, на счетъ которой производится эквивалентная работа. Потенциальная энергия приподнятыхъ вѣрь стѣнныхъ часовъ служитъ источникомъ совершающагося въ часахъ работы. Потенциальная энергия обладаетъ служить источникомъ работы водяныхъ мельницъ и т. д.

II. Энергия положенія однородныхъ частицъ. Между частями однородныхъ тѣлъ дѣйствуютъ особаго рода силы, характеръ которыхъ еще мало извѣстенъ. Смотри по условіямъ частицы обираются, стремясь сблизиться или удаляться другъ отъ друга и въ этомъ заключается источникъ запаса потенциальной энергии положенія частицъ.

Сюда относится энергия упруго-измѣняющаго тѣла. Пружина, смотря по ея виду, согнута, сдвинута, растянута или сжата, обладаетъ способностью произвести работу, при совершеніи которой она изгибается, удлиняется, укорачивается или раскручивается, тѣмъ при чемъ часть запаса рассматриваемой энергии, т.-е. способности къ дѣйствію, переходитъ въ работу. Измѣненіе во взаимномъ расположеніи частицъ, сопровождающее деформацию упругаго тѣла и является здѣсь причиной возникновения потенциальной энергии положенія.

Сюда же относится та энергия положенія частицъ, которая особенно тѣло мѣняется при переходѣ тѣла изъ твердаго состоянія въ жидкое и изъ жидкаго въ газообразное и обратно и менѣе рѣзко при всякомъ измѣненіи объема тѣла или его температура. Мы увидимъ далѣе, что величина, являющаяся изъ элементарнаго курса физики подъ названіемъ «скрытой теплоты», находится въ тѣсной связи съ рассматриваемымъ видомъ энергии положенія.

III. Энергия химическая. Совокупность двухъ тѣлъ, способныхъ соединиться химически, обладаетъ способностью произвести работу. Уголь, кислородъ, водородъ и хлоръ, серная кислота и вода обладаютъ, попарно,

запасом химической энергии, которой можно воспользоваться для производства работы (горение угля, как источник работы в паровых двигателях). Когда из атомов образуется молекула то потенциальная уже не обладает тем запасом химической энергии, который в момент образования молекулы была потрачена на производство работы. Необходимо заметить, что два атома одной и той же материи также обладают потенциальной энергией, если молекула этой материи содержит два или большее число атомов. Так, напр., два атома водорода H до соединения их в молекулу H_2 обладают особой потенциальной энергией: тоже самое относится и к двум атомам газа J до соединения их в молекулу J . Оказывается, что потенциальная энергия, которая тратится при образовании одной молекулы H и одной молекулы J , даже больше той, которая тратится при образовании двух молекул соединения HJ (водистый водород). К рассматриваемому виду потенциальной энергии относится и энергия взрывчатых смесей как напр. пороха.

IV. Энергия электростатическая. Мы видели, стр. 8, что в эфире могут происходить деформации, подобно тому, как в материи. Деформированный эфир содержит часть потенциальной энергии аналогичной энергии упруго-изменяемого тела. Пространство, занимаемое деформированным эфиром, представляет особый случай динамического поля, называется электрическим полем. Материя, помещенная в такое поле, обнаруживает разного рода явления. Если она принадлежит к т. наз. проводникам (напр. к металлам), то деформации (натяжения) упрочаются на ее поверхности, вследствие чего она подвергается особому рода давлению, могущим заставить ее перевернуться в том или другом направлении. Такой проводник называется электризованным и принято ему приписывать ту энергию, которая, в действительности, содержится в окружающем эфире. Если в электрическом поле находятся несколько проводников, то, смотря по расположению деформаций, эти тела будут стремиться или сблизиться, или удалиться друг от друга, т. е., как бы притягиваться или отталкиваться. Внутри проводников установившаяся деформация эфира невозможна, внутри же непроводников, т. наз. диэлектриков эфир может подвергаться деформациям и в этом случае говорят, что диэлектрик поляризован, и в нем замечается стремление перемещаться в электрическом поле в том или другом направлении. Электрическая энергия деформации эфира может тратиться на работу перемещения проводников, и непроводников или на работу вызывания пертурбации в самом эфире.

«Заряженный» действующий банк есть тело, заключающее в себя запас электрической энергии состоящей почти только из потенциальной энергии деформированного эфира, накапливается в стенах банки. При «разряде» банки может быть произведена работа (напр. ионообразование стеклянной пластинки) на счет запаса электрической энергии.

V. Энергия магнитная. Скажем и об этой форме несколько слов, хотя она врантно тождественна с рассмотренной выше электрической энергией тока. Полюсы естественных и искусственных магнитов

стремятся или сблизиться (одноименные полюсы) или удалятся друг от друга (разноименные полюсы). Отсюда следует, что совокупность двух магнитов обладает особой формой энергии положения, которую назовем энергией магнитной. И она, несомненно, по существу есть энергия, принадлежащая эфиру того пространства, которое окружает магниты. Это пространство, также представив частный случай динамического поля, называется магнитным полем. Но мы увидим впоследствии, что пространство, окружающее электрические токи по своим свойствам абсолютно ничем не отличается от пространства, окружающего магниты; след. первое есть также магнитное поле. Отсюда можно заключить о внутренней тождественности электрической энергии тока и т. наз. магнитной энергии.

Покончивъ съ обзоромъ видовъ энергии, мы замѣтимъ слѣдующее: весьма вѣроятно, что потенциальной энергии въ мірѣ, вовсе не существуетъ, что энергии только и можетъ быть энергія движенія и что во всѣхъ случаяхъ, когда намъ кажется, что наличность энергии зависитъ только отъ наличности опредѣленнаго расположенія тѣлъ, въ действительности мы имѣемъ дѣло съ какою-либо особой формой движенія, причемъ намъ пока только извѣстно, что движется и каковъ характеръ движенія. Некоторые формы энергии, которыя прежде причислялись къ потенциальнымъ, нынѣ причисляются къ формамъ кинетическимъ. Такъ, напр., энергія сжатаго газа, очевидно способнаго произвести работу, прежде считалась за энергию потенциальную. На стр. 34 было указано, какою формою нынѣ объясняется движеніе газовъ и ихъ стремленіе расширяться. Изъ этого объясненія явствуетъ, что энергии сжатого газа есть энергия движенія его частицъ, тождественная съ энергіей тепловой и слѣд. есть форма энергіи кинетической.

§ 7. Принципъ II. Сохраненіе энергіи. Въ предыдущихъ параграфахъ мы познакомились съ энергіей, какъ со способностью производить работу; работа же выражается или продолжаясь силой, сопротивляющейся движенію тѣла, или продолжаясь инерціей тѣла, т. е. увеличеніемъ его скорости. Дѣло мы рассмотрѣли различныя виды энергіи кинетической и потенциальной.

Эквивалентными количествами энергіи различнаго вида называются количества, численно равныя, т. е. соответствующія способности произвести одинаковую работу. Мы теперь можемъ формулировать

Принципъ II. Энергія не исчезаетъ и не образуется вновь, энергія одного вида можетъ перейти въ эквивалентное количество энергіи другого вида. Это принципъ сохраненія энергіи. Тщательное изученіе окружающихъ насъ явленій привело къ открытію этой великой истины, составляющей одинъ изъ главныхъ фундаментовъ современной физики и играющей въ ней одинаковую роль съ принципомъ сохраненія вещества, доказаннымъ въ основаніи химіи.

Изъ принципа II вытекаютъ рядъ слѣдствій.

Слѣдствіе 1. Результатомъ всякой произведенной работы должно явиться эквивалентное этой работѣ количество

энергии какой-либо формы. Действительно работа R могла быть произведена только на счет запаса какой-либо энергии, который при этом уменьшается на некоторую величину J , численно равную R . Но второй принцип говорит, что энергии не может исчезнуть, но может лишь перейти в другой вид, а потому уменьшение данного запаса энергии на величину J должно сопровождаться одновременным появлением такого же количества J энергии той-же или иной формы, которое и можно разматривать, как результат или следствие произведенной работы R .

Всё явление окружающей нас природы, если в нём заключается признак что либо изменяющегося, существенно заключается в преобразовании одного вида энергии в другой. Работа является лишь промежуточным, связующим звеном: она производится на счет той энергии, запас которой уменьшается, а ее результатом является живая и полезная энергия, запас которой увеличивается. Система (или отдельное тело), обладающая первым запасом, отдает энергию и «производит работу». Система, в которой накапливается новая энергия, является объектом, над которым остальной мир совершает работу, преодолевая исходящая от нее сопротивление; в этом случае условились говорить, что эта система совершает отрицательную работу.

Следствие 1 показывает, что всякое преобразование сопротивления сопряжено с появлением какой-либо формы энергии.

Для случая энергии движения, т.е. живой силы, всё упомянутое здесь соотношения уже доказаны нами вполне строго: мы видели (стр. 104), что работа, совершаемая на счет запаса живой силы системы, измеряется уменьшением этого запаса и что, наоборот, система, подверженная действию внешней силы, т.е. система, над которой внешний мир совершает работу или которая совершает отрицательную работу, приобретает живую силу, которая измеряется этой работой, заключающейся в преодолении инерции системы. Понятно, что мы при этом предполагаем, что вся работа идет только на увеличение скорости частей системы.

То, что строго доказано для живой силы, распространяется вторым принципом на все формы энергии: преобразование сопротивления всегда сопровождается появлением эквивалентного количества какой-либо формы энергии.

Следствие 2. Если система (или одно тело) возвращается к первоначальному состоянию, то вся работа произведенная исходящими от нее силами, равна нулю. Принцип 1 показывает, что запас энергии системы принимает первоначальное значение, а потому произведенная ею работа должна явиться той работой, которая совершена над нею внешним миром и которую мы условились считать за отрицательную работу самой системы. Сумма работ системы равна след. нулю.

Принцип сохранения энергии в его самом общем виде не может быть доказан, т.е. вывести из начал механики. Если бы можно было доказать, что все силы, действующие в природе, суть силы центральные (см. стр. 95), то и принцип сохранения энергии мог бы быть выведен

съ полною строгостью. Но пока мы этого сказать не можем и должны смотреть на этот принципъ, какъ на истину, добытую путемъ индукции и подтверждаемую всеми явлениями окружающей природы.

Слѣдствие 3. Энергія системы, между которой и остальнымъ міромъ нѣтъ механическихъ соотношеній, есть величина постоянная. Весь запасъ энергіи, содержащійся въ системѣ и могущій состоять изъ разнообразныхъ частей, можетъ подвергаться невозможнымъ преобразованіямъ; полное количество энергіи остается постояннымъ.

Не слѣдуетъ распространять этой истины на весь міръ и говорить «энергія міра постоянна». Ибо о мірѣ, какъ цѣломъ, мы ничего не знаемъ и потому не имѣемъ права распространять на него того, что эмпирически вѣрно для доступной нашему наблюдению его части.

Мы упомянули, что въ явленныхъ окружающей природы мы имѣемъ дѣло съ непрерывными превращеніями энергіи изъ одного вида въ другой. Считаемо необходимымъ разъяснить это болѣе широкимъ числомъ примѣровъ, ограничиваемыхъ немногими. Тѣло падаетъ: переходъ потенциальной энергіи подвигнутаго тѣла въ кинетическую энергію движенія и затѣмъ, при ударѣ объ землю, въ теплоту, которая переходитъ въ энергію лучистую. Колѣсани другой пластинки непрерывныя переходы энергіи упруго-измѣняемаго тѣла въ энергію движенія и обратно. Паровой двигателъ химическая энергія топлива въ тепловую энергію пара и затѣмъ въ энергію движенія частей машины. Станция системы, напр. тумана при образовании сгѣстѣе потенциальная энергія притягивающаго мѣсяца въ энергію поступательнаго движенія, а затѣмъ, когда происходитъ соудареніе частицъ, въ энергію тепловую. Въ растеніяхъ лучистая энергія солнечныхъ лучей переходитъ въ химическую энергію образуемыхъ органическихъ соединеній, которая при питаніи человека и животныхъ, сосредоточиваясь въ мышцахъ, составляетъ запасъ энергіи, которымъ въ опредѣленной мѣрѣ, располагаетъ body; при оканченіи человѣкомъ или животнымъ работы, этотъ запасъ уменьшается. Въ дальнейшемъ мы встрѣтимся со многими примѣрами перехода одного вида энергіи въ другой и примѣненіями принципа сохраненія энергіи.

§ 8. Принципъ III. Переходы энергіи изъ одного вида въ другой описываются еще одному принципу, которымъ мы впоследствии разберемъ подробно, но на которомъ мы, ради полноты, считаемъ необходимымъ указать уже здѣсь.

Принципъ III. Въ превращеніяхъ энергіи существуетъ одного рода сторонность. Одни превращенія могутъ происходить сполна и сами собою, другіе же лишь при особомъ условіи и притомъ только часть даннаго запаса энергіи можетъ подвергнуться разсматриваемому превращенію. Напр., превращеніе «работы въ теплоту», или, точнѣе, запаса особой формы энергіи, потуженной на производство этой работы—въ теплоту, можетъ происходить само собою и притомъ вся работа можетъ дать эквивалентное количество теплоты. И паденіи поднятаго камня вся его энергія движенія превращается въ теплоту; тоже самое происходитъ при всякомъ тѣннн, замедляющемъ движеніе. Вся энергія электрическаго тока можетъ сама собою израсходиться и

въ теплоту. И наоборотъ, невозможно затратить данный запасъ тепловой энергии на производство работы безъ того, чтобы эта затрата не сопровождалась некоторыми посторонними явлениями. Причемъ оказывается, что лишь часть запаса тепловой энергии полезно затрачивается на производство работы, другая же часть окончательно теряетъ способность при данныхъ условіяхъ произвести работу.

Другимъ примѣромъ превращенія энергии можетъ служить уменьшеніе кинетической энергии быстро движущихся частицъ и одновременное живительное увеличеніе энергии другихъ, болѣе медленно движущихся частицъ. Иначе выражаясь — переходъ тепла отъ болѣе нагрѣтаго къ болѣе холодному тѣлу. И это превращеніе постоянно происходитъ само собою. Обратное же превращеніе возможно только при особыхъ условіяхъ, которыя разсмотримъ вполнѣтѣни. Пока ограничимся этимъ краткимъ указаніемъ на существованіе сторонности въ превращеніяхъ одного вида энергии въ другой.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Гармоническое колебательное движеніе.

§ 1 Геометрическое прохожденіе гармоническаго колебательнаго движенія. Между различными движеніями, съ которыми приходится имѣть дѣло, изучая физическія явленія, играютъ особенно важную роль т. наз. периодическія движенія, т.-е. такіе, при которыхъ данная точка повторяетъ число разъ повторить одно и то же движеніе, употребляя на это каждый разъ одинаковое время T . Въ какой бы мы моментъ времени ни опредѣлили положеніе точки и величину и направленіе ея движенія, спустя время T точка будетъ находиться на томъ же мѣстѣ и обладать такою же, по величинѣ и по направленію, скоростью. Периодическія движенія могутъ быть безъ извѣстно разнообразны, какъ по виду траекторіи, по которой движется точка, такъ и по характеру самого движенія: простѣйшее по характеру периодическое движеніе есть равномерное движеніе по окружности.

Изъ всѣхъ периодическихъ движеній слѣдуетъ, однако, болѣе важнымъ признать т. наз. гармоническое колебательное движеніе. Но всякое периодическое движеніе можетъ быть получено какъ результатъ сложения одинаковаго или менѣшаго числа (иногда безконечно многихъ) гармоническихъ колебательныхъ движеній. Какъ показываетъ само названіе эти простѣйшія движенія имѣютъ характеръ «колебаній», т.-е. точка движется взадъ и впередъ по отрѣзку кривой между двумя опредѣленными крайними ея точками. Намъ вообще придется разсматривать только движенія по отрѣзку прямой и по дугѣ круга, а пока ограничимъ изслѣдованіемъ первое случай, т.-е. прѣмолинейнаго гармоническаго колебательнаго движенія; для краткости, мы въ дальнѣйшемъ будемъ отбрасывать слово «прямолинейное».

Оставивъ пока въ сторонѣ вопросъ о механическихъ условіяхъ, при

которых точка совершает гармоническое колебательное движение, укажем прежде всего на геометрические условия его происхождения.

Вообразим окружность $ACBD$ (рис. 40) и пусть ее радиус $OA = a$; по этой окружности, через центр O которой проводим диаметр AOB , движется точка N с постоянной скоростью k . Движение, которое в этом случае совершает проекция M точки N на диаметр AB ($NM \perp AB$) будем называть гармоническим колебательным движением.

Общий характер его определяется из следующего: когда N находится в C , точка M совпадает с O ; пока N проходит первую четверть CB окружности, точка M перемещается от O к B , в какой-то точке M и N совпадают; когда затем N движется по второй четверти BD окружности, M идет обратно от B к O ; далее N проходит третью четверть DA в то время, как M движется от O к A ; наконец движению точки N по четвертой четверти AC соответствует возвращение M от A к O . Далее это же движение повторяется неопределенное число раз.

Совершаясь между крайними точками A и B , крайнее расстояние $OA = OB = a$, на которое точка M удаляется от своего среднего положения O , называется амплитудой (полуразмахом) колебательного движения. Время, потребное для совершения одного полного колебания, обозначим через T , оно называется также периодом колебания. В начале и в конце времени T точка M находится в одном и том же месте и обладает одинаковою по величине и по направлению скоростью. Так, напр., за время T точка может пройти путь $OB O A O$ или $MB M O A O M$; в это же время N описывает полную окружность (соответственно $CB D A C$ или $N B N_1 D A C N_1$).

Между амплитудой a , скоростью k точки N и временем T существует простая зависимость, которую мы получим, написав, что точка N , идя равномерно со скоростью k , проходит во время T путь $2\pi a$. Это дает нам равенство

$$2\pi a = kT \quad (1)$$

§ 2. Пройденный путь и фаза при гармоническом колебательном движении. Обозначим переменное расстояние OM точки M от ее среднего положения O через s и выразим s , как функцию времени t , считая его от момента, когда точка M , находясь в O , движется по направлению OB , в котором мы величины s будем считать положительными. Обозначим $\angle CON = \angle OXM$ через β . Из рис. 40 видно, что

$$s = a \sin \beta. \quad (2)$$

Обобщим формулу (4), полагая, что время считается съ произвольнаго момента и пусть при $t=0$ наша точка находится въ M_0 (рис. 41); проводя $M_0N_0 \perp AB$ и соединяя N_0 съ O , находимъ т. наз. начальную фазу $\beta_0 = \angle CON$. Положимъ, что въ течение времени t точка перешла отъ M_0 въ M ; въ это же время точка, равномерно движущаяся по окружности, прошла дугу N_0N , едѣ $NM \perp AB$. Пусть $\angle NON = \beta_1$. Фазу точки M обозначимъ черезъ β ; мы имѣемъ $\beta = \angle CON = \angle ONM$ и по предположенію $s = OM = a \sin \beta$. Но $\beta = \angle CON = \angle CON_0 + \angle N_0ON = \beta_0 + \beta_1$. Для β_1 имѣемъ

$$\frac{\beta_1}{2\pi} = \frac{t}{T}; \text{ слѣд. } \beta = \beta_0 + \beta_1 = 2\pi \frac{t}{T} + \beta_0.$$

Вставляя это въ $s = a \sin \beta$, получаемъ окончательно

$$s = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_0 \right). \quad . \quad . \quad (6)$$

Если время считать отъ момента, когда точка находится въ крайнемъ положеніи B , то $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$; тогда получается

$$s = a \cos 2\pi \frac{t}{T}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

что при $t=0$ даетъ $s=a$. Формула (6) показываетъ, что промежутокъ времени τ между моментомъ, когда точка находится въ O , движется въ положительную сторону (къ B) и моментомъ t , отъ котораго мы считаемъ время t , связанъ съ полнымъ фазою β_0 и съ видомъ функции $s=f(t)$ слѣдующимъ образомъ

$$\left. \begin{array}{l} \tau = 0 \quad \frac{T}{4} \quad \frac{T}{2} \quad \frac{3T}{4} \quad T \\ \beta_0 = 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{3\pi}{2} \quad 2\pi(0) \\ s = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad a \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad -a \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad a \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad -a \sin 2\pi \frac{t}{T} \end{array} \right\} . \quad . \quad (8)$$

§ 3. Скорость, ускореніе, сила и энергія при гармоническомъ колебательномъ движеніи. Скорость v точки M , совершающей гармоническое колебательное движеніе, можетъ быть найдена различными способами. На основании общаго выраженія для скорости, (8) стр. 51, и пользуясь формулою (44) стр. 39 мы находимъ изъ выраженія (4)

$$v = \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Обозначая фазу вообще через β , получаемъ на основаніи (1) стр. 113

$$v = k \cos \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

При $\beta = 0$ имѣемъ скорость $v_0 = k$; это показываетъ, что скорость, съ которою точка M (рис. 40) проходитъ черезъ среднее положеніе O , равна скорости равномернаго движенія точки X по окружности. Формула (10) получена непосредственно на основаніи (44) стр. 39; она же можетъ быть выведена на основаніи того, что прямая MN (рис. 40) постоянно должна оставаться перпендикулярной къ AB . Действительно, отсюда слѣдуетъ, что составляемая k скорости k , параллельная AB , должна равняться скорости v точки M . Но $\angle k, Nk = \beta$, слѣд. $v = k_1 = k \cos \beta$.

Полагая $MN = p$, находимъ

$$v = k \cos \beta = \frac{2\pi}{T} a \cos \beta = \frac{2\pi}{T} p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Последняя формула даетъ ясное представленіе о законѣ измѣненія скорости точки, совершающей гармоническое колебательное движеніе: эта скорость пропорціональна перпендикуляру p къ диаметру AB .

Въ точкахъ A и B фаза $\beta = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, и (10) даетъ $v = 0$.

Ускореніе w точки M получается на основаніи общаго выраженія (27) стр. 57 и формулы (45) стр. 39:

$$w = \frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

или

$$w = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Формула (4) даетъ

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Мы видимъ, что ускореніе пропорціонально разстоянію точки отъ ея средняго положенія O и постоянно направлено къ этой точкѣ O , ибо при $x > 0$, w отрицательно, т.е. направлено отъ B къ O , а при $x < 0$, w положительно, т.е. направлено отъ A къ O . Въ точкѣ O имѣемъ $w = 0$ въ точкахъ A и B ускореніе наибольшее и равно $\pm \frac{4\pi^2 a}{T^2}$. Полагая

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

имѣемъ

$$w = -cs \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Четыре величины a , T , $c = k$ и s связаны двумя уравненіями (1) и (15). Изъ нихъ получается

$$T = \frac{2\pi}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

и

$$e^{-k} = \frac{2-a}{r} = a | e \dots \dots \dots (18)$$

Формулы (11) и (15) дают

$$r = p \sqrt{c} \dots \dots \dots (19)$$

или, так как (см. рис. 40) $p^2 = a^2 - c^2$,

$$r = c(a^2 - c^2) \dots \dots \dots (20)$$

Этого формулой выражается связь между скоростью v и расстоянием s ; (20) и (18) дают еще

$$r^2 + cs^2 = c^2 \dots \dots \dots (21)$$

Рассмотрев геометрические условия возникновения гармонического колебательного движения и разобравшись в его свойствах, мы теперь уже легко можем определить и механические условия, при которых материальная точка, масса которой m , совершает такое же движение, т. е. тот же закон, по которому должна действовать на массу m внешняя сила f чтобы эта масса под ее влиянием совершала гармоническое колебательное движение. На основании общей формулы $f = ma$ (см. стр. 67, имеем, см. (16),

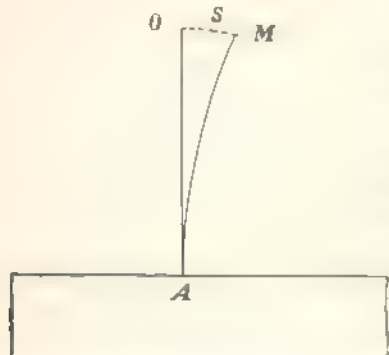
$$f = -cms \dots \dots \dots (22)$$

Материальная точка M совершает гармоническое колебательное движение около некоторого среднего положения O , если она находится под влиянием силы, постоянно направленной к точке O и по величине прямо пропорциональной расстоянию точки M от O . При этом точка M в начале должна или находиться в покое на некотором расстоянии a от O , или, находясь в O , обладать произвольной по величине и по направлению скоростью v_0 , или, наконец, находясь в произвольной точке, обладать скоростью, по направлению совпадающей с прямой OM . Время T полного колебания зависит только от коэффициента c , встречающегося в выражении силы (22), между тем как амплитуда a , см. (18), зависит от c и от скорости v_0 .

Можно указать на многие примеры сил, действующих на точку и пропорциональных удалению этой точки от некоторого ее среднего положения. Существование таких сил (хотя бы в первом приближении) весьма часто может быть допущено, когда материальная точка M находится в нормальном состоянии покоя, совпадая с некоторой точкою O , и когда при удалении M из O внешняя сила, препятствующая этому удалению, стремится возвратить точку M в O . Подобный случай мы имеем при небольших изменениях формы твердого тела, когда упругие силы стремятся восстановить измененную форму. Положим, напр., что упругий стержень

жень AO (рис. 42) неподвижно закреплёнъ въ точку A . Если конецъ O отвести въ сторону, такъ что стержень приметъ форму AM , то конецъ M будетъ такъ стремиться обратно къ O , какъ еслибы на него дѣйствовала нѣкоторая сила f , направленная отъ M къ O . При небольшихъ величинахъ дуги $OM = s$ можно силу f принять пропорционально этому разстоянію s , а потому конецъ M стержня будетъ совершать гармоническое колебательное движеніе около точки O , если его отвести въ сторону и затѣмъ предоставить самому себѣ. Это движеніе происходитъ однако не по прямой, но по нѣкоторой дугѣ.

Рис. 42



Кинетическая энергія J_0 массы m въ моментъ, когда она проходитъ черезъ положеніе покоя O , равна $J_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$, или, см. (18)

$$J_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{a^2}{r} m = \frac{1}{2} a^2 m \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

На разстояніи s отъ O мы имѣемъ кинетическую энергію, см. (20),

$$J = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (a^2 - s^2) = J_0 - \frac{1}{2} m s^2 \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Постѣдняя формула показываетъ, что съ удаленіемъ точки отъ положенія равновѣсія возникаетъ потенциальная энергія J_p , равная

$$J_p = \frac{1}{2} m s^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

ибо на основаніи принципа сохраненія энергіи мы должны постоянно имѣть $J + J_p = J_0$.

Средняя кинетическая энергія J_c за все время T одного колебанія получается на основаніи правилъ интегральнаго исчисленія по формулѣ

$$J_c = \frac{1}{2} m \frac{\int_0^T v^2 dt}{T}.$$

Подставляя сюда вмѣсто v его значеніе (9), получаемъ

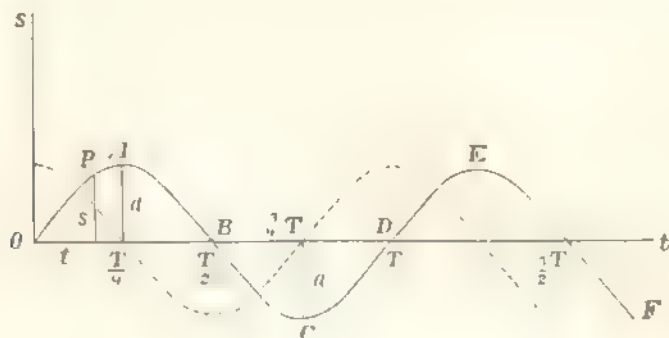
$$J_c = \frac{\pi^2 a^2}{T^2} m = \frac{1}{2} J_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

(23) и (26) показываютъ, что энергія гармоническаго колебатель-

ного движения пропорциональна квадрату амплитуды. Так как сумма $J + J_p = J_0$ за все время движения, то (26) еще показывает, что, как средняя кинетическая энергия, так и средняя потенциальная энергия равны $\frac{1}{2} J_0$.

Характер гармонического колебательного движения, который аналитически определяется формулой (4), может быть представлен и геометри-

Рис. 43.



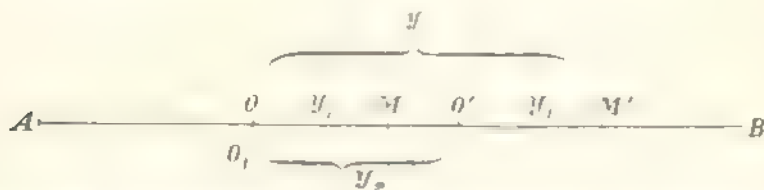
чески. Для этого возьмем координатные оси (рис. 43) и станем на оси абсцисс «откладывать время», а на перпендикулярных параллельных оси ординат — расстояния s , вычисленные по формуле (4). Геометрическое место точек P , координаты которых равны t и s , даст нам некоторую кривую линию $OLBCDEFL\dots$ весьма наглядно выражающую закон гармонического колебательного движения. Наибольшие по абсолютному значению ординаты, соответствующие моментам времени $\frac{1}{4} T$ и $\frac{3}{4} T$, равны амплитуде a . Кривая состоит из неопределенного числа одинаковых частей. Если существует начальная фаза, т.е. если при $t=0$ расстояние s не равно нулю, то закон движения изобразится той же кривою, больше или меньше передвинутую влево. Пунктиром обозначена кривая, выражающая закон колебания в случае, когда начальная фаза $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ и мы след, при $t=0$ имеем $s=a$.

§ 4. Сложение двух одинаково направленных гармонических колебательных движений одинакового периода T . Положим, что точка M (рис. 44) совершает гармоническое колебательное движение вдоль прямой AB около точки O , принадлежащей этой прямой. Время колебания обозначим через T , амплитуду через a . Расстояние y_1 точки M от O в момент времени t выразится формулою, см. (6) стр. 115

$$y_1 = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1 \right), \quad \dots \dots \dots (27)$$

где β_1 начальная фаза. Допустим, далее, что в то же время сама точка O совершает гармоническое колебательное движение с тем же периодом T , но с другою амплитудою b около точки O_1 , неподвижной на плоскости и пусть это движение по направлению совпадает с первым, т. е. с направлением прямой AB . На рис. 44 точки O и O_1 совпадают, т. е. точка O еще не начала своего движения. Можно себе представить, что сама прямая колеблется изправо и влево, причем каждая из этих точек совершает

Рис. 44.



колебание около соответствующей точки, неподвижной на плоскости. Точки M , колеблюсь около O в то же время, будучи такъ бы вынесена прямой AB , участвуетъ въ ея колебании. Положимъ, что въ моментъ времени t вся прямая переместилась отъ своего нормальнаго положенія на величину y_2 , точка O перешла въ O' , где $O_1O' = q$. Аналогично (27), имеемъ

$$q = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2 \right), \quad (28)$$

где β_2 начальная фаза второго колебания.

Истинное положеніе M' колеблющейся точки мы найдемъ, отложивъ $O'M' = OM = q$. Обозначимъ черезъ y расстояние этой точки отъ неподвижной на плоскости точки O_1 , т. е. положимъ $O_1M = y$. Задача заключается въ опредѣленіи разстоянія y , какъ функции времени t .

Считая y_1 и y_2 положительными въ одну и ту же сторону (направо), мы имеемъ очевидно

$$y = y_1 + y_2, \quad (29)$$

Вставивъ (27) и (28), имеемъ

$$y = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1 \right) + b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2 \right), \quad (30)$$

Зависимость величины y отъ времени t весьма сложная, посмотримъ, однако, не можетъ ли y быть приведенъ къ виду

$$y = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta \right), \quad (31)$$

т. е. не будетъ ли истинное движеніе точки M , сложенное изъ двухъ гармоническихъ колебательныхъ движеній, опять гармоническимъ колебательнымъ движеніемъ съ нѣкоторою амплитудою A и нѣкоторою начальною фазою β . Вопросъ въ томъ, существуютъ ли такіе двѣ величины A и β , которымъ

при всяком значении времени t сделаны бы выражения (30) и (31) тождественно равными. Равенство

$$A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \beta \right) = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \beta_1 \right) + b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \beta_2 \right)$$

даёт

$$A \cos \beta \sin 2\pi \frac{t}{T} + A \sin \beta \cos 2\pi \frac{t}{T} = (a \cos \beta_1 + b \cos \beta_2) \sin 2\pi \frac{t}{T} + \\ + (a \sin \beta_1 + b \sin \beta_2) \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Это равенство превращается в тождество при всяком значении t , когда коэффициенты при $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ и $\cos 2\pi \frac{t}{T}$ в отдельности равны, т. е. при условиях

$$\left. \begin{aligned} A \cos \beta &= a \cos \beta_1 + b \cos \beta_2 \\ A \sin \beta &= a \sin \beta_1 + b \sin \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Этим условиям для A и β можно удовлетворить, а след. (30) может быть приведено к виду (31).

Уравнения (32) дадут, при разложении второго на первое

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a \sin \beta_1 + b \sin \beta_2}{a \cos \beta_1 + b \cos \beta_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Сумма квадратов равенств (32) даёт

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\beta_1 - \beta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Это одна из важнейших формул физики. Два гармонических колебательных движения, одинаково направленных, обладающих одинаковым периодом, но различными амплитудами a и b и различными начальными фазами β_1 и β_2 , складывается в одно гармоническое колебательное движение, амплитуда A которого определяется формулой (34), а начальная фаза β — формулой (33).

Обозначив через i и j сложное колебание через i_1 , i_2 и J , получаем из (34) на основании сказанного после формулы (26)

$$J = i_1 + i_2 + 2\sqrt{i_1 i_2} \cos(\beta_1 - \beta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Рассмотрим ряд частных случаев, к которым приводят последние три формулы.

1. Амплитуды равны, $b = a$; полагаем $i_1 = i_2 = i$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + n\pi \\ A &= 2a \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \\ J &= 4i \cos^2 \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

2. Разность фазъ $\beta_1 - \beta_2 = 0$ или вообще $2n\pi$, гдѣ n цѣлое число. Имѣемъ

$$\left. \begin{aligned} A &= a + b \\ \beta - \beta_1 &= \beta_2 \\ J &= (\sqrt{i_1} + \sqrt{i_2})^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

Если $\beta_1 - \beta_2 = 0$ и $b = a$, то

$$\left. \begin{aligned} A &= 2a \\ J &= 4a^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

Итакъ въ этомъ частномъ случаѣ энергія составнаго колебанія въ 4 раза больше энергіи каждаго изъ двухъ вышедъ равныхъ слагаемыхъ колебаній.

3. Разность фазъ $\beta_1 - \beta_2 = \pi$ или вообще $(2n+1)\pi$; слагаемые колебанія находятся въ противоположныхъ фазахъ. Имѣемъ

$$\left. \begin{aligned} A &= a - b \\ J &= (\sqrt{i_1} - \sqrt{i_2})^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

Если $\beta_1 - \beta_2 = (2n+1)\pi$ и $a = b$, то

$$\left. \begin{aligned} A &= 0 \\ J &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

Два колебанія съ одинаковыми амплитудами, но противоположными фазами даютъ въ результатъ полный покой частицы.

4. Разность фазъ $\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ или вообще $(n \pm \frac{1}{4}) 2\pi$. Имѣемъ

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= a^2 + b^2 \\ J &= J_1 + J_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

Въ этомъ случаѣ энергія составнаго колебанія равна суммѣ энергій колебаній слагаемыхъ.

5. Разность фазъ $\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ и она изъ фазъ нуль.

$$\text{a) } \beta_2 = 0, \beta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{tg } \beta = \frac{a}{b} \dots \dots \dots (42)$$

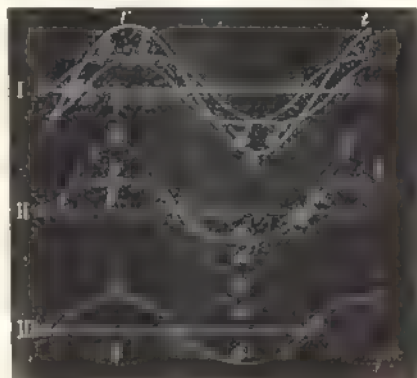
$$\text{b) } \beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{tg } \beta = \frac{b}{a} \dots \dots \dots (43)$$

Формулы (31), (33) и (34) даютъ полное аналитическое рѣшеніе вопроса о сложении двухъ «параллельныхъ» гармоническихъ колебательныхъ движеній. Мы можемъ рѣшить этотъ вопросъ и геометрически. Для этого

построимъ двѣ кривыя линіи, подобныя тѣмъ, которыя изображены на рис. 43 (стр. 119). Затѣмъ построимъ первую кривую, ординаты y точекъ которой равнялись бы суммѣ $y_1 + y_2$ ординатъ точекъ двухъ построенныхъ кривыхъ (если три точки соответствуютъ одинаковымъ абсциссамъ). Новая кривая и выразитъ законъ искомага составнаго движенія.

На рис. (45) изображены три случая такого геометрическаго сложенія двухъ колебательныхъ движеній. Верхній рисунокъ (I) соответствуетъ случаю $a=b$, а разность фазъ какая нибудь. Кривыя $abcd$ и $a'b'c'd'e'f'$ изображаютъ слагаемыя колебанія, а кривая $prst$ колебаніе составное. Рисунокъ средній (II) соответствуетъ случаю формулъ (38), т. е. $a=b$ и $\beta_1=\beta_2$; два слагаемыхъ движенія изображены совпадающими кривыми $abcdef$ и $ab'cd'e'f'$, а составное кривой $aBDF$. Наконецъ нижній рисунокъ (III) соответствуетъ случаю $a=b$ и $\beta_1 - \beta_2 = \pi$. Слагаемыя кривыя $abcdef$ и $ab'cd'e'f'$ даютъ прямую ace , показывающую, что точка, согласно (40) остается въ покоѣ.

Рис. 45.



§ 5. Сложеніе произвольнаго числа одинаково направленныхъ гармоническихъ колебательныхъ движеній, имѣющихъ общій періодъ T . Предположимъ, что разстояніе y движущейся точки M отъ неподвижной точки O въ каждый моментъ времени равно суммѣ разстояній y_1 , на которыхъ точка находилась бы, совершая различныя гармоническія колебательныя движенія. Полагая вообще

$$y_1 = a_1 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1 \right)$$

$$y = \sum y_1 \dots \dots \dots (44)$$

$$y = \sum a_i \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_i \right) \dots \dots \dots (45)$$

И эту сумму можно привести къ виду

$$y = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta \right) \dots \dots \dots (46)$$

Приравнивая (45) и (46), мы получаемъ, какъ условіе тождественности при всѣхъ t

$$\begin{aligned} A \cos \beta &= \sum a_i \cos \beta_i \\ A \sin \beta &= \sum a_i \sin \beta_i \end{aligned} \dots \dots \dots (47)$$

Отсюда

$$\tan \beta = \frac{\sum a \sin \beta_i}{\sum a_i \cos \beta_i} \quad (48)$$

и

$$A^2 = (\sum a \sin \beta_i)^2 + \sum a_i^2 \cos^2 \beta_i \quad (49)$$

§ 6. Разложение гармонического колебательного движения на два таковых же движения, являющія одинаковое съ нимъ направление. Какъ и многия другія задачи на разложение (числа, силы, скорости), и эта задача имѣетъ безконечное число решений, которыя могутъ быть получены изъ общаго формулы (42). Величины A и β мы должны считать данными, для двухъ амплитудъ a и b и двухъ начальныхъ фазъ β_1 и β_2 мы имѣемъ всего два уравнения, и потому изъ этихъ четырехъ величинъ могутъ быть выбраны многия произвольныя съ соблюденіемъ, однако, условія

$$a + b \leq A \leq a - b \quad (50)$$

Нисколько важенъ случай, когда начальные фазы β_1 и β_2 искомымъ колебаниі даны, тогда амплитуды опредѣлятся изъ (42) формулами

$$\begin{aligned} a &= A \left| \frac{\sin(\beta_2 - \beta)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)} \right| \\ b &= A \left| \frac{\sin(\beta_1 - \beta)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)} \right| \end{aligned} \quad (51)$$

Обобщая разность фазъ данного колебаниі и двухъ искомымъ черезъ φ и φ_1 , т.е. полагая $\beta_1 - \beta = \varphi_1$ и $\beta_2 - \beta = \varphi$, имѣемъ

$$a = A \frac{\sin \varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad b = A \frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (52)$$

Особое значеніе имѣетъ случай, когда дано дополнительное условіе, чтобы разность фазъ $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$; полагая для простоты $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi + \frac{\pi}{2}$, имѣемъ $\sin \varphi_1 = \sin \varphi$, $\sin \varphi_2 = \cos \varphi$ и имѣетъ (52)

$$\begin{aligned} a &= A \cos \varphi \\ b &= A \sin \varphi \end{aligned} \quad (53)$$

Этими важными, какъ мы увидимъ, формулами опредѣляются амплитуды a и b двухъ колебаній, на которыя разлагается данное колебаніе съ амплитудой A при условіи, чтобы одно изъ нихъ (амплитуда a) имѣло фазу на φ превышающую фазу колебанія разлагаемаго и чтобы разность фазъ слагаемыхъ колебаній равнялась $\frac{\pi}{2}$ (фаза колебанія съ амплитудой a больше фазы колебанія съ амплитудой b на $\frac{\pi}{2}$).

(Самые колебания выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} y &= A \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ y_1 &= A \cos \varphi \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right) \\ y_2 &= A \sin \varphi \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = -A \sin \varphi \cos \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

мени t определится, если известно, на какую величину x она переместилась в сторону от O и на какую величину y вся прямая переместилась в сторону от ее среднего положения. Ясно, что x и y представлять перемещения координаты точки M требуется определить траекторию, которую она описывает на плоскости. Так как по абсолютной величине $x \leq a$ и $y \leq b$, то ясно, что точка M всегда остается внутри прямоугольника $EFHG$. Полагая, что при $t=0$ начальные фазы суть β_1 и β_2 , имеем

$$x = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1 \right), \quad y = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2 \right). \quad (56)$$

или

$$\frac{x}{a} = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos \beta_1 + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin \beta_1, \\ \frac{y}{b} = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos \beta_2 + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin \beta_2.$$

Отсюда

$$\frac{x}{a} \cos \beta_2 - \frac{y}{b} \cos \beta_1 = \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin(\beta_1 - \beta_2), \\ \frac{x}{a} \sin \beta_2 - \frac{y}{b} \sin \beta_1 = \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin(\beta_1 - \beta_2).$$

Взяв сумму квадратов этих равенств, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\sin^2(\beta_1 - \beta_2)} \sin^2(\beta_1 - \beta_2).$$

Положим, что разность фаз складываемых колебаний $\beta_1 - \beta_2 = \varphi$, т.е. что колебание вдоль y начинается позже, чем колебание вдоль x и именно тогда, когда последнее уже достигло фазы φ . Вводя фазу φ , получаем следующую связь между координатами x и y движущейся точки M :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (57)$$

Это при любых значениях φ есть уравнение эллипса, центр которого находится в начале координат. Итак, два взаимно перпендикулярных колебания вообще складываются в одно движение по эллипсу, расположенному внутри прямоугольника $EFHG$, стороны которого суть его касательные. На рис. 47 показано это движение точки по эллипсу. Сперва начавшее движение от O до I в дальнейшем движении направлено прямолинейно движение вдоль y , вследствие чего и получилось движение $bb'b''$ и т. д. по эллипсу. Разберем частные случаи.

1) Разность фаз $\varphi = 0$; движение от O к Q и от O к D (рис. 46) начинается одновременно. Ур. (57) дает $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0$ т.е. $y = \frac{b}{a} x$, что непосредственно вытекает из (56) при $\beta_1 = \beta_2$. Получилось уравнение прямой, диагонали GF (рис. 46). Движение точки по этой прямой будет

гармоническое колебательное, ибо ее расстояние от средней точки O равно $s = \sqrt{x^2 + y^2}$. Подставляя (56), имеемъ, полагая $\beta_1 = \beta_2 = \beta$

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right).$$

2) Разность фаз $\varphi = \pi$, движѣнія отъ O къ D и отъ O къ A начинаются одновременно. Ур. (57) даетъ $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$, т.-е. $y = -\frac{b}{a}x$; это уравненіе прямой, діагонали EH ; движѣніе такое же, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

3) Разность фаз $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$; (57) даетъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Это уравненіе эллипса, отнесеннаго къ осямъ.

4) Весьма важный случай $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ и $a = b$. Ур. (57) даетъ $x^2 + y^2 = a^2$.

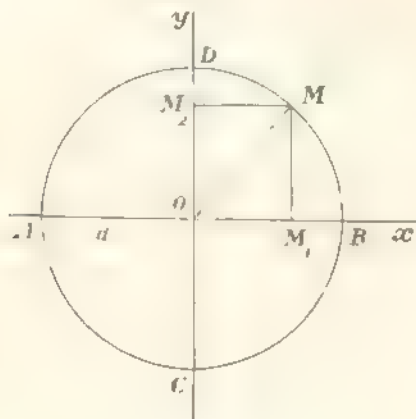
Это уравненіе окружности.

Для взаимно перпендикулярныхъ формъ колебательныхъ движеній съ одинаковыми амплитудами a и периодами T и съ

Рис. 47.



Рис. 48.

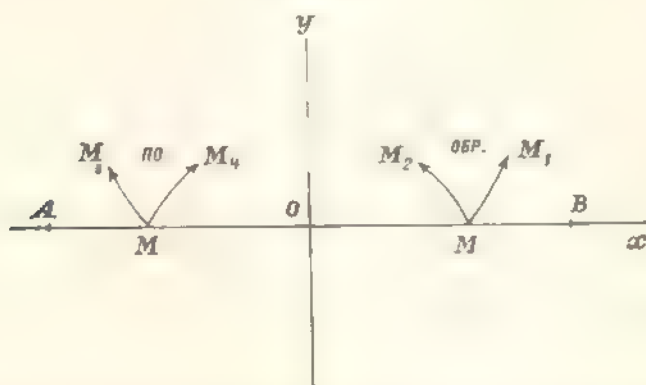


разностью фазъ $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ складываются въ движѣніе круговое и притомъ съ движѣніемъ равномернымъ, ибо проекции M и M_1 (рис. 48) точки M на диаметры AB и CD совершаютъ гармоническія колебательныя движенія (см. § 1 и рис. 40, стр. 113). Скорость k движенія точки выражается формулою $k = \frac{2\pi a}{T}$, см. (1) стр. 113.

5) Переходъ къ общему случаю произвольнаго φ покажемъ, какъ опредѣлить направленіе движенія точки по эллипсу, т.-е. будетъ ли оно проходить по или обратно часовой стрѣлкѣ (какъ для краткости выражаются). Для этого опредѣлимъ, гдѣ находится точка M (рис. 49), когда

начинается второе движение (въ сторону положительных y) и куда, приблизительно, будет направлено ея дальнейшее движение. Условие, что

Рис. 49.



центр эллипса совпадает съ началомъ координатъ, дасть намъ искомое направление движения.

- а) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; точка M между O и B , идетъ къ B , получ. движ. MM_1 , т.е. обратно час. стрѣлк.
- б) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$; " " " " " " O ; " " MM_2 , " " " "
- в) $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$; " " " " " " A ; " " MM_3 , " по " "
- г) $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$; " " " " " " O ; " " MM_4 , " " " "

Мы видимъ, что если

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \varphi < \pi, \text{ то движение происходитъ обратно часовой стрѣлкѣ,} \\ \pi < \varphi < 2\pi, \text{ » » » по часовой стрѣлкѣ.} \end{array} \right\} \quad (58)$$

$\varphi = \pi$ и $\varphi = 0$ (или 2π) даютъ движения по прямымъ.

На рис. 50 показаны разные случаи движения при $a = b$ и при φ возрастающемъ отъ 0 до 2π , черезъ каждыя $\frac{\pi}{2}$.

а) При $a = b$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ получаются движения по кругу: они отличаются направлениемъ:

$$\left. \begin{array}{l} a = b \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{2} \dots \text{ кругъ, обратно час. стрѣлкѣ,} \\ a = b \text{ и } \varphi = \frac{3\pi}{2} \dots \text{ кругъ, по час. стрѣлкѣ.} \end{array} \right\} \quad (59)$$

Фаза движения вдоль оси x идетъ вперед.

Полагая въ (56) $a=b$ и сперва $\beta_2 = \beta_1 - \frac{\pi}{2}$, а затѣмъ $\beta_2 = \beta_1 - \frac{3\pi}{2}$ и написавъ β вмѣсто β_1 , имѣемъ:

$$\text{Кругъ обратно час. стрѣлкѣ.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin(2\pi \frac{t}{T} + \beta) \\ y = -a \cos(2\pi \frac{t}{T} + \beta) \end{array} \right\} \quad \dots \dots (60)$$

$$\text{Кругъ по час. стрѣлкѣ.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin(2\pi \frac{t}{T} + \beta) \\ y = a \cos(2\pi \frac{t}{T} + \beta) \end{array} \right\} \quad \dots \dots (61)$$

Въ обоихъ случаяхъ очевидно $x^2 + y^2 = a^2$ (уравненіе окружности).

Формулы (60) и (61) показываютъ непосредственно, какимъ образомъ равномерное движеніе по кругу, радиусъ котораго a , совершающееся со

Рис. 50.



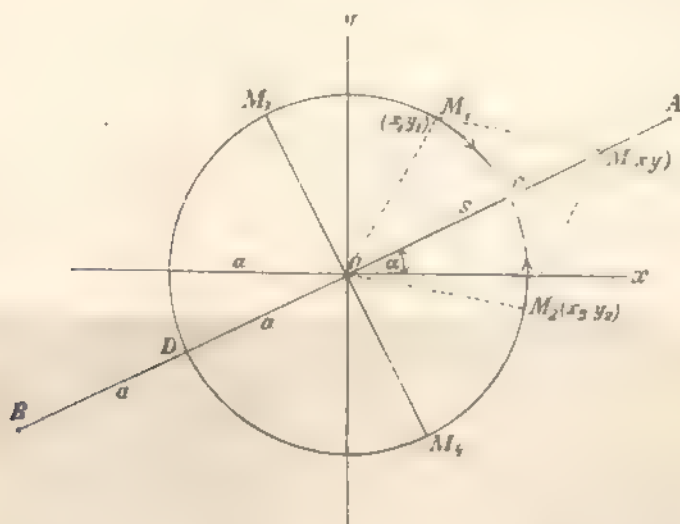
скоростью k обратно или по часовой стрѣлкѣ, можетъ быть разложено на два гармоническихъ колебательныхъ движенія по произвольнымъ, взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ x и y . Періодъ T опредѣлится изъ равенства (1) стр. 113, а именно $kT = 2\pi a$. Фаза β можетъ быть выбрана произвольно.

§ 8. Сложеніе двухъ равномерныхъ, одинаково быстрыхъ движеній по одной окружности, совершающихся по противоположнымъ направленіямъ. Положимъ, что точка M_1 (рис. 51) движется равномерно по окружности, радиусъ которой a , по направленію часовой стрѣлки, обходя всю окружность во время T ; другая точка M_2 движется съ такою же скоростью направленно обратному. Задача о сложении двухъ круговыхъ движеній сводится въ опредѣленіи движенія такой точки M , координаты x и y которой равнялись бы суммѣ соответствующихъ координатъ x_1, y_1 и x_2, y_2 точекъ M_1 и M_2 . Понятно, что точка M постоянно должна находиться на одной диагонали параллелограмма, построеннаго на прямыхъ OM_1 и OM_2 .

Легко видѣть, что движеніе точки M будетъ прямолинейное. Точки M_1 и M_2 встрѣчаются въ двухъ точкахъ C и D ; въ соответствующіе моменты времени точка M расположена въ A и B , гдѣ $OA = OB = 2a$. Такъ какъ точки M_1 и M_2 всегда будутъ находиться на равныхъ разстоя-

няяхъ отъ C и D , то ясно, что діагональ, на концѣ которой должна помѣщаться точка M , всегда будетъ совпадать съ OA или съ OB . Когда M_1 и M_2 совпадаютъ съ M_3 и M_4 ($M_3M_4 \perp AB$) то M находится въ O . Легко сообщить, что движеніе точки M должно быть гармоническое колебательное.

Рис. 51.



ибо оно складывается изъ очевидно гармоническихъ колебательныхъ движеній $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$.

Разберемъ вопросъ аналитически: обозначимъ черезъ β_1 и β_2 начальныя фазы тѣхъ колебательныхъ движеній x_1 и x_2 вдоль оси Ox , которыя вмѣстѣ съ колебаніями y_1 и y_2 (отстающими отъ нихъ на $\frac{3\pi}{2}$ и на $\frac{\pi}{2}$) даютъ круговыя движенія по (M_1) и обратно (M_2) часовой стрѣлкѣ, см. (59). Формулы (60) и (61) даютъ

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \sin(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1) \\ y_1 &= a \cos(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1) \end{aligned} \right\} \text{по;} \quad \left. \begin{aligned} x_2 &= a \sin(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2) \\ y_2 &= -a \cos(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2) \end{aligned} \right\} \text{обратно} \dots (61, a)$$

Полагаемъ для краткости $2\pi \frac{t}{T} + \beta_1 = \theta_1$ и $2\pi \frac{t}{T} + \beta_2 = \theta_2$.

Получимъ, такъ какъ $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \theta_1 + a \sin \theta_2 = 2a \sin \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \\ y &= a \cos \theta_1 - a \cos \theta_2 = 2a \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \end{aligned} \right\} \dots (62)$$

Условія $\alpha = \frac{1}{2} (\beta_2 - \beta_1)$ и $\beta = \frac{1}{2} (\beta_2 + \beta_1)$ даютъ

$$\beta_1 = \beta - \alpha; \beta_2 = \beta + \alpha.$$

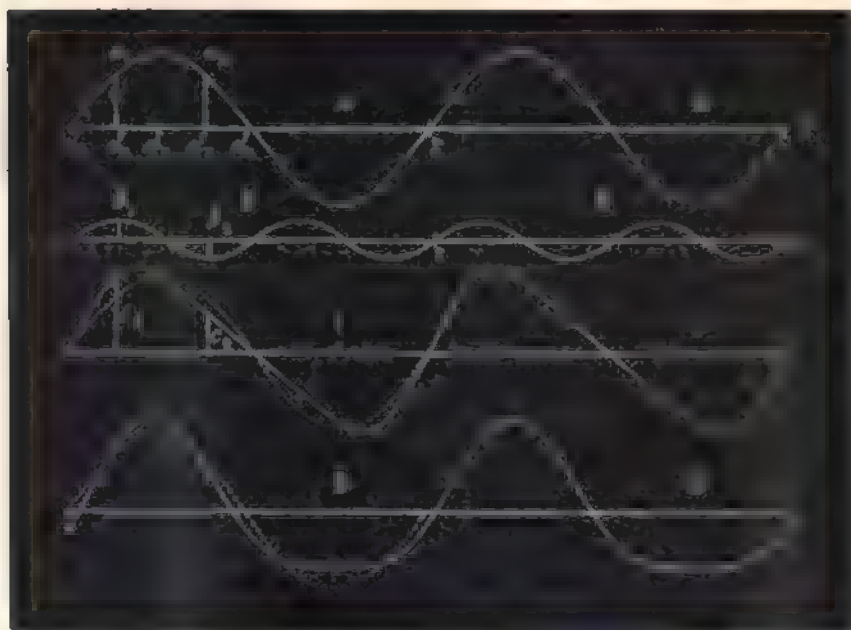
Вставляя эти выраженія въ (61.a), получаемъ окончательно такой результатъ:

Гармоническое колебательное движеніе $s = a \sin \theta$ можетъ быть разложено на два круговыхъ колебанія

$$\begin{array}{l} \text{По час.} \\ \text{стрѣлкѣ.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{a}{2} \sin(\theta - \alpha) \\ y_1 = \frac{a}{2} \cos(\theta - \alpha) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Обратно} \\ \text{ч. стрѣлкѣ.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{a}{2} \sin(\theta + \alpha) \\ y_2 = -\frac{a}{2} \cos(\theta + \alpha) \end{array} \right. \quad (67)$$

Здѣсь α уголъ между направлениемъ колебанія s и осью

Рис. 53.



x , который можно выбрать вполнѣ произвольно. Можно, напр., принять $\alpha = 0$ или $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

§ 10. Сложеніе гармоническихъ колебательныхъ движеній, имѣющихъ различные періоды T и $T_1 = kT$, гдѣ k численный коэффициентъ.

A. Колебанія одного направленія. Результатъ сложенія двухъ гармоническихъ колебательныхъ движеній, имѣющихъ различныя амплитуды a и b и различные періоды T и kT , получается удобнѣе всего геомет-

рическимъ способомъ, изложеннымъ въ § 4 на стр. 123. Начертимъ двѣ кривыя, изображающія законы пройденныхъ пространствъ для данныхъ двухъ колебаній и построимъ третью кривую такъ, чтобы ея ординаты равнялись суммѣ ординатъ двухъ первыхъ кривыхъ при одинаковыхъ абсциссахъ (временахъ). На рис. 53 представленъ случай, когда b мало въ сравненіи съ a и $k = \frac{1}{2}$; A и B изображаютъ два слагаемыхъ движенія, C движеніе составное. Пунктиромъ повторена кривая A , чтобы показать происшедшее съ нею измѣненіе. Полученное колебаніе уже не будетъ гармоническое; неодинаковый наклонъ частей кривой показываетъ, что точка совершаетъ размахъ въ одну сторону быстрее, чѣмъ въ другую. Кривая D соответствуетъ случаю, когда кривая B передвинута направо на столько,

Рис. 54.



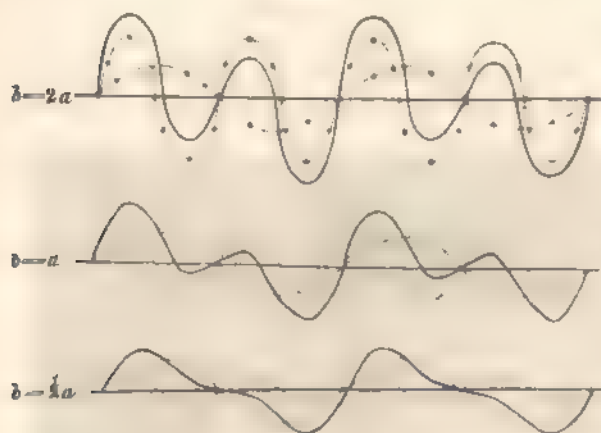
чтобы e приходилось подъ d_1 , т.-е. случаю, когда фаза нуль колебанія A не совпадаетъ съ фазою нуль колебанія B .

На рис. 54 показанъ случай $k = \frac{1}{3}$ и b мало сравнительно съ a . Получается периодическое (но не гармоническое) колебаніе C . Колебание D имѣетъ мѣсто, когда фаза нуль колебанія A совпадаетъ съ фазою π колебанія B .

Гораздо болѣе сложныя колебанія получаются, когда b не мало сравнительно съ a . На рис. 55 изображены 3 случая сложения колебаній, причемъ вездѣ принято $k = \frac{1}{2}$, т.-е. что одно колебаніе совершается вдвое быстрее другого. Слагаемыя колебанія изображены пунктиромъ. Здѣсь показано влияние отношенія b къ a . Первая кривая получается, когда $b = 2a$.

вторая, когда $b = a$ и третья, когда $b = \frac{1}{2}a$. Во всех трех случаях фаза φ больше быстрого колебания равна нулю, когда фаза больше медленного нуля. На рис. 56 кривые показывают разные фазы φ ; в обоих случаях $b = \frac{1}{2}a$. Первая кривая получается, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, вторая, когда $\varphi = \pi$. Для случая первых двух кривых рис. 55 мы видим, что два малых размаха в одну и в другую сторону чередуются с двумя большими размахами.

Рис. 55.



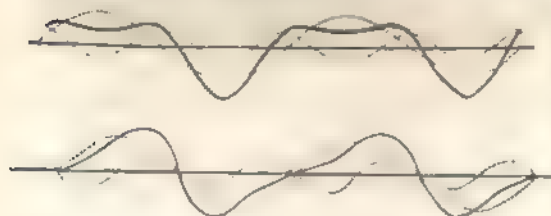
В. Колебания взаимно перпендикулярные. Уравнения двух колебаний суть

$$\begin{cases} x = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_1 \right) \\ y = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T_1} + \varphi_2 \right) \end{cases} \quad (68)$$

Исключая отсюда время t , получаем уравнение траектории кривой, по которой движется точка.

Геометрически эта кривая может быть построена следующим образом. Пусть отношение $\frac{T}{T_1} = \frac{p}{q}$, где p и q целые числа. Проведем координатные оси $A'O.A$ и $B'O.B$ (рис. 57) и опишем две окружности радиусами $OA = a$ и $OB = b$. Разделим их, начиная от A и B на $4n$ (где n целое число), напр. на 32 равных частей. Точки деления круга ($O.A$) соединим хордами, перпендикулярными к OA и точки деления круга ($O.B$) хордами, перпендикулярными к OB . Части, на которые раз-

Рис. 56.



дѣлятся $A'A$ и $B'B$ соответствуют путям, которые были бы пройдены въ колебанияхъ x и y въ равныя времена, еслибы мы имѣли $T_1 = T$. Но на дѣлѣ $\frac{T}{T_1} = \frac{p}{q}$, слѣд. точка пройдетъ p отрезковъ по направлению $B'B$ въ то время, какъ она перемѣстится на q отрезковъ по направлению $A'A$, ибо чѣмъ меньше время колебания, на тѣмъ большее число отрезковъ она должна перемѣститься въ данное время. Зная положеніе точки въ данный моментъ, мы легко построимъ ея послѣдовательныя положенія черезъ равныя промежутки вре-

мени. На рис. 57 изображенъ случай $\frac{T}{T_1} = \frac{2}{3}$; начальное положеніе въ точкѣ 0; дальнѣйшія положенія 1, 2, 3, 4.... 30, 31 и 32 получаются, если переходить каждый разъ на 3 дѣленія параллельно $A'A$ и на 2 дѣленія параллельно $B'B$.

На рис. 58 показаны кривыя, которыя получаются для трехъ различныхъ значеній отношенія $\frac{T}{T_1}$ и притомъ при пяти различныхъ значеніяхъ фазы φ колебання съ амплитудой a (горизонтальнаго), соответствующей мо-

Рис. 57.



менту, когда фаза колебання съ амплитудой b (вертикальнаго) есть нуль. Легко доказать, что третья кривая второй строки есть дуга параболы, полагая въ (68): $\beta = 0$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ и $T_1 = 2T$.

На рис. 59 изображенъ случай $\frac{T}{T_1} = \frac{3}{4}$ для значеній $\varphi = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{12}$ и $\frac{\pi}{3}$.

§ 11. Затухающія колебательныя движенія. Читатель, еще не освоившійся въ достаточной степени съ математикой, насколько она нужна для нижеслѣдующаго, можетъ пока и пропустить этотъ параграфъ.

мени (они обратно пропорціональны ей). Понятіе объ общемъ характерѣ потухающаго движенія можно получить, вникая въ форму выраженія (69). Такъ какъ $\sin qt$ при возрастающемъ t непрерывно мѣняется отъ -1 до $+1$, то ясно, что s будетъ попеременно положительное и отрицательное, а слѣд. движеніе будетъ колебательное. Такъ какъ $p > 0$, то множитель e^{-pt} непрерывно уменьшается и потому (69) представляется колебательнымъ движеніемъ съ бесконечно убывающей амплитудой, т.-е. такимъ, при которомъ послѣдовательные размахи направо и налево дѣлаются все меньше и меньше.

На основаніи (8) стр. 51 имѣемъ для скорости v .

$$v = ae^{-pt}(q \cos qt - p \sin qt) \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

При $t = 0$ имѣемъ $s = 0$ и начальная скорость $v_0 = aq$.

Обозначимъ черезъ $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$ времена прохожденія точки M черезъ O , когда $s = 0$. Имѣемъ $\sin qt_i = 0$, слѣд. $qt_1 = \pi$, $qt_2 = 2\pi$, $qt_3 = 3\pi$ и т. д. $n^{\text{твое}}$ прохожденіе черезъ O имѣетъ мѣсто во время

$$t_n = n \frac{\pi}{q} \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Отсюда слѣдуетъ, что точка M проходитъ черезъ точку O черезъ равные промежутки времени τ

$$\tau = \frac{\pi}{q} \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Обозначимъ черезъ $T_1, T_2, T_3, T_n, \dots$ моменты остановки, когда скорость $v = 0$; (70) даетъ $q \cos qT_i - p \sin qT_i = 0$ или $\operatorname{tg} qT_i = \frac{q}{p}$. Полагая, что $\operatorname{arctg} \frac{q}{p}$ обозначаетъ наименьшую дугу, тангенсъ которой равенъ $\frac{q}{p}$, имѣемъ $qT_1 = \operatorname{arctg} \frac{q}{p}$; $qT_2 = \operatorname{arctg} \frac{q}{p} + \pi$; $qT_3 = \operatorname{arctg} \frac{q}{p} + 2\pi$ и вообще $qT_i = \operatorname{arctg} \frac{q}{p} + (i-1)\pi$. Моментъ T_n , когда точка M остановится въ $n^{\text{твое}}$ разъ, опредѣляется формулою

$$T_n = \frac{1}{q} \operatorname{arctg} \frac{q}{p} + (n-1) \frac{\pi}{q} \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Отсюда слѣдуетъ, что точка M останавливается черезъ равные промежутки времени

$$\tau' = \frac{\pi}{q} \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Сравнивая это съ (72), видимъ, что время, протекающее отъ одного прохожденія черезъ O до слѣдующаго, равно времени, протекающему отъ одной остановки до слѣдующей. (71) и (73) показываютъ однако, что моменты остановокъ ($v = 0$) не приходятся ровно посреди между моментами прохожденія M черезъ O ($s = 0$).

(Обозначимъ черезъ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ послѣдовательные размахи или амплитуды, т. е. расстоянія OM въ моменты T остановокъ. (69) даетъ

$$s_n = ae^{-pT} \sin qT \dots \dots \dots (75)$$

Но мы имѣемъ $\operatorname{tg} qT = \frac{q}{p}$, слѣд. $\sin qT = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$. Принимая во вниманіе, что знаки здѣсь чередуются, когда qT увеличивается на π и пользуясь формулой (73), имѣемъ для n -ой амплитуды сложное выраженіе

$$s_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{aq}{\sqrt{p^2 + q^2}} e^{-\frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{q}{p}} = (n-1) \frac{p}{q} \dots \dots \dots (76)$$

(Отбрасывая знаки, т. е. рассматривая только абсолютныя значенія амплитудъ, мы видимъ, что

$$s_n = s_{n-1} e^{-\pi \frac{p}{q}} \dots \dots \dots (77)$$

Итакъ каждая амплитуда получается изъ предыдущей, чрезъ умноженіе на одинъ и тотъ же опредѣленный множитель. Отсюда ясно, что послѣдовательныя амплитуды составляютъ безконечно убывающую геометрическую прогрессию; теоретически говоря, потухающее колебаніе никогда не прекращается.

Натуральный логарифмъ отношенія двухъ послѣдовательныхъ размаховъ называется логарифмическимъ декрементомъ; обозначивъ его черезъ λ , имѣемъ изъ (77)

$$\lambda = \lg \frac{s_{n-1}}{s_n} = \frac{\pi p}{q} \dots \dots \dots (78)$$

Легко убѣдиться, что скорости v , прохожденія точки M черезъ O составляютъ совершенно такую же геометрическую прогрессию, какъ и размахи s , см. (70) и (72).

Общая формула (27) стр. 57 даетъ для ускоренія w точки M

$$w = ae^{-pt} [(p^2 - q^2) \sin qt - 2pq \cos qt].$$

Это выраженіе можно преобразовать такимъ образомъ

$$w = -(p^2 + q^2)ae^{-pt} \sin qt - 2pae^{-pt}(q \cos qt - p \sin qt).$$

Сравнивая это съ (69) и (70), видимъ, что

$$w = -(p^2 + q^2)s - 2pvs \dots \dots \dots (79)$$

Если m есть масса точки M , то сила f , подъ влияніемъ которой эта точка находится, равна

$$f = -m(p^2 + q^2)s - 2mpv \dots \dots \dots (80)$$

Эта формула показываетъ, что матеріальная точка M совершаетъ потухающее колебательное движеніе, когда она находится подъ вліяніемъ равнодѣйствующей двухъ силъ, изъ которыхъ одна направлена къ точкѣ O и пропорціональна разстоянію s точки M отъ O , а другая имѣетъ направленіе, противоположное скорости v точки M , т. е. направленію ея движенія и по величинѣ пропорціональна этой скорости. При отсутствіи второй силы ($p = 0$), имѣемъ только сопротивляющейся движенію, мы получаемъ гармоническое колебательное движеніе. Появленіе второй силы, зависящей отъ самой скорости движенія, и вызываетъ постепенное потуханіе колебаній. Мы впоследствии познакомимся съ нѣсколькими случаями возникновенія подобныхъ силъ, тормозящихъ движеніе (напр. сопротивленіе воздуха).

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Лучистое распространеніе колебаній.

§ 1. Возникновеніе лучей. На стр. 25 мы назвали изотропной средой вещество, занимающее часть пространства и обладающее по всемъ направленіямъ одинаковыми свойствами. Представимъ себѣ это вещество (матерію или эфиръ, см. стр. 7) состоящимъ изъ весьма большого числа малыхъ частицъ, или, какъ мы условимся выражаться (стр. 48), матеріальныхъ точекъ. Каждой такой частицѣ соответствуетъ опредѣленная точка въ пространствѣ, занимаемая ею, когда она находится въ покоѣ, т. е. когда всѣ силы, на нее дѣйствующія, уравновѣшиваются. Допустимъ себѣ, что частицы дѣйствуютъ другъ на друга такимъ образомъ, что вслѣдствіе удаленія одной частицы A изъ ея положенія равновѣсія, силы, дѣйствующія на сосѣднія частицы, перестаютъ уравновѣшиваться, вслѣдствіе чего и эти частицы приходятъ въ движеніе, перемѣщаясь въ ту же сторону, въ которую передвинулась частица первая. Какъ дальнѣйшее послѣдствіе, начинаютъ перемѣщаться частицы, сосѣднія съ только-что разсмотрѣнными, затѣмъ частицы, еще дальнѣе отстоящія отъ первой частицы и т. д. Состояніе движенія, какъ бы передаваясь отъ точки къ точкѣ, распространяется черезъ среду, вслѣдствіе чего частицы, все болѣе и болѣе отъ A удаленныя, будутъ приходить въ движеніе. Допустимъ далѣе, что характеръ движенія всѣхъ частицъ одинъ и тотъ же.

Предположимъ, что частица A начинаетъ совершать гармоническое колебательное движеніе съ амплитудою a и періодомъ T и что это же движеніе, постепенно передаваясь сосѣднимъ частицамъ, распространяется все далѣе и далѣе въ данной средѣ. Разсмотримъ частицы, лежащія вдоль нѣкоторой прямой и послѣдовательно начинающія совершать гармоническія колебательныя движенія. Движеніе распространяющееся вдоль такого ряда частицъ, мы условно и временно назовемъ лучемъ.

Для целей графических можно лучъ изобразить геометрически прямой линией. Терминъ «лучъ» употребляется и въ томъ случаѣ, когда распространяющееся движеніе не есть гармоническое колебательное, но имѣетъ болѣе сложный характеръ, напр. затухающаго колебанія или иного неперіодическаго движенія. Лучистая передача движеній играетъ весьма важную роль въ самыхъ разнообразныхъ явленіяхъ: сюда относятся распространеніе волнъ на поверхности жидкостей, поперечныхъ сотрясеній въ нитяхъ и струнахъ, распространеніе звука въ твердыхъ, жидкихъ и газообразныхъ тѣлахъ, распространеніе свѣта и, наконецъ, распространеніе въ эфирной средѣ особаго рода движеній, по своему характеру и въ некоторымъ отношеніямъ признакамъ относимыхъ къ явленіямъ электрическимъ.

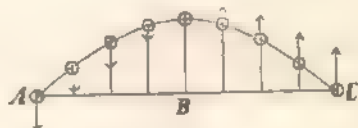
Ограничиваемся пока разсмотрѣнемъ случая распространенія гармоническихъ колебательныхъ движеній въ изотропной средѣ.

Разстояніе, на которое передается состояніе движенія въ единицу времени, называется скоростью распространенія колебаній или луча (скорость звука, скорость свѣта); мы изобразимъ ее буквою v . Эту фиктивную скорость, которая въ изотропной средѣ есть векторъ одинаковый во всѣхъ ея точкахъ и по всѣмъ направленіямъ, не слѣдуетъ смѣшивать со скоростью движенія самихъ частицъ въ ихъ колебаніяхъ, скоростью, съ

Рис. 60.



Рис. 61.



теченіемъ времени непрерывно мѣняющейся для всякой отдѣльно взятой частицы и во всякій данный моментъ, вообще, различной для различныхъ частицъ, расположенныхъ вдоль луча. Скорость v зависитъ отъ свойствъ самой среды, въ различныхъ средахъ она, вообще, различная. Слѣдуетъ отличать два случая лучистаго распространенія колебаній. Въ первомъ случаѣ направленіе колебаній перпендикулярно къ направленію ихъ распространенія т. е. къ лучу, такіе колебанія называются поперечными. Во второмъ случаѣ направленіе колебаній совпадаетъ съ направленіемъ луча; такіе колебанія называются продольными.

§ 2. Образованіе лучей съ поперечными колебаніями. Положимъ, что AB (рис. 60) прямая, вдоль которой первоначально были расположены частицы и вдоль которой распространяется колебательное движеніе. Сперва начала двигаться частица A , нѣсколько поздиѣ сосѣдняя направо частица и т. д. На рис. 60 изображено распредѣленіе частицъ во время $t = \frac{T}{4}$, причемъ время считается отъ начала колебанія первой частицы A . Во время $t = \frac{T}{4}$ частица A достигла крайняго положенія; слѣдующія частицы отстали

отъ *A*. такъ какъ онѣ позже ея начали свои движенія; стрѣлки показываютъ направленіе ихъ движеній. Всѣ частицы, лежащія направо отъ *B*, еще находятся въ покоѣ.

На рис. 61 показано распределеніе частицъ и направленія ихъ движеній во время $t = \frac{T}{2}$, когда *A* совершила половину, *B* одну четверть колебанія, а колебательное движеніе распространилось до *C*.

На рис. 62 видно распределеніе частицъ и направленія ихъ движеній во время $t = \frac{3}{4} T$, когда *A* достигла крайняго отрицательнаго удаленія, *B* совершила половину, *C* четверть колебанія, а *D* только приступаетъ къ началу движенія. Наконецъ, на

рис. 63 изображено то же самое спустя время *T* послѣ начала движенія первой частицы *A*, когда эта частица, совершивъ одно полное колебаніе, приступаетъ ко второму. *C* кончила половину колебанія и самое движеніе распространилось до частицы *E*, только что приступающей къ первому колебанію. Мы видимъ, что точки *A* и *E* одновременно выходятъ изъ своихъ положеній равновѣсія, причемъ одинаково направленными скоростями. Очевидно, что ихъ движенія и затѣ останутся вполне тождественными, что онѣ постоянно будутъ находиться въ одинаковыхъ фазахъ. Разстояніе *AE* называется длиною волны; общепринято обозначать ее буквою λ .

Длиною волны называется разстояніе двухъ ближайшихъ точекъ луча, находящихся при одинаковыхъ фазахъ, одна изъ нихъ начала колебаться, когда другая кончила одно полное колебаніе. За время *T* колебаніе распространилось отъ *A* до *E*; отсюда получается еще такое распределеніе.

Длина волны λ есть то разстояніе, на которое колебательное движеніе распространяется во время *T* одного периода, т. е. пока одна частица совершаетъ одно полное колебаніе.

Легко понять, какъ затѣ происходитъ распространеніе колебаній и движеніе отдѣльныхъ частицъ для $t > T$. Такъ, на рис. 64 волнообразная линия показываетъ распределеніе частицъ во время $t = \frac{3}{2} T$, а на рис. (65) изображена часть луча въ моментъ, когда частица *A* совершила $(n + \frac{1}{2})$

Рис. 62.



Рис. 63.



колебания, гдѣ n цѣлое число. Полагая $AE = EJ = JL = LN = NP = \lambda$, мы видимъ, что каждыя двѣ частицы, находящіяся другъ отъ друга на разстояніи цѣлаго числа волнъ или четнаго числа полуволинъ, $2n \frac{\lambda}{2}$, находятся въ одинаковыхъ фазахъ, напр. E и L , J и P . Отъ какой бы произвольной частицы X на лучѣ мы бы ни передвинулись въ ту или другую сторону на четное число полу-

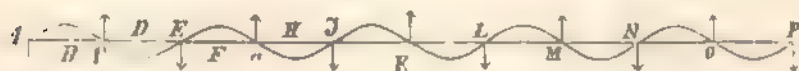
Рис. 64.



волнъ, мы всегда найдемъ частицу Y , находящуюся съ X въ одинаковой фазѣ.

Наоборотъ, двѣ частицы, находящіяся другъ отъ друга на разстояніи $(2n + 1) \frac{\lambda}{2}$, т.-е. нечетнаго числа полуволинъ, находятся въ противоположныхъ фазахъ, т.-е. ихъ фазы отличаются на нечетное число π или, что то же самое, на π .

Рис. 65.



Они одновременно проходятъ черезъ положенія равновѣсія, обладая, однако, при этомъ противоположно направленными скоростями. Примеры суть A и C на рис. 61, B и D на рис. 62, A и G на рис. 64, A и K ($\frac{5}{2} \lambda$), C и P ($\frac{9}{2} \lambda$) и т. д. на рис. 65.

Величины λ , c и T связаны очевидною формулою

$$c = \lambda T \quad (1)$$

выражающей, что движеніе распространяется во время T съ постоянною скоростью c на разстояние λ . Формула (1) показываетъ, что длина волны λ тѣмъ меньше, чѣмъ быстрее происходятъ колебанія и чѣмъ медленнѣе распространяется колебаніе. Она зависитъ слѣд. и отъ рода колебаній, и отъ свойствъ среды. Если черезъ N обозначить число колебаній, совершаемыхъ каждою частицею въ единицу времени, то

$$NT = 1 \quad (2)$$

и слѣд. (1) дать

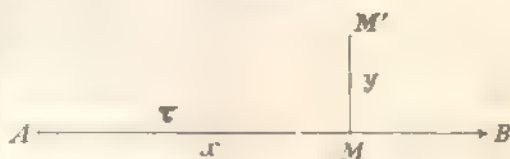
$$t = N\lambda \dots \dots \dots (3)$$

Въ единицу времени первая частица совершить N колебаній; въ течение этого же времени колебаніе распространится на N волнъ и въ то же время, по опредѣленію, на расстояние c .

§ 3. Уравненіе луча. Положимъ, что изъ точки A (рис. 66) распространяются поперечныя колебанія съ амплитудою a и періодомъ T по направленію AB ; длина волны λ . Условимся считать время t отъ момента начала колебанія точки A . Нѣкоторая частица M , находящаяся отъ A (рис. 66) на

Рис. 66

разстояніи $AM = x$, занимаетъ во время t нѣкоторое положеніе M' ; полагаемъ $MM' = y$. Величина y для данного x есть функція времени t ; для данного значенія времени t она различная для различныхъ точекъ,



т.е. представляется нѣкоторою функціею отъ x . Такимъ образомъ вообще $y = f(x, t)$, найдемъ видъ этой функціи. Обозначимъ черезъ τ время, въ течение котораго колебаніе распространилось отъ A до M , точка M начала колебаться на время τ позже, чѣмъ A , а потому къ моменту времени t прошло время $t - \tau$ отъ момента, когда M начала свое движеніе. На основаніи (4) стр. 114 имѣемъ

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t - \tau}{T} \right) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\tau}{T} \right).$$

Времена τ и T относятся, какъ пути, на которые въ эти времена распространилось колебательное движеніе, т.е. какъ путь x къ длинѣ волны λ . Пропорція $\frac{\tau}{T} = \frac{x}{\lambda}$ даетъ для y выраженіе

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (4)$$

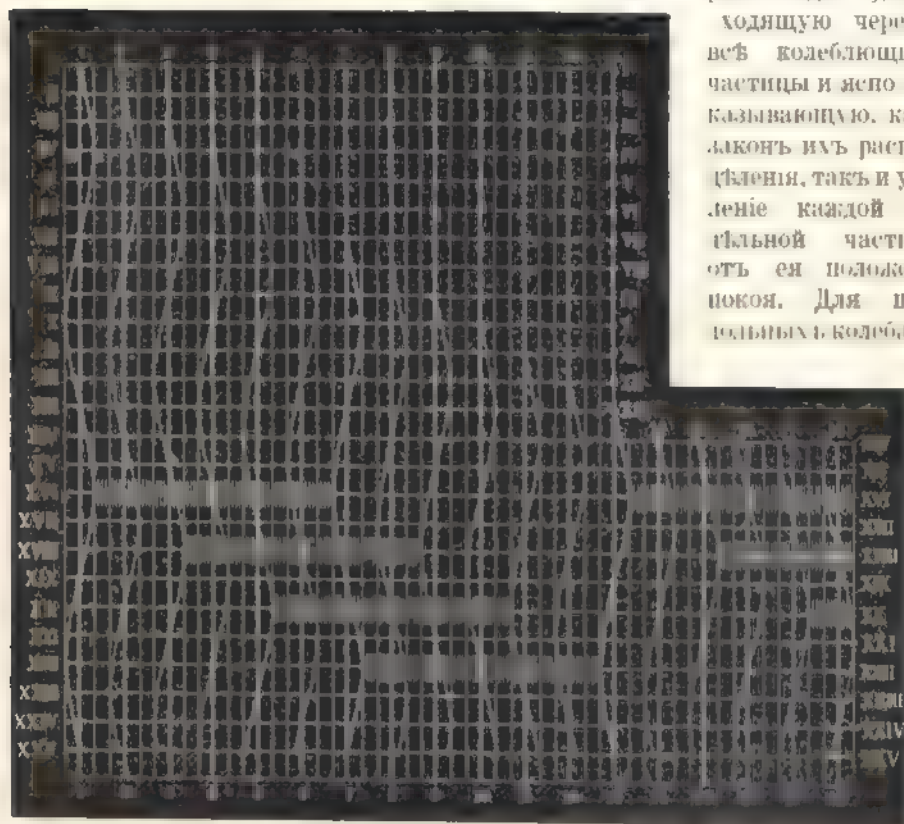
Выраженіе (4), которое даетъ намъ удаленіе y любой точки M на лучѣ отъ ея положенія равновѣсія, какъ функцію ея состоянія x отъ нѣкоторой начальной точки A и времени t , считаемого отъ момента начала движенія точки A , называется уравненіемъ луча. Введи обозначенія

$$\left. \begin{aligned} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) &= \theta \\ 2\pi \frac{x}{\lambda} &= \beta \\ x &= \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

При выводѣ формулы (4) стр. 143 направление колебаній никакой роли не играет, а потому уравненіе луча (4) остается вѣрнымъ и для лучей съ продольными колебаніями.

Имѣя дѣло съ колебаніями поперечными, мы могли для всякаго дан-

Рис. 67.



наго момента на-
чертить кривую (см.
рис. 60 до 65), про-
ходящую черезъ
вѣ колеблющихся
частицы и испо по-
казывающую, какъ
законъ ихъ распре-
дѣленія, такъ и уда-
леніе каждой от-
дельной частицы
отъ ея положенія
покоя. Для про-
дольныхъ колебаній

ничего подобнаго сдѣлать нельзя, частицы остаются на прямой, на кото-
рой онѣ были сначала.

Проф. Ф. Ф. Петрушевскій далъ рисунокъ, ясно показывающій по-
следовательныя измѣненія въ распредѣленіи частицъ при продольныхъ ко-
лебанияхъ: онъ воспроизведенъ на рис. 67. Частицы обозначены ѳлыми точ-
ками. На горизонтальныхъ строкахъ, обозначенныхъ римскими цифрами
отъ I до XIII, показано распредѣленіе частицъ черезъ равные промежутки
времени $\frac{1}{12} T$. Каждая изъ вертикальныхъ, прямыхъ, обозначенныхъ араб-
скими цифрами отъ 1 до 13, соответствуетъ положенію равновѣсія одной
изъ 13-ти частицъ.

Строка I ($t=0$) — все частицы в покое. Строка II ($t=\frac{1}{12}T$): частица 1 переместилась, остальные в покое. Строка III ($t=\frac{2}{12}T$): частица 1 переместилась дальше вправо, 2 начала двигаться. Строка IV ($t=\frac{3}{12}T$): 1 достигла крайнего удаления, 2 перешла дальше вправо, 3 начала двигаться. Строка V ($t=\frac{4}{12}T$): 1 пошла назад, 2 к крайнему удалению, 3 пошла дальше, 4 начала двигаться. Строка VI ($t=\frac{5}{12}T$): 1 достигла крайнего положения, 5 начала двигаться. Строка VII ($t=\frac{6}{12}T$): частица 1 совершила половину колебания, 4 достигла крайнего положения, 7 приступает к движению. Ясно, что расстояние 1—7 равно половине λ и что частицы 1 и 7, одновременно, но в противоположных направлениях, выходя из своих положений равновесия, и далее постоянно будут находиться в противоположных фазах. Так в строке X частицы 1 и 7 достигли крайних положений одна влево, другая вправо. Строка XIII соответствует моменту $t=T$ когда 1 совершила одно полное колебание, 7 половину колебания и 13 только приступает к движению. Расстояние 1—13 равно длине волны λ и частицы 1 и 13 далее постоянно будут находиться в одинаковых фазах, частицы же 7 и 13 находятся в фазах противоположных.

Строка XIV показывает распределение первых 18-ти частиц во время $nT + \frac{1}{12}T$ где n любое число, большее единицы. Для частиц 1—14 строка XIV может быть рассматриваема как просто продолжение строк предыдущих, но частицы 15—18 в строках XIV до XXV так бы продолжали уже ранее начатый ими движения.

Точки, находящиеся на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$ друг от друга, имеют разность фаз π , они одновременно, но в противоположных направлениях, достигают крайних удалений (на величину амплитуды a) от своих положений равновесия. Это происходит через равные промежутки времени $\frac{1}{2}T$, причем рассматриваемые две точки попеременно будут находиться на расстояниях $\frac{\lambda}{2} + 2a$ и $\frac{\lambda}{2} - 2a$ так что расстояние между ними меняется на величину $4a$. Когда это расстояние меньше нормального на величину $2a$, то расстояния промежуточных частиц друг от друга должны быть также меньше чем при нормальном расположении (строка I), т.е. между двумя рассматриваемыми частицами должно образоваться сгущение, если же расстояние между ними больше нормального на $2a$, то между ними произойдет разрежение. Если A , B и C три частицы, находящиеся друг от друга на нормальных расстояниях $AB=BC=$
 $= \frac{\lambda}{2}$, то сгущение в данный момент между A и B должно соответствовать разрежению между B и C . Пусть время $\frac{1}{2}T$ мы будем иметь, на-

оборотъ, разръженіе между A и B и сгущеніе между B и C . На черт. 67 мы имѣемъ, напр., въ X строкѣ разръженіе между частицами 1 и 7, которое черезъ время $\frac{1}{2} T = \frac{6}{12} T$ переходитъ въ сгущеніе, какъ это видно въ строкѣ XVI, на которой мы имѣемъ еще рядомъ разръженіе между частицами 7 и 13. Еще

спустя время $\frac{1}{2} T$ мы ви-

димъ въ строкѣ XXII, наоборотъ, разръженіе между 1 и 7 и сгущеніе между 7 и 13. На строкахъ XVI, XVIII, XX и XXII сгущенія отмѣчены рядомъ параллельныхъ черточекъ. Промежутки между двумя сгущеніями соответствуютъ разръженіямъ. На чертежѣ ясно видно, какъ сгущенія и разръженія перемѣщаются въ сторону распространенія колебаній и притомъ, очевидно, съ тою же скоростью, съ которою передается и само колебательное движеніе.

Длина волны λ равна разстоянію центровъ двухъ соседнихъ сгущеній или разръженій.

На черт. 68 рядъ точекъ (не отмѣченныхъ буквами) обозначаетъ частицы, находящіяся другъ отъ друга на равныхъ разстояніяхъ $\frac{\lambda}{2}$.

Колебаніе распространяется

отъ P къ Q . Въ нѣкоторый моментъ движенія частицъ имѣютъ направленія, заданныя верхнимъ рядомъ стрѣлокъ. Тогда въ $A, B, C...$ образуются сгущенія, въ $a, b...$ разръженія. Черезъ время $\frac{1}{2} T$ частицы движутся въ противоположныхъ направленіяхъ, обозначенныхъ нижнимъ рядомъ стрѣлокъ, теперь сгущенія A, B и C перешли въ A_1, B и C_1 , разръженія a и b въ a_1 и b_1 , а въ τ_1 образовалось новое разръженіе, перешедшее къ слѣва, если P не есть начало луча.

§ 5. Уравненіе луча, прошедшаго рядъ срединъ. Уравненіе луча (4).

143. можетъ быть обобщено для случая, когда лучъ послѣдовательно проходитъ черезъ рядъ срединъ, въ которыхъ онъ распространяется съ одинаковою скоростью и въ которыхъ потому, при одинаковомъ во всѣхъ случаяхъ периодѣ T , длина волны различна. Положимъ, что колебаніе, начиная въ точкѣ A (черт. 69), послѣдовательно проходитъ срединъ I, II, III и т. д.; длины отрезковъ луча въ этихъ срединъ обозначимъ черезъ $x_1, x_2, x_3...$ длины волнъ черезъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3...$ и, наконецъ, черезъ $\tau_1, \tau_2, \tau_3...$ время, потребованное для распространения луча въ послѣдовательныхъ срединъ,

Рис. 68.

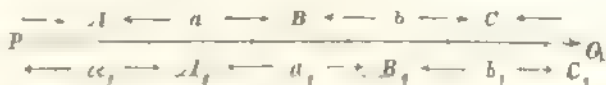


Рис. 69.



т.-е. отъ A до B , отъ B до C , отъ C до D и т. д. Какъ и при выводѣ формулы (1), стр. 143, мы имѣемъ $\frac{x_i}{\tau_i} = \frac{x_i}{T}$. Время t считаемъ, какъ и прежде, отъ момента начала колебания точки A . Перемѣщеніе y MM' частицы M во время t опредѣлится, какъ для поперечныхъ, такъ и для продольныхъ колебаній, общей формулой (4), стр. 114, въ которой, однако, вмѣсто t слѣдуетъ подставить $t - \sum \tau_i$, такъ какъ частица M начала колебаться позже A на время $\sum \tau_i$, въ теченіе котораго колебаніе распространилось отъ A до M : Итакъ

$$y = a \sin 2\pi \frac{t - \sum \tau_i}{T} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \sum \frac{\tau_i}{T} \right).$$

Вышенаписанная пропорція дасть намъ искомое обобщенное уравненіе луча:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \sum \frac{x_i}{v_i} \right) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{v_1} - \frac{x_2}{v_2} - \frac{x_3}{v_3} - \dots \right) \quad (10)$$

Этому уравненію можно придать еще другую форму. Пусть λ длина волны и v скорость въ какой-либо средѣ; это можетъ быть одна изъ тѣхъ средъ, черезъ которыя проходитъ лучъ или какая-либо другая. На основаніи (1) стр. 142 имѣемъ $\lambda = vT$, а слѣд. (10) можно написать въ видѣ

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(vt - \frac{\lambda}{v_1} x_1 - \frac{\lambda}{v_2} x_2 - \frac{\lambda}{v_3} x_3 - \dots \right)$$

Вводя новую величину

$$r = \sum \frac{\lambda}{v_i} x_i, \quad (10.a)$$

получаемъ уравненіе луча въ видѣ

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - r), \quad (10.b)$$

Величину r можно назвать приведенною длиною луча.

§ 6 Интерференція лучей съ одинаковыми направленіемъ колебаній. Интерференціею, въ обширномъ смыслѣ слова, называется явленіе, происходящее, когда до одной и той же точки M доходить два колебательныхъ движенія или, выражаясь иначе, черезъ M распространяются два луча. Периоды двухъ колебаній мы будемъ считать одинаковыми. Такие два луча «интерферируютъ» въ точкѣ M ; результатомъ же интерференціи является нѣкоторое движеніе частицы, находящейся въ M , движеніе, вообще отличное отъ того, которое имѣло бы точка M , еслибы до нея доходить только одинъ или только другой изъ интерферирующихъ лучей.

Для рѣшенія задачи объ интерференціи, мы исходимъ изъ т.-наз. принципа сложенія малыхъ перемѣщеній, на основаніи котораго истинное удаленіе M_0M точки M отъ положенія равновѣсія M_0 въ данный

Величина δ имѣть въ различныхъ точкахъ пространства различныя значенія, соответственно и множитель $\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ будетъ имѣть всевозможныя значенія отъ -1 до $+1$. Въ части пространства, размеры которой весьма велики сравнительно съ длиною волны λ , мы встрѣтимъ столько же положительныхъ значеній этого множителя, сколько и одинаковыхъ по абсолютной величинѣ значеній отрицательныхъ. Отсюда ясно, что среднее значеніе $J_{\text{ср}}$ энергии колебания въ этой части пространства равно

$$J_{\text{ср}} = i_1 + i_2 \dots \dots \dots (14)$$

Средняя энергія равна суммѣ энергій интерферирующихъ колебаній. Этимъ подтверждается законъ сохранения энергіи въ явленіяхъ интерференціи, вызывающихъ только измѣненіе распредѣленія энергіи, безъ измѣненія ея полнаго запаса. Частные случаи:

1. $a = b$; $i_1 = i_2 = i$.

$$\left. \begin{aligned} A &= 2a \cos \pi \frac{\delta}{\lambda} \\ J &= 4i \cos^2 \pi \frac{\delta}{\lambda} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

2. Разность хода $\delta = 2n \frac{\lambda}{2}$ = четному числу полуволнъ:

$$A = a + b, \quad J = (\sqrt{i_1} + \sqrt{i_2})^2 \dots \dots \dots (16)$$

Если $\delta = 2n \frac{\lambda}{2}$ и $a = b$, то

$$A = 2a; \quad J = 4i \dots \dots \dots (17)$$

3. Разность хода $\delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$ = нечетному числу полуволнъ:

$$A = a - b; \quad J = (\sqrt{i_1} - \sqrt{i_2})^2 \dots \dots \dots (18)$$

Если $\delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$ и $a = b$, то

$$A = 0, \quad J = 0 \dots \dots \dots (19)$$

Два луча, интерферируя, даютъ наибольшую амплитуду, когда разность хода δ равна четному, наименьшую — когда она равна нечетному числу полуволнъ. Два луча, интерферируя, «взаимно уничтожаются», когда δ равно нечетному числу полуволнъ и въ то же время амплитуды интерферирующихъ лучей равны.

При равныхъ амплитудахъ энергія колеблется между $4i$ и 0 ; средняя величина равна $2i$, см. (14).

Иногда случается, что два колебанія, вышедшія изъ одной точки A

(рис. 71) и дошедши по различным путям ABP и ACP до одной и той же точки P , распространяются затем далее по общему направлению PQ . Въ этомъ случаѣ разность хода δ имѣетъ одно и то же значение во всѣхъ точкахъ P_1 прямой PQ , ибо $\delta = ABP - ACP$. Поэтому результатъ интерференции будетъ общій для всѣхъ точекъ прямой PQ . Если

$\delta = 2n \frac{\lambda}{2}$, то вдоль

PQ распространяется колебаніе съ максимальной амплитудой и энергіей. Если

$\delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$, то

амплитуда и энергія

минимальны: если притомъ амплитуды a и b равны, то лучъ PQ вовсе не существуетъ, см. (19).

Мы до сихъ поръ предполагали, что оба колебанія встрѣчаются въ одной точкѣ, исходя изъ одной точки A (рис. 70 и 71). Однако можетъ случиться, что интерферирующія колебанія исходятъ изъ различныхъ точекъ A и A_1 (рис. 72). Для вычисленія амплитуды колебанія въ точкѣ

P , мы можемъ воспользоваться формулой (12) стр. 149, гдѣ $\delta = x_2 - x_1$, только въ томъ случаѣ, когда точки A и A_1 находятся въ одинаковыхъ фазахъ. Если же A и A_1 заведомо находятся въ различныхъ фазахъ, то слѣдуетъ съ той или другой стороны отъ одной изъ нихъ, напр. отъ A_1 , отыскать такую точку B , которая находилась бы въ одинаковой фазѣ съ другою точ-

кою (въ данномъ случаѣ съ A). Отъ этой точки B слѣдуетъ считать разстояние x , входящее въ выраженіе разности хода $\delta = x_2 - x_1$.

Разсмотрѣнный въ этомъ случаѣ интерференціи одинаково относится какъ къ поперечнымъ такъ и къ продольнымъ колебаніямъ.

§ 7. Интерференція лучей, колебанія которыхъ расположены въ плоскостяхъ взаимно перпендикулярныхъ. Этотъ случай относится только къ колебаніямъ поперечнымъ. Предположимъ, что вдоль PQ (рис. 73) распространяются два колебанія съ амплитудами a и b и общимъ періодомъ T , первое колебаніе расположено въ плоскости, проходящей черезъ PQ и ось Ox (\perp къ плоскости чертежа), второе — въ плоскости чертежа, проходящей черезъ PQ и ось Oy . Разность хода обоихъ лучей пусть равна δ , а слѣд. разность фазъ двухъ колебаній вдоль всего луча $\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$. Появленіе этихъ двухъ колебаній можетъ имѣть разные причины: или изъ одной точки A_1

Рис. 71.

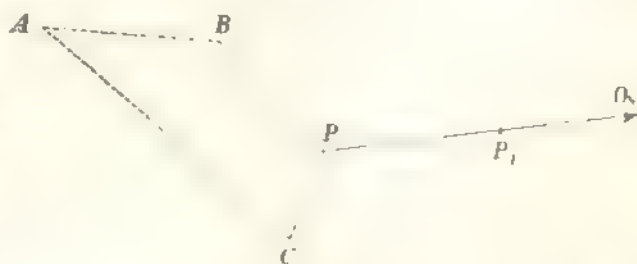
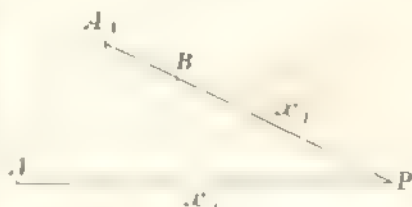


Рис. 72.



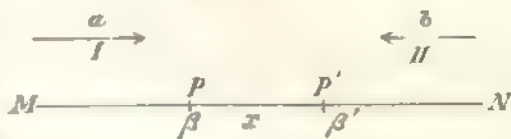
Круговое движение по часовой стрелке, когда

$$a = b \text{ и } \varepsilon = \frac{3\pi}{2} \text{ или } \delta = \frac{3}{4} \text{ (24)}$$

Если $\varepsilon = n\pi$ или $\delta = n\frac{\pi}{2}$, то вдоль PQ распространяется простое гармоническое колебательное движение с амплитудой $\sqrt{a^2 + b^2}$ (см. частные случаи 1 и 2 стр. 126 и 127), положительное направление колебаний составляет с Ox (амплитуда a) острый угол при n четном и тупой при n нечетном.

Частицы совершают, как мы видели, в общем случае движения по одинаковым и одинаково расположенным (ибо ε везде одинаково) эллипсам, плоскости которых перпендикулярны к PQ . Отсюда следует, что частицы движутся по поверхности эллиптического цилиндра, ось которого прямая PQ . Но так как они начинают двигаться постепенно одна за другой, то

Рис. 74.



ясно, что в каждый данный момент они расположены вдоль некоторой винтообразной линии, которая при $a = b$ превращается в обыкновенную винтовую линию на поверхности кругового цилиндра. Если смотреть со стороны Q , то винтообразная линия, идущая к наблюдателю, будет представлять обходящего цилиндра по или обратно направлению движения часовой стрелки, когда частицы соответственно движутся обратно или по часовой стрелке.

§ 8 Интерференция встречных колебаний. Стоячие волны. Положим, что вдоль прямой MX (рис. 74) распространяются два гармонических колебательных движения (одного периода) в противоположных направлениях: колебание I слева направо с амплитудой a и колебание II справа налево с амплитудой b . Допускаем, что оба колебания распространяются безвредно в противоположных направлениях. Спрашивается, какие движения будут совершаться точками, лежащими на MX ? Возьмем некоторую точку P и положим, что рассматриваемые два колебания имеют в ней разность фаз (фаза II-го минус фаза I-го) β . Если идти на расстояние x по направлению к X из точки P , то разность фаз β' этой точки будет уже другая. Фаза колебания II в P' больше, чем в P , на величину $2\pi \frac{x}{\lambda}$, а фаза колебания I в P' меньше, чем в P , на ту же величину $2\pi \frac{x}{\lambda}$. Отсюда ясно, что

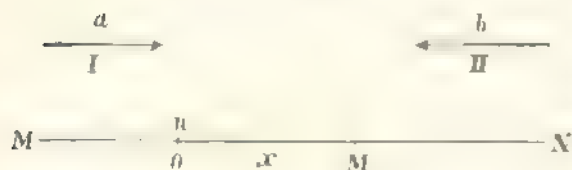
$$\beta' - \beta = + \frac{2\pi x}{\lambda} \text{ (24)}$$

Разность фаз двух колебаний меняется при переходе

отъ одной точки къ другой вдвое быстрее, чѣмъ мѣняется фаза каждаго изъ двухъ колебаній.

Ограничиваемся случаемъ, когда колебания продольныя или поперечныя, совпадающія по направленію. Разность фазъ β двухъ колебаній есть величина постоянная для данной точки, ибо колебания имѣютъ одинаковый періодъ. Точки на

Рис. 75.



прямой MN совершаютъ поэтому гармоническія колебательныя движенія съ амплитудой A , которая въ различныхъ точкахъ различна, мѣняясь отъ $a - b$ до $a + b$ (см. 137) и (39) стр. 122. Чтобы яснѣе представить себѣ распредѣленіе колебаній вдоль MN , выберемъ такую точку O (рис. 75), въ которой разность фазъ $\beta = 0$. Здѣсь происходитъ колебаніе съ наибольшей амплитудой $A = a + b$. Въ точкѣ M , находящейся на разстояніи x отъ O , разность фазъ $\beta = 4\pi \frac{x}{\lambda}$. Мы видѣли (стр. 122), что $A = a + b$, когда $\beta = 2n\pi$ или слѣд. когда $x = n \frac{\lambda}{2} = 2n \frac{\lambda}{4}$, т.-е.

$$A = a + b \text{ при } x = 0, \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3}{2}\lambda, \pm 2\lambda \text{ и т. д.} \quad (25)$$

Минимумъ амплитуды $a - b$ имѣемъ при разности фазъ $\beta = (2n + 1)\pi$ или слѣд., когда $x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$, т.-е.

$$A = a - b \text{ при } x = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3}{4}\lambda, \pm \frac{5}{4}\lambda \text{ и т. д.} \quad (26)$$

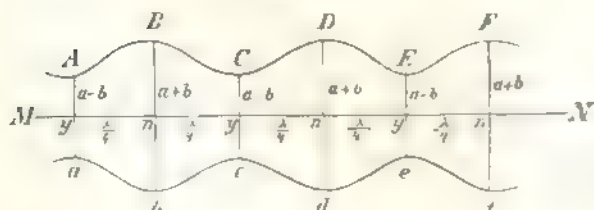
Итакъ вдоль MN устанавливается колебаніе съ амплитудой, периодически мѣняющейся между предѣлами $a + b$ и $a - b$.

Точки съ наибольшей амплитудой называются пучностями, точки съ наименьшей — узлами.

Разстояніе двухъ соседнихъ пучностей или двухъ соседнихъ узловъ

равно $\frac{1}{2}\lambda$; разстояніе соседнихъ пучности и узла равно $\frac{1}{4}\lambda$. Совокупность пучности и узла называется «стоячею волною».

Рис. 76.



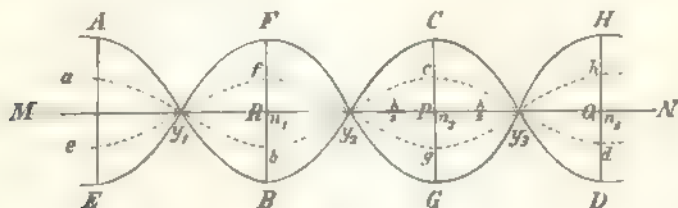
При $a = b$ имѣемъ въ пучностяхъ амплитуду $2a$, въ узлахъ амплитуду нуль, т.-е. частицы въ узлахъ находятся въ полномъ покоѣ.

Две линии $ABCDEF$ и $abcdef$, рис. 76, показывают, между какими пределами колеблются частицы: пучности и узлы отмечены буквами n и y .

На рис. 77 показаны те же пределы для случая $a = b$; в пучностях (n) амплитуда колебаний равна $2a$. В узлах (y) частицы остаются неподвижными.

Обращаемся к важному вопросу о фазах, в которых, в данный момент, находятся частицы, образующие своими колебаниями стоячую волну. Обратимся к пучности n , (рис. 77); здесь разность фаз составляемых колебаний нуль, а потому искомая фаза равна общей фазе этих составляемых колебаний. Возьмем тот момент, когда все эти фазы нуль, т. е. когда частица P , расположенная в центре пучности, находится на прямой MN . Если мы из этой пучности переместимся в сторону на произ-

Рис. 77.



вольную величину x , то, как мы видели, фаза одного из составляющих колебаний увеличивается на $2\pi \frac{x}{\lambda}$, фаза другого уменьшается на такую же величину, след. составляемым колебаниям соответствуют одинаковые, но в противоположные стороны направленные перемещения. Отсюда явствует, что частица, расположенная на произвольном расстоянии x от пучности, в рассматриваемый момент также находится на прямой MN .

Все частицы одновременно проходят через положения равновесия, а след. они и одновременно достигают крайних удалений от этих положений.

Однако частицы, расположенные в двух соседних пучностях, находятся всегда в противоположных фазах, ибо если P стремится из P к C , потому что составляемые колебания в данный момент направлены от P к C , то в этот же момент Q стремится из Q к D , так как $PQ = \frac{\lambda}{2}$, составляемые колебания в P и Q находятся в противоположных фазах, и след. составляемые движения в Q направлены от Q к D .

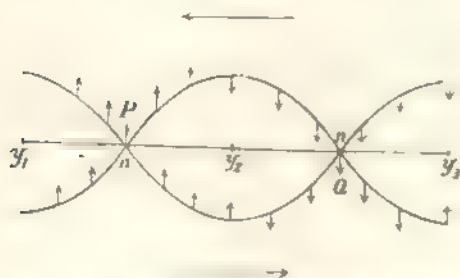
Все частицы, расположенные между двумя узлами, находятся в одинаковых, частицы находящиеся с двух сторон от одного узла — в противоположных фазах.

На рис. 78 еще лучше выясняется сказанное. Здесь две кривые показывают распределение частиц в составляемых колебаниях для момента, когда в составном движении все частицы находятся в положениях равновесия, стрелки показывают направления движения в данный или следующий момент. Из рисунка ясно, что все частицы, расположенные в

разсматриваемый моментъ между y_1 и y_2 движутся вверхъ, а расположенныя между y_2 и y_3 внизъ.

Въ нѣкоторый моментъ частицы расположены вдоль кривой $ABCD$ (рис. 77); черезъ время $\frac{1}{2}T$ ихъ расположеніе опредѣляется кривой $EFGH$. Но переходъ отъ перваго распредѣленія частицъ ко второму про-

Рис. 78.



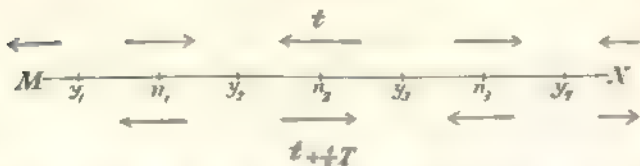
исходить совсѣмъ не такъ, какъ при распространѣніи одного луча. Тамъ всѣ частицы доходили до одинаковаго разстоянія a отъ положенія равновѣсія и промежуточные распредѣленія геометрически получались передвиженіемъ волнообразной линіи въ сторону (всего на $\frac{\lambda}{2}$). Здѣсь распредѣленіе $ABCD$ переходитъ сперва въ $abcd$, затѣмъ въ прямолиней-

ное $MRPQN$ затѣмъ въ $efgh$ и наконецъ въ $EFGH$. Въ стоячихъ волнахъ мы вовсе не имѣемъ дѣла съ какимъ нибудь поступательнымъ перемѣщеніемъ, вдоль луча, опредѣленно состояніи движенія. Въ несмѣщающихся пучностяхъ имѣемъ непрерывное максимальное движеніе, въ несмѣщающихся узлахъ совершенный покой.

Рассмотримъ еще стоячія волны при продольныхъ колеба-

ніяхъ. И здѣсь чередуются пучности и узлы, находящиеся другъ отъ друга на разстояніи $\frac{1}{4}\lambda$. Всѣ частицы, расположенныя между двумя соседними узлами y_1 и y_2 , y_2 и y_3 и т. д. (рис. 79), имѣютъ въ данный моментъ

Рис. 79.



времени t одно общее движеніе, указанное верхними стрѣлками; притомъ наиболѣе пе-
смѣщаются частицы, находящіяся въ центрахъ пучностей. Изъ рисунка видно, что

около узловъ y_2 и y_4 должны образоваться сгущенія, около узловъ y_1 и y_3 разрѣженія. Спустя время $\frac{1}{2}T$ направленіе движеній опредѣлится нижними стрѣлками. Всѣ частицы одновременно пройдутъ черезъ ихъ положенія равновѣсія - въ этотъ моментъ въ средѣ вдоль MN матерія расположена нормально, нигдѣ нѣтъ ни сгущеній, ни разрѣженій. Всѣмъ затѣмъ образуются разрѣженія около узловъ y_2 и y_4 и сгущенія около y_1 и y_3 . Переходъ сгущенія или разрѣженія во время $\frac{1}{2}T$ отъ одного узла къ другому имѣетъ совершенно другой характеръ чѣмъ тотъ же переходъ при простомъ распространѣніи продольныхъ колебаній, изображенномъ на рис. 67, стр. 145. Тамъ сгущеніе послѣдова-

тельно переходило съ одного мѣста къ другому; здѣсь оно уничтожается въ одномъ и возникаетъ въ другомъ мѣстѣ, не поыивая въ мѣстахъ промежуточныхъ.

Мы видимъ, что въ лучностяхъ частицы имѣютъ наиболѣе сильныя движенія, но плотность среды въ нихъ остается неизмѣнною, наоборотъ, въ узлахъ движенія нѣтъ, но происходятъ поперебѣнные сжатія и разрѣженія. Лучности суть мѣста наибольшахъ перемѣщеній, узлы мѣста наибольшахъ измѣненій плотности.

§ 9. Волновая поверхность и волновая линия: энергія и амплитуда.

Мы разсматривали до сихъ поръ распространение колебаній только по направленно въѣкоторой данной прямой. Перейдемъ къ разсмотрѣнію результатовъ одновременнаго распространения колебаній по различнымъ направленнымъ, исходящимъ изъ одной точки O . Разберемъ вопросъ сперва чисто геометрически, а затѣмъ укажемъ, какія слѣдуетъ ввести ограниченія, переходя къ разсмотрѣнію физически возможныхъ случаевъ.

Предположимъ, что въѣкоторой частицѣ O изотропной (стр. 25) среды начинается колебаться и что отъ нея колебанія распространяются по всѣмъ направленнымъ. Геометрическое мѣсто точекъ до которыхъ распространились колебанія въ данный моментъ, назовемъ волнвою поверхностью или волнвою волны. Такъ какъ въ изотропной средѣ колебанія по всѣмъ направленнымъ распространяются съ одинаковою скоростью c , то ясно, что въ изотропной средѣ волновая поверхность есть поверхность сферы. Ея радиусъ R равенъ ct , гдѣ t время, считаемое отъ начала колебанія центральной точки O . Каждое отдѣльное колебаніе центра O вызоветъ чрезъ время t одно колебаніе частицъ на поверхности S сферы, а чрезъ другое время t_1 одно колебаніе частицъ на поверхности S_1 другой сферы радиусъ которой $R_1 = ct_1$. На основаніи принципа сохранения энергіи вся имѣющаяся на лицѣ энергіи должна быть одна и та же во времена t и t_1 , если распространение колебаній не сопровождается попутнымъ «поглощеніемъ» энергіи, т.-е. переходомъ энергіи колеблющихся частицъ среды въ какую-либо другую форму энергіи.

Число частицъ на поверхности волны, а слѣд. и ихъ общая масса пропорциональны квадратамъ радиусовъ сферъ, а слѣд. энергія колебанія отдѣльныхъ частицъ или совокупности частицъ, расположенныхъ на единичѣ поверхности сферы, обратно пропорциональна квадрату радиуса этой сферы. Отсюда слѣдуетъ, что амплитуда колебаній обратно пропорциональна первой степени радиуса, см. (26) и вытекающее изъ этой формулы слѣдствіе на стр. 118 и 119.

Если въ изотропной средѣ изъ точки O распространяются колебанія во всѣ стороны, то амплитуда колебаній мѣняется обратно пропорционально первой, энергія — обратно пропорционально второй степени разстоянія отъ O .

Бываютъ случаи, когда колебанія распространяются отъ точки O лишь по всѣмъ направленнымъ, лежащимъ на одной плоскости, проходящей чрезъ O . Въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто точекъ, до которыхъ распространяется колебаніе въ данный моментъ времени, назовемъ волнвою

линей или линей волны. Въ изотропной средѣ волновая линія есть окружность и не трудно сообразить, что при такомъ распространении колебаній въ одной плоскости, энергія колебаній обратно пропорціональна первой степени, амплитуда же обратно пропорціональна корню квадратному изъ разстоянія отъ точки O .

Въ анизотропной средѣ (стр. 25) волновая поверхность уже не будетъ шаровою. Она, напр., можетъ быть поверхностью эллипсоида.

Точно также волновая линія уже не будетъ окружностью, но можетъ быть эллипсомъ.

§ 10. Принципъ Гюйгенса. Если изъ какой-либо точки O колебания распространяются во все стороны и, между прочимъ, до другой точки M то колебания этой последней существенно ничѣмъ не отличаются отъ колебаній первой точки O . Но если движеніе этой последней вызвало

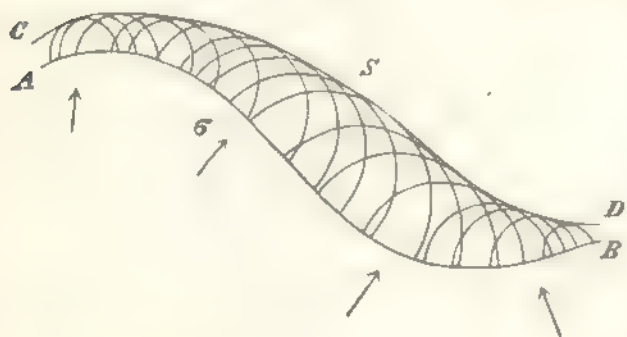
распространяющіяся во все стороны колебанія, то нѣтъ причины, почему движеніе точки M не вызовутъ также въ окружающей ее средѣ колебанія, распространяющіяся отъ нея, какъ отъ центра, во все стороны. Такъ и будетъ въ действительности и это дастъ намъ возможность,

пользуясь особымъ геометрическимъ методомъ, называемымъ принципомъ Гюйгенса, построить волновую поверхность S для каждаго угодно момента времени t , если намъ известны тѣ предыдущее, одинаковые или различные моменты времени t_0 , когда точки нѣкоторой произвольной поверхности σ начинали колебаться. Когда t общее для всехъ точекъ на σ , то ясно, что σ сама есть поверхность волны, соответствующая времени t_0 .

Построеніе Гюйгенса заключается въ слѣдующемъ: все точки M поверхности σ слѣдуетъ принять за новые центры колебаній, начинающихъ распространяться во все стороны съ того момента t_0 , когда соответствующія точки M приходятъ въ движеніе: слѣдуетъ построить т.-наз. элементарныя волновыя поверхности (шары, эллипсоиды) около каждой точки M , придавъ имъ тѣ размѣры, которые онѣ получаютъ за время $t - t_0$. Обижающая (т.-е. общая касательная поверхность) ко всемъ этимъ элементарнымъ поверхностямъ, расположенная съ той стороны отъ σ , куда колебанія распространяются и будетъ искомою волною поверхностью S въ время t .

Принципомъ Гюйгенса мы будемъ пользоваться, какъ даннымъ гео-

Рис. 80.



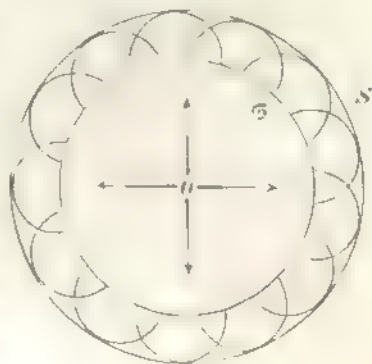
метрическимъ методомъ, не приводя доказательства его правильности, что не можетъ быть сдѣлано элементарнымъ путемъ.

Для разъясненія можетъ служить рис. 80; AB представляетъ ту поверхность σ до точекъ которой въ неодинаковыя времена t_0 дошло одно единичное колебательное движеніе съ той стороны, на которой помѣщены стрѣлки. Принявъ всѣ точки на поверхности σ за новыя центры колебаній, мы описываемъ около нихъ полусферы радиусами равными $v(t - t_0)$. Мы приняли, что колебаніе раньше всего достигаетъ среднихъ частей поверхности AB . Общая касательная поверхность CD къ этимъ полусферамъ и будетъ искомою волноюю поверхностью въ моментъ времени t . Понимать слѣдуетъ, что такъ: ко всякой точкѣ пространства распространяются колебанія отъ всѣхъ точекъ поверхности σ . Интерферируя, эти колебанія взаимно уничтожаются, во-первыхъ во всѣхъ точкахъ пространства, лежащихъ «за» поверхностью σ (т.е. помѣщены стрѣлки). Колебаніе не идетъ назадъ и потому мы можемъ ограничиться полусферами. Во-вторыхъ колебанія во время $t - t_0$ уничтожаются во всѣхъ точкахъ, лежащихъ между σ и S ; въ разсматриваемый моментъ находится въ движеніи только частицы, лежащія на поверхности S .

Еслибъ среда была анизотропною, то намъ пришлось бы, вмѣсто полусферъ, построить половинны элементарныхъ волновыхъ поверхностей другой формы, напр., полу-эллипсоиды.

Дѣло упрощается, когда поверхность σ сама волновка, когда t_0 общее для всѣхъ ея точекъ и полусферы имѣютъ всѣ одинъ и тотъ же радиусъ. На рис. 81 показанъ простой случай построения сферической волновой поверхности S (центръ въ O), когда дана волновка поверхность σ для болѣе ранняго момента времени.

Рис. 81.



Когда центръ колебаній находится на весьма большомъ разстояніи отъ того мѣста, въ которомъ мы разсматриваемъ колебанія, то часть сферической волновой поверхности можетъ быть принята за плоскость; мы будемъ ее называть плоскою волною (хотя этотъ терминъ иногда прилагается къ тому, что мы назвали волноюю линіей, стр. 157). На черт. 82 показано весьма простое геометрическое построение плоской волны $CD = S$ по данному ея положенію $AB = \sigma$ для какаго-либо предшествующаго момента времени.

Замѣтимъ себѣ такое замечаніе, въ изотропной средѣ лучъ есть нормаль къ волновой поверхности, напр. къ плоскости: такъ PQ (черт. 82) одинъ изъ лучей.

Принципъ Гюйенса безъ измѣненія прилагается и къ волновымъ фронтамъ. Рис. 80, 81 и 82 непосредственно могутъ относиться и къ этому случаю, если предположить, что σ и S изображаютъ въ нихъ линіи, рас-

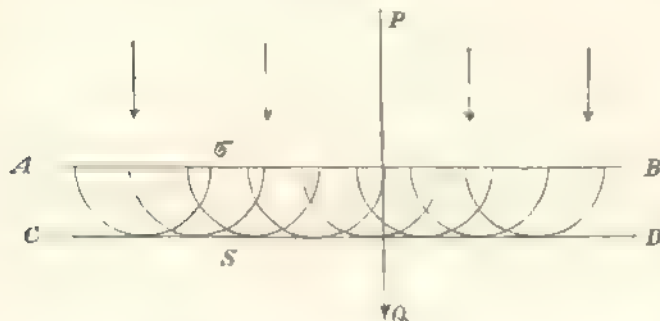
положенные въ плоскости распространения колебаній. Въмѣсто полусферы мы будемъ имѣть полуокружности.

§ 11. Такъ называемое прамолинейное распространеніе колебаній.

Введеніе понятія о волновой поверхности, отъ всѣхъ точекъ которой распространяются колебанія во всѣ стороны и о послѣдовательномъ возник-

новеніи новыхъ волновыхъ поверхностей, которыя могутъ быть построены на основаніи принципа Гюйгенса, совершенно устраняетъ изъ числа разсматриваемыхъ явленій то, что мы называли лучемъ, т.-е. прямую, вдоль которой распространяется колебатель-

Рис. 82.



ное движеніе. Колебаніе любой точки *A* (рис. 83) не слѣдуетъ уже разсматривать какъ слѣдствіе простаго распространенія колебаній изъ *P* до *A*, гдѣ *P* промежуточная точка на прямой *OA*, соединяющей *A* съ начальнымъ центромъ *O* колебаній, мы должны колебаніе точки *A* разсматривать, какъ результатъ интерференціи колебаній, дошедшихъ до *A* отъ всѣхъ точекъ волновой поверхности *QR*.

Рис. 83.



Несмотря на это, все-таки возможно такъ сказать спасти понятіе о лучѣ и удержать его, какъ весьма полезное геометрическое пособіе хотя бы для случая свободнаго распространенія колебаній въ однородной средѣ. Дѣлается это на основаніи слѣдующихъ соображеній, не выдерживающихъ, однако, строгой критики, но могущихъ дать приблизительное понятіе о томъ, что здѣсь происходитъ. Проведемъ изъ точки *A* рядъ прямыхъ *Am*, *Am'*, *Am''*,... длины которыхъ, вмѣстѣ съ длиною *AP* составляли бы арифметическую прогрессию съ разностью $\frac{\lambda}{2}$, такъ что $Am - AP = Am' - Am = Am'' - Am' = \dots = \frac{\lambda}{2}$. Вращая всю фигуру около прямой *OA*, получаемъ рядъ поверхностей конусовъ, которые вырѣзываютъ изъ

волновой поверхности QR кольцевыя зоны и одинъ центральный сегментъ mM . Обозначая черезъ r_n длину образующей $n^{\text{-ой}}$ конуса, такъ что $r_n = r_0 + n \frac{\lambda}{2}$, гдѣ $r_0 = AP$, мы видимъ, что $n^{\text{-ая}}$ зона заключена между поверхностями конусовъ, образующія которыхъ r_n и $r_{n+1} = r_n + \frac{\lambda}{2}$; нулевая зона и будетъ центральнымъ сегментомъ. Поверхность $n^{\text{-той}}$ зоны обозначимъ черезъ S_n . Изъ рис. 84 видно, что $S_n = 2\pi R h$, гдѣ $h = R \left\{ \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \right\}$; слѣдовательно

$$S_n = 2\pi R^2 \left\{ \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \right\} (a)$$

Далѣе рис. 84 даетъ

$$\begin{aligned} \left(r_n + \frac{\lambda}{2} \right)^2 &= (R + r_0)^2 + R^2 - 2R(R + r_0) \cos(\alpha + \beta) \\ r_n^2 &= (R + r_0)^2 + R^2 - 2R(R + r_0) \cos \alpha. \end{aligned}$$

Вычитая, получаемъ

$$\lambda \left(r_n + \frac{\lambda}{4} \right) = 2R(R + r_0) \left\{ \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \right\} (b)$$

Раздѣляя (a) на (b), имѣемъ

$$S_n = \frac{2R}{R + r_n} \left(r_n + \frac{\lambda}{4} \right) = S_0 + n \frac{\pi R \lambda}{2(R + r_n)} (27)$$

Мы положили $r_0 = r_0 + n \frac{\lambda}{2}$ и обозначили черезъ S_0 поверхность сегмента

$$S_0 = \frac{\pi R \lambda}{R + r_0} \left(r_0 + \frac{\lambda}{4} \right) (28)$$

Формула (27) показываетъ, что поверхности зонъ составляютъ арифметическую прогрессию и слѣд. каждая изъ нихъ равна арифметическому среднему поверхностейъ двухъ зонъ, съ нею соедѣнныхъ. На основаніи этого разсуждаютъ такъ ко всякой точкѣ M (рис. 84), лежащей на одной изъ зонъ, можно подобрать такія двѣ точки M_1 и M_2 , лежащія на двухъ соедѣнныхъ зонахъ, что AM_1 и AM_2 будутъ отличаться отъ AM на $\frac{\lambda}{2}$. Колебаніе, идущее отъ M къ A , уничтожается, слѣд., однимъ изъ колебаній, идущихъ отъ M_1 или M_2 . Всѣ колебанія, идущія отъ $n^{\text{-той}}$ зоны, мы можемъ себѣ представить уничтоженными колебаніями, идущими отъ половины $(n-1)^{\text{-ой}}$ и половины $(n+1)^{\text{-ой}}$ зонъ. Такъ колебанія 3-ей зоны уничтожаются колебаніями половины 4-ой и половины 2-ой зоны, колебанія 2-ой — половиною 1-ой и половиною 3-ей; наконецъ, колебанія 1-ой зоны — половиною 2-ой и половиною сегмента. Не уничтоженными остаются колебанія, идущія отъ половины центрального сегмента. Къ этому слѣдуетъ прибавить, что колебанія, идущія къ A (рис. 83) отъ внутреннихъ зонъ должны пройти болѣе длинный путь и (при болѣе

глубокомъ анализѣ вопроса (то оказывается особенно важнымъ), что они выходятъ изъ поверхности QR подъ наклономъ къ нормали. Вслѣдствіе этого можно вовсе не принимать во вниманіе колебанія, идущихъ къ A отъ зонъ, болѣе удаленныхъ отъ центральнаго сегмента.

Разсматривая колебаніе въ A какъ результатъ сложения колебаній, вышедшихъ изъ поверхности центральнаго сегмента, равной $\frac{1}{2} S_0$, см (28), и расположенной вокругъ точки P , мы тѣмъ самымъ какъ бы возвращаемся къ представлению о прямоугольномъ распространении колебаній, къ представлению о лучахъ, въ дѣйствительности не имѣющихъ никакого реального значенія, но оказывающихся весьма полезными при геометрическихъ по-

Рис. 84.

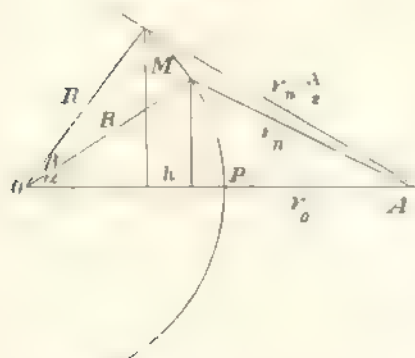
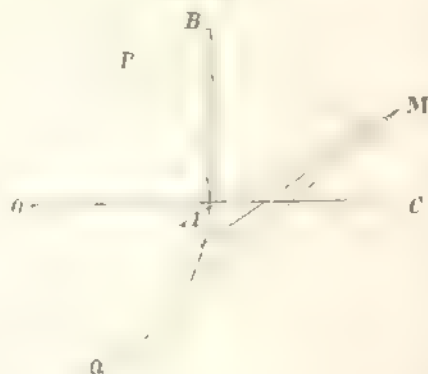


Рис. 85.



строенияхъ, къ которымъ приходится обращаться, изучая распространение колебаній въ различныхъ случаяхъ.

Предыдущія разсужденія о взаимномъ уничтоженіи дѣйствій различныхъ зонъ очевидно приложимы только въ случаѣ, когда вся волновая поверхность QR (рис. 84) дѣйствительно существуетъ, т.-е. только къ случаю т. наз. свободнаго распространения колебаній.

§ 12. Диффракція. Мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, что реальное, физическое значеніе имѣютъ только волновые поверхности, понятие же о лучѣ можетъ быть udržано, и то съ натяжкой, только въ случаѣ свободнаго во все стороны распространения колебанія. Это особенно рѣзко подтверждается на случаяхъ несвободнаго распространения волны, когда эта волна встрѣчаетъ на своемъ пути преграду, препятствующую дальнѣйшему распространению какой-либо ея части. Тогда происходитъ особаго рода явленія, называемыя явленіями диффракціи, при разсмотрѣніи этихъ явленій теряется всякая возможность удержать представление о лучахъ. Относя подробности къ учению о свѣтѣ, мы здѣсь дадимъ только понятие объ этихъ явленіяхъ. Предположимъ, что волновая поверхность PAQ (рис. 85) встрѣчаетъ на своемъ пути «край» AB , задерживающій половину ея, AP . Еслибы изъ точки O распространялось колебаніе лучами во все стороны, то крайній

лучь был бы OAC : колебания распространялись бы только в части пространства CAQ , а в части CAB частицы должны были бы оставаться в покое. Совсем другое получается, если гл. точки поверхности AQ рассматривать, как новые центры колебаний. В этом случае ясно, что и в точку M , лежащую в части BAC , могут попасть колебания. Более сложные вычисления показывают, что эти колебания вообще взаимно не уничтожаются, что слѣд. распространяющіеся изъ O волны отчасти какъ бы огибаютъ экранъ AB . Появление колебаний в части пространства BAC и принадлежитъ къ явлениямъ дифракции.

Второй случай представленъ на рис. 86 на пути волновой поверхности PQ помѣщено небольшое тѣло AB , напр. кружокъ или узенькая полоска (напр. проволока) ширина которой AB . Въ пространство $CABD$ попадаютъ колебания, исходящія отъ частей AP и BQ волновой поверх-

Рис. 86.

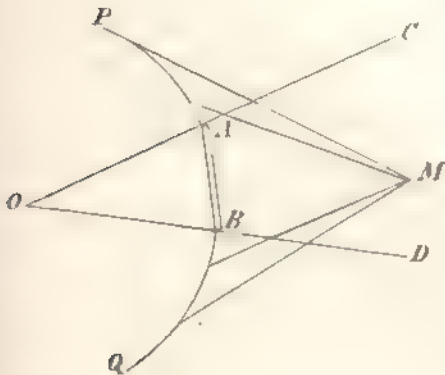
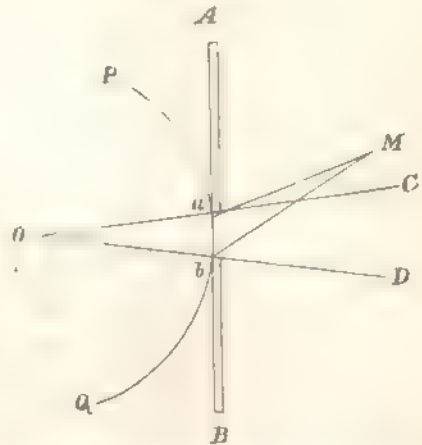


Рис. 87.



ности и въ особенности въ центральной точкѣ M они не уничтожаются. !

Третій случай мы имѣемъ, когда на пути волновой поверхности PQ (рис. 87) поставленъ экранъ AB съ весьма малымъ отверстіемъ ab . Появленіе луча въ M привело бы къ нецѣльному предположенію, что колебания должны распространиться только внутри части (abD) пространства. Въ действительности колебания, исходящія отъ различныхъ точекъ небольшой части поверхности волны, распространяясь во все стороны, заставляютъ колебаться точки M , лежащія въ направленияхъ отъ ab , составляющихъ большіе углы съ направлениемъ OaC и ObD . Особенно изъ этого третьяго случая дифракции явствуетъ, что ни о какомъ прямолинейномъ распространении волнъ вообще говорить нельзя, и что поэтому лучами и при геометрическихъ построенияхъ слѣдуетъ пользоваться съ величайшею осторожностью.

Явленія дифракции происходятъ и при распространении волновой тѣли (стр. 157), встречающей на своемъ пути какія-либо преграды.

§ 13. Физическое понятие о волновой поверхности. Мы припили къ понятию о сферической волновой поверхности въ свободной изотропной средѣ, предполагая, что первоначально начинаетъ колебаться только одна точка и что это колебание передается всѣмъ окружающимъ ее (со всѣхъ сторонъ) частицамъ. Но такой случай физически невозможенъ. Первоначальныя колебания исходятъ всегда отъ частицъ, лежащихъ въ нѣкоторой конечной, хотя иногда и небольшой части пространства и притомъ, во многихъ случаяхъ, колебания различныхъ частицъ обладаютъ неоднаковыми направлениями и фазами. Кромѣ того отъ каждой отдельной колеблющейся частицы не передаются колебания одинаково во всѣ стороны. Но преимущественно или въ плоскости, перпендикулярной къ направлению колебаний, когда среда такова, что въ ней могутъ распространяться колебания поперечныя или во направленію первоначальнаго колебания, когда среда способна къ передачѣ колебаний продольныхъ.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что цѣлой замкнутой волновой поверхностью, окружающей со всѣхъ сторонъ область первоначальнаго возбужденія движеній и представляющей геометрическое мѣсто точекъ, до которыхъ одновременно доходятъ колебания и которые притомъ находятся всѣ въ одинаковыхъ фазахъ—въ дѣйствительности не существуетъ.

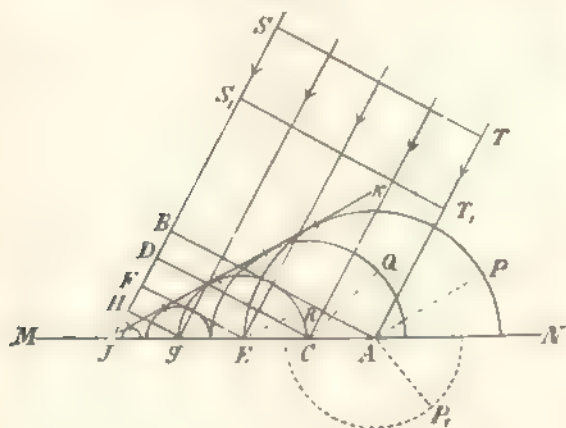
Но небольшая часть геометрической волновой поверхности можетъ имѣть и физическое значеніе мѣста точекъ, находящихся въ одинаковыхъ фазахъ. Для объясненія физическихъ явленій, мы должны поэтому ограничиваться разсмотрѣніемъ лишь небольшихъ участковъ волновой поверхности, во всякомъ случаѣ видимыхъ изъ мѣста первоначальнаго возбужденія колебаний подъ весьма небольшимъ угломъ. Такъ на дѣлѣ всегда и поступаютъ.

Для волновой линии дѣло представляется проще, когда колебания поперечныя. Въ этомъ случаѣ замкнутыя волновыя линии, гдѣ точки которыхъ находятся при одинаковой фазѣ (кольца на поверхности воды), физически возможны.

Для волновой линии дѣло представляется проще, когда колебания поперечныя. Въ этомъ случаѣ замкнутыя волновыя линии, гдѣ точки которыхъ находятся при одинаковой фазѣ (кольца на поверхности воды), физически возможны.

§ 14. Отраженіе волнъ и лучей. Если колебательное движеніе доходить до поверхности, разграничивающей двѣ различные среды, то оно отчасти распространяется во второй средѣ, отчасти же возвращается назадъ въ первую среду, причемъ образуются новыя волновыя поверхности, удаляющіяся отъ поверхности раздѣла. Это явленіе называется отраженіемъ,

Рис. 88.



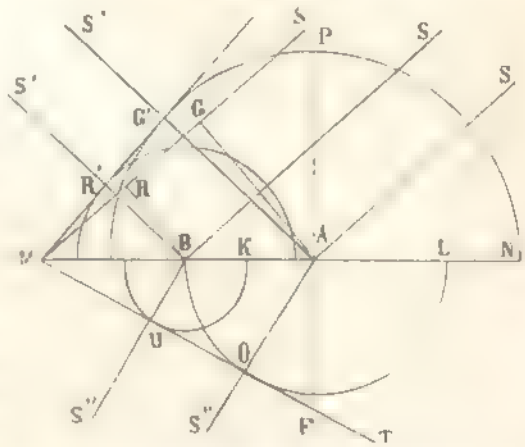
Принцип Гюйгенса дает нам возможность построить отраженную волну и вывести для изотропной среды элементарный закон равенства условий падения и отражения лучей, т. е. прямых, перпендикулярных къ полновымъ поверхностямъ.

Положимъ, что MN (рис. 88) представляетъ плоскость раздѣла двухъ средъ; ST часть плоской волны (стр. 159), перпендикулярной, какъ и плоскость MN , къ плоскости рисунка. Прямые, перпендикулярныя къ ST суть лучи. Рис. 82 стр. 160 показываетъ, какимъ образомъ волна ST переходитъ въ S_1T_1 и вообще передвигается параллельно самой себѣ. Въ нѣкоторый моментъ времени крайняя точка T разматриваемой части плоской волны дойдетъ въ A до плоскости раздѣла MN . Въ этотъ моментъ волна имѣетъ положеніе AB . Съ этого момента точка A дѣлается новымъ центромъ колебаній, отъ котораго распространяется полшаровая элементарная волновая поверхность

обратно въ первую среду. Сказанное относится ко всѣмъ точкамъ прямой A , т. е. прямой, проходящей черезъ A и перпендикулярной къ плоскости рисунка. Огибающая полшаровидныхъ поверхностей будетъ очевидно поверхностью полуцилиндра, ось котораго прямая A . Нѣсколько позже колебаніе достигаетъ прямой C ; въ этотъ моментъ положеніе плоской волны опредѣлится прямой CD и съ этого момента около прямой C начинается образовываться полуцилиндрическая волновая поверхность. Еще позже колебаніе доходитъ до прямыхъ E , G и т. д. Наконецъ оно достигаетъ до точекъ прямой J . Къ этому моменту времени уже успѣло образоваться безчисленное множество полуцилиндрическихъ волнъ около прямыхъ, проходящихъ черезъ различныя точки прямой AJ и перпендикулярныхъ къ плоскости рисунка. Чѣмъ ближе точка къ J , тѣмъ меньше радиусъ сѣченія полуцилиндра. Легко опредѣлить этотъ радиусъ. Точки A и B одновременно начали колебаться, полуцилиндръ образовался около A въ теченіе того времени, пока колебаніе распространилось отъ B до J ; отсюда слѣдуетъ, что радиусъ полуокружности, описаннаго около A , т. е. $AP = BJ$. Точно также $CQ = DJ$, $ER = FJ$ и т. д.

Плоскость раздѣла MN представляетъ частный случай поверхности AB рисунка 80 стр. 158, на которомъ мы выяснили принципъ Гюйгенса. Поверхность, касательная ко всѣмъ полуцилиндрамъ и будетъ искомою волною волновой поверхностью, образующеюся при отраженіи. Докажемъ, что это есть плоскость, проходящая черезъ J или, иначе, что одна и та же

Рис. 89.



Плоскость раздѣла MN представляетъ частный случай поверхности AB рисунка 80 стр. 158, на которомъ мы выяснили принципъ Гюйгенса. Поверхность, касательная ко всѣмъ полуцилиндрамъ и будетъ искомою волною волновой поверхностью, образующеюся при отраженіи. Докажемъ, что это есть плоскость, проходящая черезъ J или, иначе, что одна и та же

Около A описана полуокружность радиусомъ AL (она случайно проходить через B) и около B — радиусомъ BK причёмъ

$$\frac{AL}{GM} = \frac{BK}{KM} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{n} \quad (30)$$

Изъ M проводимъ касательныя MU и MO къ двумъ полуокружностямъ и докажемъ, что эти касательныя совпадаютъ.

Треугольники BMU и AMO подобны, такъ какъ $\angle O = \angle U = 90^\circ$ и стороны пропорциональны, ибо изъ рисунка и изъ (30) получается:

$$\frac{AM}{BM} = \frac{GM}{KM} = \frac{AL}{BK} = \frac{AO}{BU}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\angle AMO = \angle BMU$, что и требовалось доказать. Плоская волна, образовавшаяся во второй средѣ, перемѣщается также параллельно самой себѣ; очевидно, что прямыя AS , BS представляютъ преломленные лучи. Уголъ $S'AF$ есть уголъ преломления.

Выведемъ законы преломления. Прежде всего ясно, что падающій лучъ SA , нормаль PF и преломленный лучъ AS' лежатъ въ одной плоскости. Но также

$$AG' = MA \sin G'MA = MA \sin G'AM = MA \sin S'AP \\ AO = MA \sin AMO = MA \sin S'AF.$$

Слѣдовательно

$$\frac{\sin SAP}{\sin S'AF} = \frac{AG'}{AO} = \frac{GM}{AL}.$$

Равенство (30) даетъ

$$\frac{\sin SAP}{\sin S'AF} = \frac{v_1}{v_2} = n \quad (31)$$

Мы видимъ, что отношение синуса угла паденія къ синусу угла преломленія для колебаній съ даннымъ періодомъ есть величина постоянная для данныхъ двухъ средъ, характеризованныхъ скоростями распространенія v_1 и v_2 ; это отношение равно отношению скорости въ первой къ скорости во второй средѣ. Оно называется относительнымъ коэффициентомъ преломленія. Сравнивая вебъ среды съ одною опредѣленною, произвольно нами выбранною, въ которой скорость равна v_0 , мы называемъ просто коэффициентомъ преломленія какой-либо данной среды тотъ, который соответствуетъ переходу лучей изъ выбранной нами въ эту данную среду. Пусть n_1 и n_2 коэффициенты преломленія двухъ средъ, въ которыхъ скорости суть v_1 и v_2 . Тогда мы имѣемъ $n_1 = \frac{v_0}{v_1}$ и $n_2 = \frac{v_0}{v_2}$. Относительный коэффициентъ преломленія n при переходѣ изъ первой среды во вторую, какъ мы видѣли, равенъ

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_0}{v_2} : \frac{v_0}{v_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (32)$$

Относительный коэффициент преломления при переходе луча из одной среды в другую равен коэффициенту преломления второй среды, деленному на коэффициент преломления первой.

На рис. 90 показан переход лучей из среды с меньшей скоростью v_1 в среду с большей скоростью v_2 . Здесь $AF > CE$ и $BG > DE$, притомъ

$$\frac{AF}{CE} = \frac{BG}{DE} = \frac{v_2}{v_1} > 1.$$

Какъ видно, лучъ при преломлении удаляется отъ нормали. Провея нормаль NN , имѣемъ уголъ паденія $\varphi = \angle SAN$ и уголъ преломления $\psi = \angle S_1AN$. Какъ и прежде, имѣемъ, полагая $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n}$, гдѣ $n > 1$,

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n} < 1.$$

Отсюда

$$\sin \psi = n \sin \varphi. \quad (33)$$

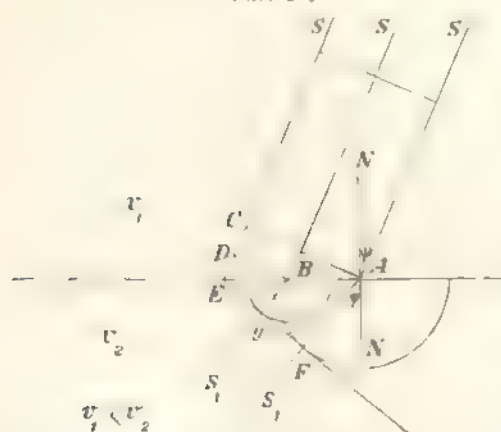
Мы получаемъ $\psi = 90^\circ$, когда φ принимаетъ некоторое частное значеніе Φ , гдѣ

$$\sin \Phi = \frac{1}{n}. \quad (34)$$

При $\varphi = \Phi$ преломленный лучъ идетъ по направлению AE , со амплитуда, впрочемъ, дѣлается без-

конечно малою, когда φ приближается къ Φ и ψ къ 90° . Когда $\varphi > \Phi$, то $\sin \varphi > \frac{1}{n}$ и формула (33) даетъ $\sin \psi > 1$, чего быть не можетъ. Въ этомъ случаѣ лучъ вовсе не преломляется, т.е. не переходитъ во вторую среду, но безъ измѣненія величины амплитуды отражается. Такое явленіе называется полнымъ внутреннимъ отраженіемъ: оно происходитъ на границѣ двухъ средъ и притомъ въ той, въ которой скорость распространенія колебаній

Рис. 90.



меньше. Уголъ Φ , опредѣляемый ур. (34) называется предѣльнымъ угломъ полного внутренняго отраженія.

Все изложенное въ послѣднихъ параграфахъ одинаково относится какъ къ поперечнымъ, такъ и къ продольнымъ колебаніямъ.

§ 16. Потеря полуволны при отраженіи. Обратимся къ вопросу о фазѣ отраженныхъ колебаній. Спрашивается, составленъ ли отраженный

лучь прямое продолжение луча падающего, въ смыслѣ непрерывности измѣненія фазъ? Пусть AB (рис. 91) падающій, BN отраженный лучъ. Считаемъ время t отъ момента начала колебанія въ некоторой точкѣ A . Удаленіе y любой точки M падающаго луча во время t определяется формулою (4) стр. 143

Рис. 91.

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots (35)$$

гдѣ x разстояніе этой точки M отъ A . Спрашивается, получимъ ли мы удаленіе y во время t точки N , лежащей на отраженномъ лучѣ, если мы въ (35) вставимъ $x = x_0 + \xi$, гдѣ $AB = x_0$ и $BN = \xi$? Теоретическое изслѣдованіе, которое со всею строгостію здѣсь не можетъ быть указано, приводитъ къ слѣдующему результату.

Необходимо различать два случая: 1) когда плотность δ_2 второй среды меньше и 2) когда она больше плотности δ_1 первой среды.

1. Вторая среда менѣе плотна, $\delta_2 < \delta_1$. Въ этомъ случаѣ отраженное колебаніе есть прямое продолженіе падающаго и фаза въ точкѣ N такая же, какая получилась бы на разстояніи ξ отъ B на прямомъ продолженіи луча AB . Перемѣщеніе y въ точкѣ N , т.е. уравненіе отраженнаго луча будетъ (полагая $a_1 < a$)

Рис. 92.

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \xi}{\lambda} \right) \dots (36)$$

На рис. 92 прямая MN изображаетъ границу двухъ средъ, до которой дошло колебательное движеніе въ некоторый моментъ t , въ который распределеіе частицъ опредѣляется кривою $abcde$ на первой строкѣ (каждое колебаніе начинается движеніемъ внизъ). Сплошными линіями показаны въ слѣдующихъ затѣмъ строкахъ распределеіе частицъ въ падающемъ лучѣ во времена $t + \frac{1}{4}T$, $t + \frac{1}{2}T$, $t + \frac{3}{4}T$ и $t + T$. Пунктиромъ обозначено налѣво отъ MN распределеіе частицъ въ отраженномъ колебаніи. Оно получается, если продолжити кривую падающаго луча направо отъ



MN на величины $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$ и λ и затем переигнуть мысленно рисунок вдоль прямой MN так, чтобы его правая половина упала на левую. Амплитуда въ отраженномъ лучѣ меньше, чѣмъ въ падающемъ.

Никакой потери фазы при отражении не происходитъ.

II. Вторая среда болѣе плотна: $\delta_1 > \delta$. Въ этомъ случаѣ происходитъ при отражении потери полуволны и отраженное колебание уже не составляетъ прямого продолженія падающаго колебания. Перемѣщение y въ точкѣ A (рис. 91) будетъ такое, какое получилось бы на продолжающемся безъ отраженія лучѣ на разстоянн $r_0 + \frac{1}{2}\lambda$ отъ точки A . Уравненіе отраженнаго луча будетъ

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} \right)$$

или

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) \quad (37)$$

или еще

$$y = -a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} \right) \quad (38)$$

Перемена знака амплитуды и выражаетъ собою фактъ потери полуволны, см. таблица (9) стр. 144, строка 4-ая.

На рис. 93 сплошныя кривыя съ лѣвой стороны отъ MN имѣютъ то же значеніе, какъ и на рис. 92. Пунктиромъ и здѣсь изображено распределеніе частицъ въ отраженномъ лучѣ. Оно получается, когда продолжимъ сплошную кривую направо отъ MN , выбросимъ полуволны и перекинемъ опять правую часть рисунка на лѣвую. Такъ во второй строкѣ (время $t + \frac{T}{4}$) выброшена полуволна def и часть fg переложена лѣво въ положеніе $f'e$. Въ третьей строкѣ выброшена полуволна cde и часть efg переложена въ положеніе $ef'a$ и т. д. II здѣсь амплитуда отраженнаго луча меньше амплитуды падающаго.

Все сказанное о двухъ случаяхъ отраженія одинаково относится какъ къ поперечнымъ, такъ и къ продольнымъ колебаніямъ.

Совокупивъ все изложенное, мы получаемъ такой результатъ:

1. При отраженн отъ менѣе плотной среды перемены знака амплитуды или потери полуволны не происходитъ. Если уравненіе падающаго луча написать въ видѣ

$$y = a \sin \theta \quad (39)$$

гдѣ $\theta = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$, то уравненіе отраженнаго луча будетъ

$$y = a_1 \sin \left(\theta - 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) \quad (40)$$

Здесь $a_1 < a$ и $\theta = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$, где $x = AB$ на рис. 91.

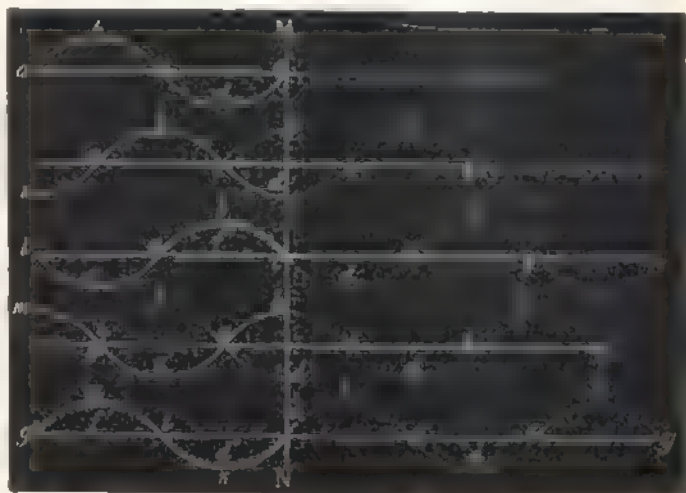
2. При отражении от более плотной среды амплитуда претерпевает перемену знака или, иначе, теряется полуволна. Уравнение отраженного луча будетъ

$$y = a_1 \sin \left(\theta_0 - 2\pi \frac{z}{\lambda} - \pi \right) = -a_1 \sin \left(\theta_0 - 2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \dots (41)$$

Причина, въ первомъ случаѣ потери, а въ второмъ случаѣ не потери полуволны можетъ быть вполне выяснена только впоследствии. Обыкновенно приходящее, можетъ быть и не вполне удовлетворительное разъяснение главнымъ образомъ основано на некоторой аналогии, существующей между явлениемъ

отраженія лучей на границѣ двухъ различныхъ средъ и явлениемъ, происходящимъ при ударѣ упругихъ тѣлъ. Мы увидимъ въ слѣдующемъ отдѣлѣ, что если упругій шаръ ударитъ въ другой неподвижный упругій шаръ, обладающій меньшею, чѣмъ онъ, массою, то направление скорости первого не мѣняется; если же мас-

Рис. 93



са второго шара больше массы первого, то послѣдній отскакиваетъ, т. е. его скорость мѣняетъ знакъ. Аналогично происходитъ перемена направления скорости частицы, движущейся на границѣ двухъ различно плотныхъ средъ, если она принадлежитъ средѣ менѣе плотной.

Разберемъ, однако, вопросъ подробнѣе и точнѣе.

Если колебательное движение, распространяясь, послѣдовательно передается отъ одной частицы къ сосѣдней, то на границѣ двухъ средъ, должно происходить слѣдующее. Пусть A послѣдняя частица первой B первая, сосѣдняя съ нею частица второй среды.

Если A и B обладаютъ одинаковою массою, то вся энергiя частицы A цѣликомъ передается частицѣ B .

Если, однако, частица B обладаетъ меньшею массою, чѣмъ A , то правильность передачи энергiи нарушается; лишь часть энергiи частицы A передается частицѣ B , которая, если можно такъ выразиться, слишкомъ легко поддается импульсу, съ которымъ на нее дѣйствуетъ A . Эта по-

1. Отражение от менее плотной среды ($\delta_1 < \delta$). В точке M (рис. 94), находящейся на расстоянии $MP = x$ от поверхности AB интерферируют два луча, разность хода которых очевидно $MP + PM = 2x$. Мы знаем (стр. 150), что усиления колебаний, т.-е. пучности, получаются в точках, для которых $2x = 2n \frac{\lambda}{2}$ или $x = n \frac{\lambda}{2}$. Т.-е. в точках $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda, \dots$ Ослабления колебаний, т.-е. узлы, образуются в точках, в которых разность хода $2x = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$ или $x = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$, т.-е. при $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \frac{7}{4}\lambda$ и т. д.

2. Отражение от более плотной среды; $\delta_1 > \delta$. Если $NQ = x$, то в N интерферируют два луча, разность хода которых $2x + \frac{\lambda}{2}$, ибо в точке Q теряется полуволна.

Пучности получаются при $2x + \frac{\lambda}{2} = 2n \frac{\lambda}{2}$ или $x = n \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$, т.-е. при $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \frac{7}{4}\lambda$ и т. д.: узлы образуются там, где разность хода $2x + \frac{\lambda}{2} = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$ или $x = n \frac{\lambda}{2}$, т.-е. при $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda$ и т. д.

На рис. 94 показано распределение пучностей (n) и узлов (y) в этих двух случаях.

На рис. 95 показано распределение частиц в падающем луче для девяти последовательных моментов $t, t + \frac{1}{16}T, t + \frac{2}{16}T$ и т. д. до $t + \frac{8}{16}T = t + \frac{1}{2}T$ сплошной, более тонкой линией (нац. $abcd$ в строках I и II). Пунктиром колебание продолжено во вторую среду и безъ потери полуволны ($\delta_1 < \delta$) оно переложено направо, где этот пунктиръ изображает отраженное колебание, которое в строках I и IX совпадает съ кривой задающего колебания. Более толстою сплошною линией показано рас-

Рис. 95.



предельные частицы въ колебании сложномъ; въ строкѣ V оно совпадаетъ съ прямой $O'O$. Мы видимъ, что предельная частица совершаетъ колебание съ удвоенной амплитудой, см. точки M и X въ строкѣ I и IX, здѣсь находится нулевость. Точка O , находящаяся на расстоянии $\frac{1}{4}$ отъ границы двухъ средъ (въ строкѣ II буква O должна находиться тамъ, гдѣ $b'd$ пересѣкаетъ горизонтальную прямую), остается въ покое; здѣсь узелъ. Въ b' (строкѣ I и II) опять нулевость, въ O' узелъ.

Мы рассматривали одинъ падающій лучъ и получающіе нулевости и узлы въ точкахъ. Понятно, что при падении плоской волны получаются попеременно поверхности сильнаго движенія и поверхности покоя, послѣднія называются **узловыми поверхностями**.

Если колебания распространяются только въ двухъ измѣреніяхъ, образуя волновые линии (стр. 157) и если они отражаются отъ некоторой предѣльной линіи, ограничивающей данную

среду, то, вследствие интерференціи между первоначальными и отраженными колебаніями, образуются области сильныхъ движеній (нулевости), разнравоченныя линіями сравнительнаго или даже полнаго покоя, т. наз. **узловыми линіями**.

§ 18. Принципъ Доплера. Положимъ, что въ точкѣ A (рис. 96) дѣйствуетъ сила, заставляющая частицу A среды совершать гармоническія колебательныя движенія съ періодомъ T и непрерывно поддерживающая это движеніе.

Причину возникновенія такой силы назовемъ источникомъ колебаній (звучащее тѣло, свѣтящееся тѣло, тѣло колеблющееся и ударяющее при этомъ на поверхность жидкости и т. д.). Колебанія распространяются вдоль прямой AB со скоростью v , длина волны λ , скорость v и періодъ T связаны уравненіемъ (1) (стр. 142)

$$\lambda = vT, \quad (42)$$

Число волнъ, исходящихъ въ единицу времени отъ A , т. е. число его колебаній, обозначимъ черезъ n . Очевидное тождество $Tn = 1$, дасть намъ, см. (3) стр. 143 гдѣ число колебаній обозначено черезъ N ,

$$v = n\lambda, \quad (43)$$

Положимъ, что въ B находится наблюдатель, имѣющій возможность опредѣлить число n_1 волнъ, проходящихъ мимо него въ единицу времени, т. е. напр. при продольныхъ колебаніяхъ число сгущеній, образующихся около него, а при поперечныхъ колебаніяхъ число, показывающее, сколько разъ онъ въ единицу времени замѣтитъ, что рядомъ съ нимъ расположенная частица проходитъ черезъ положеніе равновѣсія.

Допустимъ возможность самостоятельнаго движенія источника A и наблюдателя B вдоль прямой AB . Въ первомъ случаѣ это значить, что отдѣльныя колебанія, вызываемыя источникомъ A черезъ равныя промежутки времени T , берутъ свое начало послѣдовательно въ тѣхъ различныхъ точкахъ среды, въ которыхъ въ соответствующиye моменты находится самый источникъ. Если движется наблюдатель то мы будемъ предполагать, что онъ не замѣчаетъ своего перехода отъ одной частицы среды къ другой, а только отмѣчаетъ лншо число ступеней, ибо число проходимей черезъ положеніе равновѣсія, или вообще число n , возвращенія къ одной и той же фазѣ, совершающихся въ единицу времени около него. Мы предполагаемъ даѣше, что источникъ A уже настолько давно началъ вызывать колебанія, что послѣднія успѣли распространиться дальше, чѣмъ до наблюдателя B .

Обозначим через v и скорость наблюдателя B , через v' скорость источника A , считая обе скорости положительными если A и B движутся друг к другу (приближаются) (т.е. AB уменьшается, см. стрелки на рис. 96).

Требуется определить число n , при различных значениях n и n' .
Различаем четыре случая:

1. На неподатель и источник неподвижны ($u=0$ и $u'=0$). В этом случае ясно, что все колебания, выходящие из A через равные времена T , будут достигать и точку B через такие же промежутки времени; поэтому $n_1 = n_2$.

II. Наблюдатель B движется со скоростью u , считаемой положительной по направлению к источнику A . В течение некоторого времени τ наблюдатель переедет из B в B_1 , пройдя путь $\varepsilon = u\tau$. За это время мимо него очевидно пройдут $n_1\tau$ волн, какое число больше числа $n\tau$ волн, которые прошли бы мимо него, если бы он остался неподвижен, на то число волн, которое укладывается в промежутке BB_1 ε , т.е. на $\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{u\tau}{\lambda}$ волн. Итак, мы имеем $n_1\tau = n\tau + \frac{u\tau}{\lambda}$, или подставив $\lambda = \frac{c}{n}$ на основании (43) и сократив на τ :

$$n_1 = n + n \frac{u}{c} = n \frac{v + u}{c}.$$

Если бы n было отрицательное, равное $-n_1$, и наблюдатель во время τ перешел бы из B_1 в B_2 , то мы имеем бы $n_1\tau = n\tau - \frac{v}{\lambda}$, откуда $n_1 = n - \frac{v}{v} = n - \frac{v}{v}$. Соединяя обе формулы, мы имеем при движении наблюдателя со скоростью v (положительную, если она направлена к источнику):

$$n_1 = n \frac{v+16}{v}, \quad \dots \quad (41)$$

III. Источник A движется со скоростью u' , считаемой положительной по направлению к наблюдателю B .

Пусть $AC' = l$ — длина волны. Если бы A оставалось неподвижным, то одинаковые фазы (напр. стояния или прохождения через положение

покою) распространялись бы направо, находясь другъ отъ друга на разстоянн λ .

Положимъ, что за время одного періода T источникъ перешелъ изъ A въ A_1 на разстонне $AA_1 = v = u'T$. Теперь одинаковыя фазы распространяются направо, находясь другъ отъ друга на разстоннн $CA_1 = \lambda$. Такъ, какъ скорость v не мѣняется, то (43) даетъ $v = n' = n_1\lambda$, откуда

$$n_1 = n' \frac{\lambda}{\lambda_1} = n' \frac{v}{v - u'} = n' \frac{vT}{vT - u'T} = n' \frac{v}{v - u'}.$$

Еслибы источникъ обладалъ отрицательной скоростью $u' = -u_1$ и онъ за время T перешелъ бы изъ A въ A_2 , то до B доходили бы болѣе длинныя волны $\lambda_1 = \lambda + vT$ и мы получили бы $n_1 = n' \frac{v}{v + u_1} = n' \frac{v}{v + u'}$. Соединяя обѣ формулы, мы имѣемъ при движеннн источника со скоростью u' (положительнаго по направленнн къ наблюдателю)

$$n_1 = n' \frac{v}{v - u'} \quad (45)$$

IV. Наблюдатель и источникъ движутся со скоростями u и u' . Вслѣдствіе движеннн источника число n колебаннй, доходящихъ до наблюдателя при $u = 0$ и $u' = 0$, увеличится въ отношенн $\frac{v}{v - u}$ потому что волны (при $u' > 0$) укорочены. Вслѣдствіе движеннн наблюдателя число волнъ, проходящихъ мимо него, увеличивается (при $u > 0$) еще въ отношенн $\frac{v + u}{v}$. Такимъ образомъ $n_1 = n \frac{v}{v - u} \frac{v + u}{v}$ или окончательно

$$n_1 = n \frac{v + u}{v - u} \quad (46)$$

Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи.

1. Наблюдатель приближается къ источнику со скоростью u , тогда $u' = 0$ и (44) даетъ $n_1 = 2n$. Наблюдателю покажется, что періодъ колебаннй уменьшился вдвое.

2. Наблюдатель удаляется отъ источника со скоростью u , тогда $u = -u$ и (44) даетъ $n_1 = 0$. Наблюдателю, движущемуся имѣть съ какою либо фазою, покажется, что частица неподвижна.

3. Источникъ удаляется отъ наблюдателя со скоростью v ; тогда $u' = -v$ и (45) даетъ $n_1 = \frac{1}{2}n$. Наблюдателю покажется, что періодъ колебаннй увеличился вдвое.

4. Источникъ приближается къ наблюдателю со скоростью v . Тогда $u' = v$ и (45) даетъ $n_1 = \infty$. Это предѣльный случай безконечно короткихъ волнъ.

5. Источникъ и наблюдатель движутся со скоростями u и u' . Къ этому случаю относится общая формула (46).

Три формулы, (44) (45) и (46) показываютъ, что кажущееся

измѣненіе числа колебаній не опредѣляется только относительною скоростью источника и наблюдателя. Обозначая эту скорость черезъ $c = n + n'$, мы можемъ (4b) представить въ видѣ

$$H_1 = H \frac{V + u}{c + H - u}$$

FL 419

$$H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4 \quad H_5 \quad H_6 \quad H_7 \quad H_8 \quad H_9 \quad H_{10} \quad H_{11} \quad H_{12} \quad H_{13} \quad H_{14} \quad H_{15} \quad H_{16} \quad H_{17} \quad H_{18} \quad H_{19} \quad H_{20} \quad H_{21} \quad H_{22} \quad H_{23} \quad H_{24} \quad H_{25} \quad H_{26} \quad H_{27} \quad H_{28} \quad H_{29} \quad H_{30} \quad H_{31} \quad H_{32} \quad H_{33} \quad H_{34} \quad H_{35} \quad H_{36} \quad H_{37} \quad H_{38} \quad H_{39} \quad H_{40} \quad H_{41} \quad H_{42} \quad H_{43} \quad H_{44} \quad H_{45} \quad H_{46} \quad H_{47} \quad H_{48} \quad H_{49} \quad H_{50} \quad H_{51} \quad H_{52} \quad H_{53} \quad H_{54} \quad H_{55} \quad H_{56} \quad H_{57} \quad H_{58} \quad H_{59} \quad H_{60} \quad H_{61} \quad H_{62} \quad H_{63} \quad H_{64} \quad H_{65} \quad H_{66} \quad H_{67} \quad H_{68} \quad H_{69} \quad H_{70} \quad H_{71} \quad H_{72} \quad H_{73} \quad H_{74} \quad H_{75} \quad H_{76} \quad H_{77} \quad H_{78} \quad H_{79} \quad H_{80} \quad H_{81} \quad H_{82} \quad H_{83} \quad H_{84} \quad H_{85} \quad H_{86} \quad H_{87} \quad H_{88} \quad H_{89} \quad H_{90} \quad H_{91} \quad H_{92} \quad H_{93} \quad H_{94} \quad H_{95} \quad H_{96} \quad H_{97} \quad H_{98} \quad H_{99} \quad H_{100}$$

Эти формулы ясно показывают, что n зависит не только от c , но и от n или n' . Только в случае $c = 0$ имеем $n_1 = n$ при всяком $n' = n$, если не считать предельного случая $n' = n = \infty$, когда наблюдатель и источник движутся со скоростью c по направлению от источника к наблюдателю и когда, очевидно, колебания вовсе не достигают наблюдателя.

При совмещенном движении наблюдателя и источника со скоростью v по обратному направлению т.е. от наблюдателя к источнику, имеем:

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Всесірне тяжотвє.

§ 1. Законъ всемірнаго тяготѣнія. Въ части существующей съ міромъ матеріи, нѣсколько оныхъ достижны нашему наблюденію, проявиться особенно тогда, по краѣи міра, вѣзущагося взаим. дѣйствие, которое съ чисто внѣшней стороны заключается въ слѣдующемъ. Подожимъ, что имѣются двѣ массы m и m_1 , размѣры которыхъ при совершенной проницаемости ихъ формы, весьма малы сравнительно съ ихъ разстояніемъ r другъ отъ друга. Указывается изъ непосредственныхъ наблюденій, что присутствіе каждой изъ этихъ двухъ массъ вызываетъ появленіе особой силы дѣйствующей на другую массу, причемъ обѣ силы, изъ которыхъ одна дѣйствуетъ на m , другая на m_1 , равны между собою; обозначимъ ихъ черезъ f .

Повеличиваѣ силы f пропорциональны произведению масс m и m' и обратно пропорциональны квадрату разстоянія между ними. Имя численное значение определяется формулою

$$t = C_{\text{F}}^{mm'} \cdot \dots \quad (1)$$

* С коэффициентом пропорциональности.

Направление двух сил f совпадает с направлением прямой r и этим сила f , действующая на m , направлена к m_1 , а сила, действующая на m_1 , направлена к m . Отсюда следует, что силы f суть силы притягательные (стр. 95).

Сила f называется всемірнымъ тяготѣніемъ.

оставалось проверить вытекающее из таких предположений следствие, см. (7) и (8).

$$\frac{g}{w} = \frac{r^2}{R^2}.$$

т. е. r среднее расстояние луны от центра земли. Принимая $r = 60 R$, мы получимъ

$$g = 3600 w \dots \dots \dots (9)$$

Допуская, какъ первое приближеніе, что луна движется равномерно по окружности со скоростью v , имѣемъ, см. (30) стр. 58, $w = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2$, т. е. T время полного оборота луны около земли. Принимая за единицу времени секунду, за единицу длины метръ и вставляя $T = 27$ сутокъ \bar{t} часовъ 43 мин. $= 39343,69$ сек. и $r = 60 R = 60 \cdot 6360000$ метръ), получаемъ для скорости $v = 1020$ метръ въ сек., а для ускоренія луны $w = 0,00271$ метръ. Вставляя это въ (9) получаемъ $g = 0,00271 \times 3600 = 9,76$ метръ. Превосходное согласіе этого числа, полученнаго путемъ не вполне точнаго вычисленія, съ числомъ, которое даютъ непосредственныя наблюденія на земной поверхности и служить доказательствомъ справедливости основн. предположеній и самой формы закона Ньютона.

Закономъ Ньютона можетъ быть выведенъ изъ третьяго закона Кеплера: квадраты времени оборотовъ (T_1 и T_2) двухъ планетъ относятся какъ кубы ихъ среднихъ расстояній (r_1 и r_2) отъ солнца:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \dots \dots \dots (10)$$

Допуская, что планеты равномерно движутся по кругамъ и обозначая ихъ скорости черезъ v_1 и v_2 , а нормальныя ускоренія черезъ w_1 и w_2 , имѣемъ

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{2\pi r_1}{T_1}}{\frac{2\pi r_2}{T_2}} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} \\ w_1 = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}; w_2 = \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}.$$

Отсюда

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

(10) дать равенство

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

т. е. ускоренія въ движеніяхъ планетъ обратно пропорціональны квадратамъ ихъ расстояній отъ солнца, а это и есть законъ Ньютона.

§ 2. О коэффициентѣ пропорціональности въ формулѣ Ньютона. Въ формулѣ (1) встрѣчается коэффициентъ пропорціональности C , численное

¹⁾ Окружность большого круга земли $2\pi R$ принимается равною 40,000,000 метрамъ, откуда $R = 6,360,000$ метръ.

значение которого, какъ и во всѣхъ подробныхъ случаяхъ зависитъ отъ выбора тѣхъ единицъ, которыми мы измѣряемъ величины, входящая въ формулу (1). Такими величинами разнородныхъ три: масса, длина (оа единицей измѣряется r) и сила. Предположимъ, что мы остановились на какомъ-либо определенномъ выборѣ этихъ трехъ единицъ. Въ такомъ случаѣ численное значение коэффициента C проре всего определяется слѣдующимъ образомъ: Формула (1) даетъ при

$$\left. \begin{aligned} m &= m_1 = 1 \\ r &= 1 \end{aligned} \right\} \dots f = C \dots \dots \dots (11)$$

Это показываетъ, что C равно численному значенію силы, съ которою взаимно притягиваются двѣ единицы массы, находящіяся на разстояніи единицы другъ отъ друга. При этомъ мы должны себѣ представить обѣ массы въ видѣ однородныхъ шаровъ, центры которыхъ находятся на указанномъ разстояніи другъ отъ друга или обѣ массы какъ бы сосредоточенными въ двухъ точкахъ.

При выборѣ единицъ величинъ m , r и f мы можемъ поступить трояко: или выбрать вполнѣ произвольно и независимо другъ отъ друга, или измѣрять m , r и f абсолютными единицами или, наконецъ, произвести выборъ такъ, чтобы коэффициенты C равнялись бы единицѣ. Начнемъ съ третьяго способа выбора единицъ, т. е. положимъ $C = 1$ и слѣд.

$$f = \frac{mm_1}{r^2} \dots \dots \dots (12)$$

Въ высшей степени важно твердо помнить, что если мы пользуемся формулою Ньютона въ видѣ (12), т. е. безъ коэффициента пропорциональности, то мы уже не имѣемъ дѣло съ абсолютными единицами, но вводимъ совершенно новую своеобразную единицу силы. Дѣйствительно, (12) даетъ при $m = m_1 = 1$ и $r = 1$ для силы значение $f = 1$. Это показываетъ, что выбравъ произвольно единицы массы и длины, мы за единицу силы уже непременно должны принять силу, съ которою взаимно притягиваются двѣ избранныя единицы разстоянія другъ отъ друга. Эта единица силы ничего общаго не имѣетъ съ абсолютною единицею силы, которая, дѣйствуя на единицу массы, придаетъ ей единицу ускоренія, см. стр. 61. Новую единицу назовемъ астрономическою единицею силы.

Интересно сравнить между собою астрономическую и абсолютную единицы силы, принявъ за основныя единицы массы и длины — граммъ и сантиметръ. Въ этомъ случаѣ абсолютная единица силы будетъ динъ, а если еще за единицу времени принять секундъ; астрономическая же единица есть сила C въ формулѣ (1) какъ видно изъ (11). Итакъ, вопросъ сводится къ выраженію силы C въ динахъ. Чтобы сравнить C съ диномъ, возьмемъ одну и ту же силу, а именно въѣтъ p массы граммъ у поверхности земли сперва въ динахъ, а потомъ въ астрономическихъ единицахъ C .

Мы видим на стр. 78, что вѣсь p (французская единица вѣса граммъ)

$$p = 981 \text{ дину} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Съ другой стороны p равно силѣ, съ которой взаимно притягиваются земля, масса которой $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta$ (гдѣ R радиусъ, δ средняя плотность земли) и масса $m = 1$ граммъ. Такимъ образомъ (1) даетъ

$$p = G \frac{Mm}{R} = \frac{4}{3} \pi R^2 G \delta = \frac{2}{3} \delta \cdot 2\pi R^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Но $2\pi R = 40$ милл. метрамъ $= 4 \cdot 10^7$ сантим., для средней плотности земли принимаемъ число $\delta = 5,51$. Сравнивая (13) и (14) находимъ

$$G = \frac{3 \times 981}{2 \cdot 5,51 \cdot 2\pi R} \text{ дин.} = \frac{3 \times 981}{2 \times 5,51 \times 4 \times 10^7} \text{ дин.}$$

или окончательно

$$G = \frac{1}{14,950\,000} \text{ дина.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Итакъ, если граммъ, сантиметръ и секунду принять за единицы массы, длины и времени, то астрономическая единица силы въ 15 миллионовъ разъ меньше единицы абсолютной; иначе говоря, граммъ и граммъ на разстоянн одного сантиметра притягиваются съ силою, равною всего только одной 15-ти миллионной доль дина или, примѣрно, такой же доль миллиграмма.

§ 3. Отрицательныя массы. Введеніе понятія объ отрицательныхъ массахъ оказывается не только весьма важнымъ и даже необходимымъ въ ученн объ электричествѣ и магнетизмѣ, но также полезнымъ въ ученн о взаимномъ тяготѣнн тѣлъ. Понятіе объ отрицательныхъ массахъ есть фикція, такія массы въ природѣ не существуютъ. Что касается до названія «отрицательныя массы», то мы его, какъ общепринятое, сохранимъ, хотя лучше было бы говорить о массахъ обладающихъ отрицательною плотностью.

Отрицательными массами мы назовемъ такія фиктивные массы, дѣйствіе которыхъ, при одинаковыхъ условіяхъ, направлено противоположно дѣйствию массъ положительныхъ. Количественно равными мы называемъ массы положительную и отрицательную если онѣ, при равныхъ условіяхъ, производятъ дѣйствія, одинаковыя по величинѣ. Положимъ, что масса m притягиваетъ массу m_1 съ силою f , фиктивная масса $-m$, помѣщенная на мѣсто m , будетъ отталкивать массу m_1 съ силою f . Допуская и здѣсь равенство дѣйствія и противодействія мы должны предположить, что и масса m отталкиваетъ массу $-m$, наконецъ, чтобы быть послѣдовательными, допускаемъ, что масса $-m_1$, помѣщенная на мѣсто m_1 , притягиваетъ массу $-m$.

Въ этомъ отдѣлѣ мы, для удобства, допускаемъ, что равнозначныя массы притягиваются, разнозначныя отталкиваются.

и слѣд. къ притяженію сплошнаго тѣла *A* придется прибавить отталкиваніе тѣла *B*, чтобы получить истинное дѣйствіе тѣла *A*, имѣющаго полость.

§ 4. *Actio in distans*. Терминомъ *actio in distans*, т.-е. «дѣйствіе на разстояніи» обозначается одно изъ наиболее вредныхъ ученій, когда-либо господствовавшихъ въ физикѣ и тормозившихъ ея развитіе: это ученіе, допускавшее возможность непосредственнаго дѣйствія чего либо (*A*) на что либо другое (*B*), находящееся отъ него на опредѣленномъ и столь большомъ разстояніи, что соприкосновенія между *A* и *B* происходить не можетъ.

Исторія этого ученія слѣдующая. Ньютонъ открылъ, что движенія, какъ небесныхъ свѣтилъ, такъ и тѣлъ, падающихъ на земной поверхности, происходятъ такъ, какъ еслибы всѣ тѣла взаимно притягивались съ силою, величина которой опредѣляется формулой (1) или (12). Вопросы о причинѣ появления этой силы онъ не касаясь, отклоняя всякія попытки къ его рѣшенію словами «*hypotheses non fingo*». Индѣ и никогда онъ, однако не высказывался за возможность *actionis in distans*, не утверждалъ, что тѣло *A* непосредственно притягиваетъ къ себѣ тѣло *B*, т.-е. производить дѣйствіе тамъ, гдѣ оно само не находится. Оставшаяся вопросъ о механизмѣ возникновенія всемірнаго тяготѣнія не тронутымъ, онъ, несомнѣнно, придавалъ открытому имъ закону характеръ описательный: свѣтила движутся и тѣла падаютъ такъ, какъ они двигались и падали бы, еслибы они взаимно притягивались. Ученикъ Ньютона, Cotes, въ предисловіи къ второму изданію *Principia*, которое Ньютонъ не читалъ, до его напечатанія впервые ясно выразилъ мысль объ *actio in distans*, о томъ, что тѣла непосредственно взаимно притягиваются. Съ одной стороны уверенность, что взглядъ высказанный въ предисловіи къ его книгѣ, одобряется Ньютономъ, съ другой — французское развитіе небесной механики, цѣлкомъ основанной на законѣ всемірнаго тяготѣнія, какъ на фактѣ, и не навадившись въ концѣ XIX вѣка о его разноречивыхъ заставили ученыхъ заботъ о чисто описательномъ характерѣ этого закона и выдѣлѣть изъ немъ законченное выраженіе дѣйствительно происходящаго физическаго явленія.

Идея о дѣйствіи въ даль, господствовавшая въ прошломъ столѣтіи, получила новую пищу, еще болѣе обрѣла, когда, въ концѣ столѣтія, изъ опытовъ Кулона оказалось, что и магнитныя и электрическія взаимодействія могутъ быть сведены къ взаимодействиямъ особыхъ гипотетическихъ веществъ (два электричества и два магнетизма), происходящимъ непосредственно въ даль и по законамъ, вполне аналогичнымъ закону Ньютона.

Въ первой половинѣ текущаго столѣтія *actio in distans* повсюду господствовала въ наукѣ.

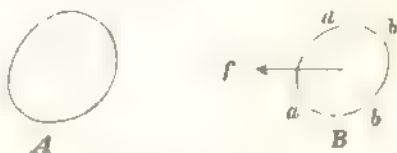
Фарадей, величайшій экспериментаторъ и физикъ-философъ, первый высказалъ несообразность гипотезы, чтобы тѣло могло непосредственно возбуждать силы и движенія тамъ, гдѣ оно не находится. Оставляя въ сторонѣ вопросъ о всемірномъ тяготѣніи, онъ обратился specially къ явлениямъ магнитнымъ и электрическимъ и указалъ на первенствующую роль, которую въ этихъ явленіяхъ играетъ промежуточная среда, заполняющая пространство между тѣлами, какъ бы это непосредственно дѣй-

ствующими другъ на друга. Здѣсь не мѣсто распространяться о дальнейшей исторіи этого вопроса, съ которою мы познакомимся впоследствии. Достаточно сказать, что опыты, произведенные молодымъ, безвременно скончавшимся нѣмецкимъ ученымъ Генрихомъ Герцомъ (H. Hertz) доказали справедливость основныхъ взглядовъ Фарадея на роль промежуточной среды въ упомянутыхъ выше явленіяхъ и навсегда изгнали мысль объ actio in distans изъ учения объ этихъ явленіяхъ.

Въ настоящее время успѣло сдѣлаться общимъ достояніемъ убѣжденіе, что actio in distans не должна быть допускаема ни въ одной области физическихъ явленій. Но какъ ее изгнать изъ учения о всемирномъ тяготѣніи? Это вопросъ пока открытый. Несмотря на безчисленное множество различныхъ въ этомъ направленіи попытокъ ученыхъ, стремившихся дать «механическое» объясненіе всемирному тяготѣнію. Во всѣхъ этихъ объясненіяхъ играетъ главную роль допущеніе существованія особой мировой среды, влияніемъ которой и обусловливается возникновеніе тѣхъ ускореній, которые выражаются формулой (2). Не входя въ эту область, пока еще фантазии, ограничимся немногими указаніями. Мы

знаемъ, что въ присутствіи тѣла *A* (рис. 98) дѣйствуетъ на тѣло *B* сила *f* по направленію къ *A*. Возникновеніе такой силы можетъ быть понимаемо двояко: или какъ тяга, дѣйствующая на *B* со стороны *aa* (такую тягу представила бы actio in distans) или какъ давленіе, производимое на *B* со сто-

Рис. 98



роны *bb*. Въ такому давленію и стараюсь привести въ виду присутствіе тѣла *A*. Допускаюсь, напр., что частицы мировой среды, двигаясь, ударяютъ со всѣхъ сторонъ на какое тѣло. Присутствіе тѣла *A* какъ бы отчасти охраниваетъ тѣло *B* отъ ударовъ частицъ, идущихъ слева. Число точекъ на тѣло *B* справа будетъ больше, чѣмъ слева, и вотъ это-то избытокъ точекъ яко-бы и есть причина возникновенія силы *f*.

Предупреждая юныхъ читателей не впадать въ эту область фантазій, замѣтимъ, что прежде всего неизвѣстно, какая это «мировая среда» тотъ ли эфиръ, о которомъ мы говорили раньше, или другая, особая, служащая причиною всемирнаго тяготѣнія? Непреодолимое затрудненіе представляетъ далѣе тотъ фактъ, что частицы, находящаяся внутри притягивающаго тѣла, вызываютъ такія же дѣйствія на вѣшныя массы, какъ и частицы, лежащая у его поверхности, что сама матерія такъ сказать абсолютно прозрачна для силы взаимнаго притяженія тѣлъ.

Можетъ быть вопросъ о всемирномъ тяготѣніи никогда не будетъ рѣшенъ; во всякомъ случаѣ слѣдуетъ помнить, что actio in distans, изгнанная изъ области явленій магнитныхъ и электрическихъ, не должна быть допущена для объясненія какой бы то ни было группы физическихъ явленій, что на нее слѣдуетъ смотрѣть только, какъ на удобную форму простаго описанія явленій, они происходятъ такъ, какъ если-бы существовала actio in distans.

Некоторые полагают, что тяготѣніе есть основное свойство матеріи, неразрывно съ нею связанное и представляющее поэтому одинъ изъ признаковъ ея существованія; никакихъ объясненій въ этомъ случаѣ быть не можетъ и не требуется. Задача исчерпана — разѣ законъ тяготѣнія найденъ. Съ такимъ взглядомъ согласиться нельзя; проводить его въ другихъ отдѣлахъ физики значило бы разрушить эту науку.

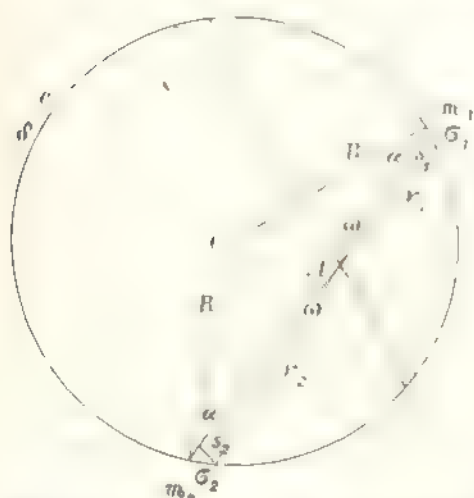
Теперь мы можемъ пополнить недосказанное въ двухъ предыдущихъ статьяхъ.

На стр. 16 было упомянуто, что приписывать эфиру вѣсъ можно только съ оговоркою. Теперь понятно, въ чемъ эта оговорка заключается: если допустить, что причина всемірнаго тяготѣнія матеріи заключается въ особахъ свойствахъ эфира, то понятно, что нельзя и мысленно допустить возможности возникновенія тяготѣнія въ самомъ эфирѣ, даже при какихъ-либо особахъ, можетъ быть вродѣ фантастическихъ условіяхъ, упомянутыхъ на стр. 16.

На стр. 109 была высказана мысль, что въ природѣ, можетъ быть, вовсе не существуетъ потенциальной энергіи, что въ тѣхъ случаяхъ, когда

намъ кажется, что работоспособность совокупности двухъ тѣлъ является только слѣдствіемъ ихъ взаимнаго расположенія, въ дѣйствительности мы имѣемъ дѣло съ кинетической энергіей движенія неизвѣстнаго намъ вещества. Когда мы поднимаемъ грузъ, мы тратимъ часть энергіи, запасенной въ нашихъ мышцахъ, на производство работы, результатомъ которой является, какъ мы говоримъ, потенциальная энергія притягивающихся двухъ тѣлъ, т. е. земного шара и поднятаго груза. Но если *actio in distans* не существуетъ, если причина кажущагося притяженія кроется въ движеніяхъ особой

Рис. 99.



среды (хотя-бы и эфира), то мы должны допустить, что прямымъ результатомъ подниманія груза является увеличеніе кинетической энергіи и движенія этой среды, при паденіи тѣла эта энергія переходитъ въ энергію движенія груза.

§ 5 Притяженіе точки шаровымъ слоемъ и шаромъ. Данъ шаровой слой весьма малой толщины ϵ , плотности δ и радиуса R , такъ что вся его масса M равна

$$M = 4\pi R^2 \epsilon \delta. \quad (17)$$

На рис. 99 толщина ϵ вовсе не отмѣчена и шаровой слой въ разрѣзѣ изображенъ окружностью.

Требуется опредѣлить, съ какою силою F_i дѣйствуетъ шаровой слой на материальную точку m (ей масса), находящуюся внутри его (значекъ i = interieure) и съ какою силою F_e на точку m , расположенную во внѣшнемъ (значекъ e = exterieure) пространствѣ.

Положимъ, что масса m находится въ точкѣ A (рис. 294). Проведемъ отъ нея безконечно малый тѣлесный уголъ (стр. 37) ω въ обѣ стороны; онъ вырѣжетъ два элемента поверхности σ_1 и σ_2 изъ шарового слоя и соответствующія имъ массы $m_1 = \sigma_1 \delta$ и $m_2 = \sigma_2 \delta$, которыя притягиваютъ массу m съ силами

$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2} = \frac{\sigma_1 m \tau_1}{r_1^2} \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{\sigma_2 m \tau_2}{r_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

направленными въ противоположныя стороны, здѣсь r_1 и r_2 разстоянія отъ A до σ_1 и до σ_2 .

Опишемъ около A , какъ центра, двѣ шаровыя поверхности съ радиусами r_1 и r_2 и пусть s_1 и s_2 (рис. 294) элементы этихъ поверхностей, вырѣзанные тѣлеснымъ угломъ ω . Очевидно

$$s_1 = r_1^2 \omega \quad , \quad s_2 = r_2^2 \omega \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Соединимъ центръ C съ σ_1 и σ_2 ; получается фигура, безконечно мало отличающаяся отъ равнобедреннаго треугольника, пусть $\angle C m A = \angle C m A = \alpha$. Уголъ между σ_1 и s_1 равенъ углу между нормальми R и r_1 къ нимъ, т.-е. $\angle (\sigma_1, s_1) = \alpha$ и точно также $\angle (\sigma_2, s_2) = \alpha$. Но s_1 есть проекція элемента σ_1 на поверхность шара (съ радиусомъ r_1), а потому $s_1 = \sigma_1 \cos(\sigma_1, s_1) = \sigma_1 \cos \alpha$. Отсюда, см. еще (19),

$$\sigma_1 = \frac{s_1}{\cos \alpha} = \frac{r_1^2 \omega}{\cos \alpha} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{s_2}{\cos \alpha} = \frac{r_2^2 \omega}{\cos \alpha} .$$

Вставляя σ_1 и σ_2 въ (18), получаемъ

$$f_1 = \frac{\sigma_1 \omega m}{\cos \alpha} \quad , \quad f_2 = \frac{\sigma_2 \omega m}{\cos \alpha} .$$

Отсюда $f_1 = f_2$, т.-е. элементы шарового слоя, вырѣзанные угломъ ω , притягиваютъ массу m , находящуюся въ A , съ силами, равными по величинѣ, но противоположными по направленію; ихъ равнодѣйствующая нуль. Проводи черезъ точку A , какъ вершину, во всевозможнымъ направленіямъ тѣлесные углы, мы можемъ исчерпать весь шаровой слой (см. пунктиръ), раздѣливъ его на элементы, попарно другъ другу противоположные и попарно притягивающіе m съ одинаковыми по величинѣ силами. Каждая такая двѣ силы взаимно уничтожаются, а потому и весь тонкій шаровой слой никакого дѣйствія на точку, лежащую внутри него, не производитъ, т.-е.

$$F_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Перейдемъ къ дѣйствию шарового слоя на массу m , сосредоточенную

во внешней точке A (рис. 100) находящейся на расстоянии $CA = x$ от центра; R , ϵ и $M = 4\pi R^2 \epsilon \delta$ имеют прежнее значение. Отыщем на CA

Рис. 100

такую точку B , чтобы радиус $R = CG$ был бы средним пропорциональным между $CA = x$ и $CB = a$, т. е. чтобы

$$\frac{a}{R} = \frac{R}{x} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Через B проведем бесконечно тонкий телесный угол ω , направление которого DBE только и намечено на рис. 100. Он вырѣжетъ изъ поверхности шарового

слоя два элемента τ_1 и τ_2 , расположенные около точки D и E , а изъ самого слоя массы $m_1 = \tau_1 \epsilon \delta$ и $m_2 = \tau_2 \epsilon \delta$. Соединимъ D и E съ C и A ; пусть $\angle CDB = \angle CEB = \alpha$, $BD = p_1$, $BE = p_2$, $DA = r_1$ и $EA = r_2$. Наконецъ, пусть f_1 и f_2 силы, съ которыми масса m въ A притягивается элементами шарового слоя m_1 и m_2 . Имѣемъ

$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2} = \frac{\tau_1 \epsilon \delta m}{r_1^2}; \quad f_2 = \frac{\tau_2 \epsilon \delta m}{r_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Около B , какъ центра, опишемъ двѣ шаровыя поверхности съ радиусами p_1 и p_2 черезъ D и E . Телесный угол ω вырѣжетъ изъ нихъ элементы τ_1 и τ_2 . Какъ и прежде, имѣемъ $\tau_1 = p_1^2 \omega = \tau_1 \cos \alpha$; $\tau_2 = p_2^2 \omega = \tau_2 \cos \alpha$.

Вставляя взятые отсюда τ_1 и τ_2 въ (22) получаемъ

$$f_1 = \frac{\epsilon \delta m \omega}{\cos \alpha} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^2, \quad f_2 = \frac{\epsilon \delta m \omega}{\cos \alpha} \left(\frac{p_2}{r_2} \right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$\triangle DCB$ и $\triangle DCA$ подобны, ибо уголъ при C общий, а стороны этого угла пропорциональны (21) дасть $\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CA}$.

Изъ этого подобія слѣдуетъ, что $\angle DAC = \angle CDB = \alpha$ и далѣе, что

$$\frac{BD}{DA} = \frac{CD}{CA} \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{r_1} = \frac{R}{x}.$$

Подобіе треугольниковъ ECB и ECA дасть, что $\angle CAE = \angle CEB = \alpha$ и что $\frac{p_2}{r_2} = \frac{R}{x}$. Вставляя найденныя отношенія въ (23), получаемъ

$$f_1 = f_2 = \frac{\epsilon \delta m \omega R^2}{x^2 \cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Итакъ, силы f_1 и f_2 равны между собою и составляютъ равные углы

α съ направленіемъ AC . Нѣз равнодѣйствующая f направлена къ центру и равна

$$f = 2f_1 \cos \alpha = \frac{2cm\omega R}{r^2} \dots \dots \dots (25)$$

Проведя черезъ B безконечное множество тѣлесныхъ угловъ, мы раздѣлимъ шаровой слой на пары элементовъ, изъ которыхъ каждая дѣйствуетъ равнодѣйствующую силу f , направленную къ центру. Искомая сила F_c съ которою весь слой притягиваетъ массу m , получается простымъ суммированіемъ силъ f , т.-е.

$$F_c = \sum f = \sum \frac{2cm\omega R^2}{r^2} = \frac{2R^2cm}{r^2} \sum \omega.$$

Сумма тѣлесныхъ угловъ ω , которые исчерпаны бѣ весь шаровой слой, равна 2π , такъ какъ каждый изъ этихъ угловъ двойной. Положивъ $\sum \omega = 2\pi$ и принявъ во вниманіе, что вся масса M слоя равна $4\pi R^2 c \delta$, получаемъ

$$F_c = \frac{Mm}{r^2} \dots \dots \dots (26)$$

Эта формула показываетъ, что дѣйствіе тонкаго шароваго слоя на внѣшнюю точку такое же, какъ получилось бы, еслибы вся масса слоя была сосредоточена въ его центрѣ.

Шаровой однородный слой конечной толщины можетъ быть мысленно раздѣленъ на безконечное множество концентрическихъ безконечно тонкихъ слоевъ. Прилагаемая къ этимъ слоямъ формулы (20) и (26), мы видимъ, что и конечный шаровой слой никакого дѣйствія не производитъ на точку, лежащую внутри его полости и что на внѣшнюю точку онъ производитъ такое же дѣйствіе, какъ еслибы вся его масса была сосредоточена въ его центрѣ.

Сплошной однородный шаръ также можно раздѣлить на концентрические слои, а потому и его дѣйствіе на внѣшнюю точку будетъ такое же, какъ еслибы вся масса шара была сосредоточена въ его центрѣ. Мы этимъ уже пользовались на стр. 179. На массѣ m , находящейся на разстояніи r отъ центра шара, дѣйствуетъ сила

$$F_c = \frac{Mm}{r^2} = \frac{4}{3} \pi R^2 \delta m \dots \dots \dots (27)$$

Если масса m находится у самой поверхности шара, то получается сила

$$F = \frac{Mm}{R^2} = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta m \dots \dots \dots (28)$$

Опредѣлимъ силу F_c съ которой сплошной шаръ дѣйствуетъ на массу m находящуюся внутри него на разстояніи $r < R$ отъ его центра. Проведемъ шаровую поверхность, имѣющую общій съ даннымъ шаромъ центръ и радіусъ x ; она пройдетъ черезъ m и раздѣлитъ данный шаръ на двѣ

части на шаровой слой, для которого m будет внутренней массой, на которую его действие есть нуль и на шаръ съ радиусомъ x , у поверхности котораго находится точка m . Этотъ шаръ притягиваетъ m къ центру съ силою, которая получится, если въ (28) положить x вмѣсто R . Полагая, что x считается положительнымъ отъ центра къ m , мы передъ выраженіемъ силы F , поставимъ знакъ минусъ, чтобы указать, что она дѣйствуетъ къ центру, т.-е. въ сторону отрицательную:

$$F_i = -\frac{4}{3} \pi \delta x m (29)$$

Итакъ притяженіе сплошнаго шара на внутреннюю точку пропорціонально ея разстоянію отъ центра шара и направлено къ центру.

Формула (29) аналогична (22) стр. 117, гдѣ x поставлено вмѣсто r . Отсюда слѣдуетъ, что еслибы масса m могла свободно двигаться въ весьма узкомъ каналѣ, проходящемъ черезъ центръ однороднаго шара, находясь только подъ влияніемъ притяженія этого шара, то она совершила бы гармоническое колебательное движеніе. Сравнивая (29) съ (22) стр. 117, мы не должны

полагать $C = \frac{4}{3} \pi \delta$, ибо въ (22) стр. 117 сила выражена въ абсолютныхъ, въ (29) же въ астрономическихъ (см. стр. 181) единицахъ.

§ 6. Случай равномернаго динамическаго поля. Вообразимъ однородный шаръ, центръ котораго въ A (рис. 101) и внутри него шаровидную полость съ центромъ въ B . Требуется опредѣлить силу f , дѣйствующую на массу m , находящуюся въ M внутри полости. Пусть δ плотность большаго шара. Шаръ, имѣющій плотность, можно замѣнить совокупностью двухъ шаровъ: сплошнаго съ центромъ въ A и съ плотностью δ и другаго, также сплошнаго, съ центромъ въ B и съ плотностью $-\delta$ (см. рис. 97 и текстъ стр. 183). Первый шаръ притягиваетъ массу m съ силою $f_1 = ME$, направленной къ A и, на основаніи (29), пропорціональной разстоянію MA , такъ что можно положить $f_1 = k \cdot MA$, гдѣ k зависитъ только отъ плотности δ , но не зависитъ отъ радиуса шара (см. (29)), второй шаръ отталкиваетъ массу m съ силою $f_2 = MD$, направленною отъ B и равною $f_2 = k \cdot MB$. Построивъ равнодѣйствующую f , мы видимъ, что $\triangle CDM$ подобенъ $\triangle AMB$, ибо $\angle CDM = \angle AMB$ и да еще

$$\frac{MD}{CD} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{k \cdot MB}{k \cdot MA} = \frac{MB}{MA}.$$

Изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ, что $\angle DMC = \angle MBA$ и что слѣд. $MC = f$ параллельно BA . Это должно относиться ко всѣмъ точкамъ M полости. Далѣе имѣемъ

$$\frac{MC}{AB} = \frac{MD}{MB} \text{ т.-е. } \frac{f}{a} = \frac{f_2}{MB} = \frac{k \cdot MB}{MB} = k.$$

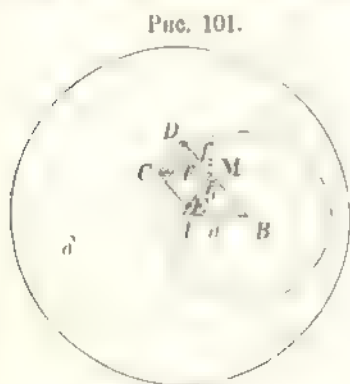


Рис. 101.

т.-е.

$$f = ka \dots \dots \dots (30)$$

Если силу f выражать въ астрономическихъ единицахъ, то

$$k = \frac{4}{3} \pi \delta m \dots \dots \dots (31)$$

(30) показываетъ, что сила f по величинѣ также не зависитъ отъ положенія точки M внутри полости.

Шаровидная полость внутри однороднаго шара есть равномерное динамическое поле (стр. 83), т.-е. во всѣхъ его точкахъ дѣйствуетъ на массу m одна и та же сила, параллельная прямой, соединяющей центры шара и полости и пропорциональная разстоянью a этихъ центровъ.

Напряженіе (стр. 83) этого равномернаго поля вовсе не зависитъ отъ радиусовъ шара и полости. Когда центры шара и полости совпадаютъ

Рис. 102.

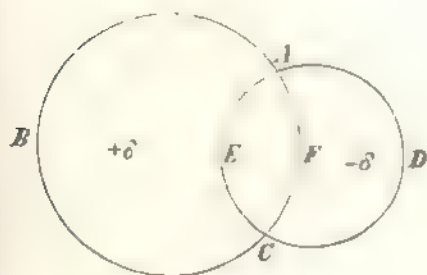
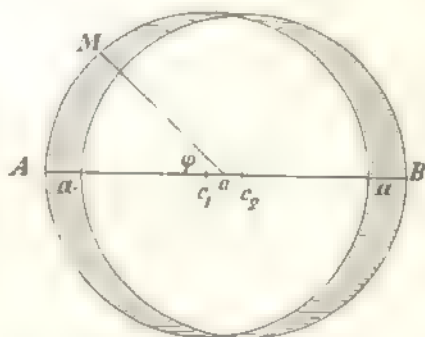


Рис. 103.



($a = 0$), то напряженіе поля дѣлается равнымъ нулю и мы имѣемъ случай однороднаго шароваго слоя, для котораго, какъ мы виѣли, $F = 0$.

Представимъ себѣ два шара $ABCEA$ (рис. 102) съ плотностью $+\delta$ и $AECDA$ съ плотностью $-\delta$, ихъ совокупность сводится къ положительной массѣ $ABCEA$, отрицательной $AECDA$ и пустой чечевичеобразной полости $AECFA$. Тѣмъ же способомъ, какъ выше, мы найдемъ, что эта полость есть равномерное динамическое поле, напряженіе котораго пропорционально плотности δ и разстоянью центровъ шаровъ.

Особенно важенъ, какъ мы увидимъ, случай, когда радиусы обоихъ шаровъ равны и центры ихъ c_1 и c_2 (рис. 103) весьма близки другъ къ другу. Въ этомъ случаѣ равномерное динамическое поле получается въ пространствѣ почти шаровидномъ, ограниченномъ двумя одинаковыми сферами положительной и отрицательной массы, отмѣченными на рисункѣ крестиками. Если положить $c_2 = a$, то оказывается, что толщина e слоя въ любой точкѣ M приблизительно равна

$$e = a \cos \varphi \dots \dots \dots (32)$$

гдѣ φ уголъ между прямой AB , проходящей черезъ центры c и c_2 и радиусомъ, проведеннымъ къ M изъ c_1 или c (при очень маломъ $c_1c_2 = a$ это безразлично).

Чѣмъ меньше $c_1c_2 = a$, тѣмъ точнѣе формула (12).

Если силы измѣрять въ астрономическихъ единицахъ, т.-е. исходить изъ формулы (12) (стр. 181) то напряжение поля $\psi = \frac{f}{m}$ оказывается равнымъ

$$\psi = \frac{4}{3} \pi \delta a \dots \dots \dots (33)$$

гдѣ a наибольшая толщина двухъ слоевъ.

§ 7. Частный случай притяженія точки эллипсоидальными слоевъ.

Представимъ себѣ, безконечно тонкій однородный слой (плотность δ), ограниченный поверхностями двухъ подобных и сходственно расположенныхъ эллипсоидовъ (рис. 104) т.-е. такихъ, оси которыхъ другъ другу пропорціональны, такъ что

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \dots \dots \dots (34)$$

гдѣ a, b, c оси одного, a_1, b_1, c_1 оси другого эллипсоида. Въ аналитической геометрии доказывается, что если черезъ произвольную точку M провести прямую, то ея отрезки, лежащие между поверхностями эллипсоидовъ будутъ равны; итакъ $pd = pq = \alpha$. Пусть въ M находится масса m , проведемъ безконечно малый тѣлесный уголъ ω съ вершиною въ M въ обѣ стороны. Онъ вырѣзаетъ изъ слоя двѣ массы, которыя обозначимъ черезъ m_1 и m_2 и которыя притягиваютъ массу m съ силами f_1 и f_2 , равными

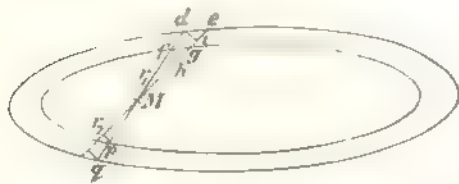
$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2}, \quad f_2 = \frac{m_2 m}{r_2^2} \dots \dots \dots (35)$$

Если черезъ точки f и d проведемъ шаровыя поверхности съ центромъ въ M , то наибъ тѣлесный уголъ вырѣжетъ изъ шарового слоя, ограни-

ченнаго этими поверхностями, элементъ $fdch$, объемъ котораго отличается отъ объема элемента $fdcg$ на величину безконечно малую сравнительно съ этими двумя элементами. Поэтому можно принять $m_1 = \delta r_1^2 \omega \times fd = \delta r_1^2 \omega \alpha$, такимъ же образомъ получаемъ $m_2 = \delta r_2^2 \omega \alpha$. Вставивъ эти значенія для m_1 и m_2 въ (35) получаемъ $f_1 = f_2$.

Отсюда, какъ и прежде для шарового слоя, заключаемъ, что однородный слой, ограниченный поверхностями двухъ подобных и сходственно расположенныхъ эллипсоидовъ, т.-е. удовлетворяющихъ условию (34), вовсе не дѣйствуетъ на точку, лежащую въ его полости.

Рис. 104.



ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Элементарное учение о потенциалѣ.

§ 1. Функции точки. Элементарному учению о потенциалѣ необходимо предпослать нѣсколько словъ о функцияхъ точки. Всякая величина, относящаяся къ определенной точкѣ, называется функцией точки. Такъ напр., температура есть функция точки, ибо ея значение мѣняется, вообще говоря, отъ точки къ точкѣ, и можно говорить о значеніи температуры въ данной точкѣ M . Пусть A данная точка и r расстояние другой точки M отъ A . Тогда величины r , r^2 , $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{\sqrt{r}}$ и т. д. суть функции точки M , ибо значение этихъ величинъ зависитъ отъ положенія точки M .

Всѣмъ функцию V точки M можно разсматривать какъ функцию координатъ x, y, z этой точки т.-е., можно положить

$$V = f(x, y, z).$$

Такъ напр., $V = \frac{1}{r}$ есть функция точки вида

$$V = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

и a, b, c координаты точки A . Геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ V имѣетъ одно и то же значение C , представляетъ нѣкоторую поверхность, уравненіе которой

$$V = f(x, y, z) = C.$$

Такая поверхность называется поверхностью уровня данной функции точки или ея изо-поверхностью.

Отсюда напр., название изотермической для поверхности, всѣ точки которой обладают одинаковой температурой. Придавая числу C различные значения, получаемъ безконечное множество поверхностей уровня: черезъ каждую точку пространства проходить одна такая поверхность и только одна, если функция однозначна.

Черезъ каждую точку A пространства можно провести кривую линию, для которой проходить черезъ поверхности уровня по направлениямъ, къ нимъ перпендикулярнымъ. Это значитъ, что во всякой точкѣ A касательная къ кривой перпендикулярна къ плоскости, касательной въ A къ поверхности уровня, проходящей черезъ ту же точку A . Такия кривыя линии называются ортогональными траекториями системы поверхностей.

§ 2. Потенціалъ при одной притягивающей массѣ (матеріальной точкѣ). Въ этой главѣ мы будемъ исходить изъ выраженія

$$f = \frac{mm_1}{r} \dots \dots \dots (1)$$

для силы f взаимного притяжения масс m и m_1 , находящихся на расстоянии r друг от друга. За единицу силы мы возьмем стд. астрономическую единицу (стр. 181), которая, если m и m_1 измерять в граммах и r в сантиметрах, примерно в 15 миллионов раз меньше абсолютной $C. G. S.$ единицы силы, т.е. дина (см. стр. 182). Для работы R мы, какъ прежде, примемъ выражение

$$R = fs \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ s путь, пройденный точкою приложения силы f во направлении последней. Измѣряя s напр. в сантиметрахъ, мы имѣемъ особую единицу работы, которая в 15 миллионовъ разъ меньше эрга (стр. 91).

Положимъ что въ точкѣ A (рис. 105) сосредоточена масса m , на расстоянии r возьмемъ геометрическую точку B и назовемъ величину V численное значение которой определяется формулою

$$V = \frac{m}{r} \dots \dots \dots (3)$$

потенциаломъ точки B или какъ иногда говорятъ, потенциаломъ въ точкѣ B . Этотъ потенциалъ какъ бы вызывается присутствіемъ массы m въ A . Въ различныхъ точкахъ B потенциалъ будетъ вообще различенъ, а потому потенциалъ есть функция точки. Поверхности уровни потенциала суть концентрическія шаровыя поверхности съ общимъ центромъ въ A . Ортогональныя траекторіи поверхностей уровни потенциала

суть радіусы шаровыхъ поверхностей, т.е. прямыя линіи, исходящія изъ точки A . Потенциалъ есть функция убывающая съ удаленіемъ отъ A , т.е. съ возрастаніемъ r . Въ бесконечно удаленныхъ точкахъ потенциалъ стремится къ предѣлу нуль.

Если мы изъ B перейдемъ въ B_1 по направленію къ A , т.е. въ сторону увеличивающагося потенциала, на бесконечно малый отрезокъ пути $BB_1 = \tau$, то мы въ B_1 найдемъ новое значение потенциала, которое обозначимъ черезъ $V + \Delta V$, гдѣ ΔV измѣненіе потенциала, соответствующее переходу отъ B къ B_1 . Очевидно $V + \Delta V = \frac{m}{r - \tau}$, откуда

$$\Delta V = \frac{m}{r - \tau} - \frac{m}{r} = \frac{m\tau}{r(r - \tau)}.$$

При весьма маломъ τ можемъ положить

$$\Delta V = \frac{m\tau}{r^2} \dots \dots \dots (4)$$

Если какая-либо масса m_1 перейдетъ изъ B въ B_1 , то сила f притяженія

между m и m_1 произвести элементарную работу, которую мы обозначимъ черезъ ΔR . Такъ какъ сила f направлена отъ B къ A , то

$$\Delta R = fs = \frac{mm_1}{r^2} s.$$

Сравнивая это съ (4), мы видимъ, что

$$\Delta R = m_1 \Delta V \dots \dots \dots (5)$$

т. е. элементарная работа силы притяжения выражается произведениемъ перемѣщенной массы на измѣненіе потенциала, соответствующее перемѣщенію.

Если масса m пройдетъ конечный путь изъ B къ C (рис. 106), то вся работа R силы притяжения точно получится, если путь BC разбить на элементы s , изъ которыхъ каждому соответствуетъ малая работа ΔR , такъ что $R = \sum \Delta R$. Пусть $AB = r_1$, $AC = r_2$; потенциалы точекъ B и C суть $V_1 = \frac{m}{r_1}$ и $V_2 = \frac{m}{r_2}$. Въ этомъ случаѣ имѣемъ, см. (5).

$$R = \sum \Delta R = \sum m_1 \Delta V = m_1 \sum \Delta V.$$

Но $\sum \Delta V$ есть сумма малыхъ измѣненій потенциала, соответствующихъ перемѣщеніямъ s , на которыя мы разбили весь путь отъ B до C ; ясно, что она равна полному измѣненію потенциала, т. е. что $\sum \Delta V = V_2 - V_1$. Итакъ

$$R = m_1(V_2 - V_1) \dots (6)$$

Работа силы притяженія

измѣряется произведениемъ притягиваемой массы на разность потенциаловъ конечной и начальной точекъ пути.

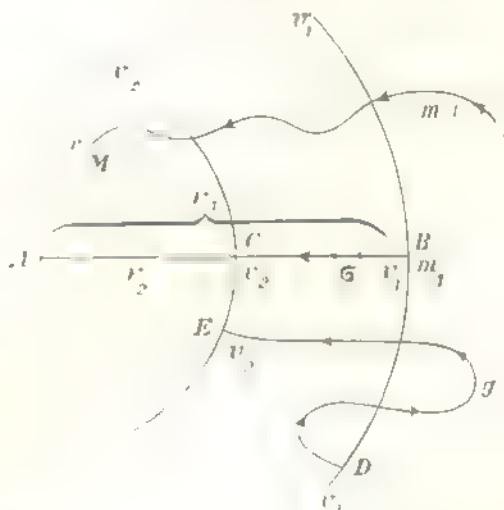
Сила притяжения принадлежитъ къ силамъ центральнымъ (стр. 95), а потому работа R не зависитъ ни отъ вида пройденнаго пути, ни отъ положенія начальной и конечной точекъ на двухъ шаровыхъ поверхностяхъ съ радиусами r_1 и r_2 (см. стр. 95), которыя здѣсь суть поверхности уровня потенциала. Формула (6) даетъ слѣд. и работу силы f при перемѣщеніи массы m_1 по пути DGE .

Работа зависитъ только отъ разности потенциаловъ тѣхъ двухъ точекъ, между которыми данная масса m_1 совершила переходъ.

Если $m_1 = 1$, то получается

$$R = V_2 - V_1 \dots \dots \dots (7)$$

Рис. 106.



Разность потенциалов двух точек равна работе перемещения единицы массы из одной точки в другую. Пусть масса $m_1 = 1$ переходит по произвольному пути из бесконечно удаленной точки в точку M (рис. 106), потенциал которой V . В этом случае $V_1 = 0$, $V_2 = V$ и вместо (7) получаем

$$R = V. \quad (8)$$

Потенциал данной точки равен работе силы притяжения, совершенной при переходе единицы массы из бесконечности по произвольному пути в эту точку. Из (6) следует еще, что $R = 0$, когда начальная и конечная точки пути лежат на одной и той-же поверхности уровня потенциала.

Когда m_1 удаляется от A , то происходит затрата работы R' или на счет энергии движения самой массы m_1 , или на счет какого-либо другого запаса энергии. В последнем случае мы говорим, что R' есть работа внешних сил. Переходу $(B$ или $EGD)$ должна соответствовать работа R' , которая по абсолютной величине равна R . Разница только в том, что начальная точка пути

делается теперь конечной и наоборот. (6) и (8) дают $R' = -m_1(V_2 - V_1)$ и $R' = V$ т.е.

Работа внешних сил измеряется произведением перемещенной массы на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.

Потенциал данной точки равен работе внешних сил, затрачиваемой при переходе единицы массы из этой точки по произвольному пути в бесконечность.

Сила f в каждой точке пространства направлена к точ-

ке A (рис. 105 и 106), т.е. по радиусу шаровой поверхности, которая есть поверхность уровня потенциала. Это дает теорему.

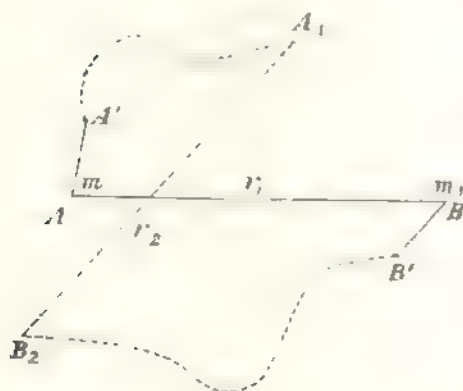
Действующая сила во всякой точке пространства перпендикулярна к поверхности уровня потенциала, проходящей через эту-же точку.

Линии сил суть ортогональные траектории поверхностей уровня потенциала.

Положим опять, что массы m и m_1 сосредоточены в точках A и B (рис. 107) на расстоянии r друг от друга. Введем новую величину W , численное значение которой определялось бы формулой

$$W = \frac{mm_1}{r}. \quad (9)$$

Рис. 107.



и которую мы назовемъ потенциаломъ массъ m и m_1 другъ на друга. Если V потенциалъ точки B , «вызванный» точкою A , и V_1 потенциалъ точки A , вызванный точкою B , т.-е. если положить $V = \frac{m}{r}$ и $V_1 = \frac{m_1}{r}$, то ясно, что

$$W = \frac{mm_1}{r} = Vm_1 = V_1m \dots \dots \dots (9.a)$$

Если m_1 перемѣстится изъ B въ B' , то работа ΔR , произведенная силою f , равна $\Delta R = m_1 \Delta V = \Delta(m_1 V) = \Delta W$, т.-е. равна измененію потенциала массъ другъ на друга. Но, аналогично, при перемѣщеніи m изъ A въ A' сила f взаимнаго притяженія массъ произведетъ работу, равную $\Delta R = m \Delta V_1$, гдѣ ΔV_1 разность потенциаловъ точекъ A и A' . Отсюда $\Delta R = \Delta(m V_1) = \Delta W$. Итакъ, которая изъ двухъ массъ не измѣнила бы своего положенія, работа ΔR всегда равна измѣненію величины W . Если сперва m перейдетъ изъ A въ A' и затѣмъ m_1 изъ B въ B' , то вся работа, совершенная взаимнымъ притяженіемъ двухъ массъ m и m_1 , будетъ очевидно равняться полному измѣненію величины W . Мы видѣли, однако, что работа внутреннихъ центральныхъ силъ не зависитъ отъ того, какими образомъ система перешла изъ одного расположенія въ другое (стр. 96), а потому и при одновременномъ перемѣщеніи массъ m и m_1 работа ΔR численно равняется измѣненію величины W . Разбивая конечныя перемѣщенія на элементы, мы отсюда уже легко выводимъ такой результатъ:

Если двѣ матеріальныя точки массы которыхъ m и m_1 , изъ каковаго-либо начальнаго расположенія A и B , при которомъ ихъ потенциалъ другъ на друга W имѣетъ сущае значеніе W_1 , по произвольнымъ путямъ переходятъ въ новое расположеніе A_2 и B_2 (рис. 107) при которыхъ W имѣетъ другое значеніе W_2 , то вся работа R силы ихъ взаимнаго притяженія равна

$$R = W_2 - W_1 \dots \dots \dots (10)$$

т.-е. разности ихъ потенциаловъ другъ на друга въ конечномъ и въ начальномъ расположеніяхъ. Если $AB = r_1$ и $A_2B_2 = r_2$, то

$$R = W_2 - W_1 = \frac{mm_1}{r_2} - \frac{mm_1}{r_1} \dots \dots \dots (11)$$

Если массы m и m_1 первоначально находятся на безконечно большомъ разстояніи другъ отъ друга и затѣмъ перешли по произвольнымъ путямъ въ такое положеніе, при которомъ ихъ потенциалъ другъ на друга имѣетъ значеніе W , то въ (11) слѣдуетъ положить $W_1 = 0$, $W_2 = W$; тогда получается

$$R = W \dots \dots \dots (12)$$

Потенціалъ двухъ точекъ другъ на друга равенъ работѣ ихъ притяженія, совершонной при переходѣ изъ «безконечно разрозненнаго» расположенія въ данное.

§ 3. Потенциаль при системѣ дѣйствующихъ массъ (матеріальныхъ точекъ). Дана система матеріальныхъ точекъ $m_1, m_2, m_3, m_4, \dots$ (рис. 108) и пусть геометрическая точка A находится на расстояніяхъ $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ отъ этихъ точекъ. Назовемъ потенциаломъ точки A , какъ бы вызваннымъ въ ней системой точекъ m , величину V , равную

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots = \sum \frac{m}{r} \dots \dots \dots (13)$$

т.-е. равную суммѣ потенциаловъ, которые вызываются въ той же точкѣ отдѣльными массами, изъ которыхъ состоитъ система. Если эти массы

Рис. 108.

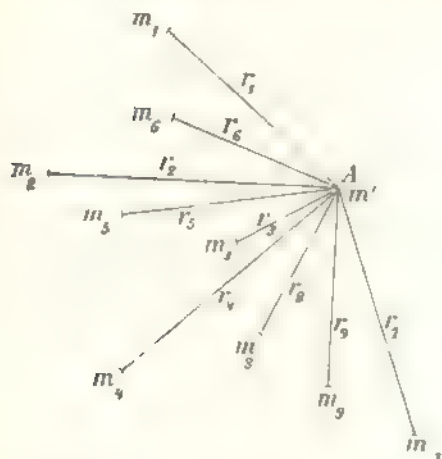
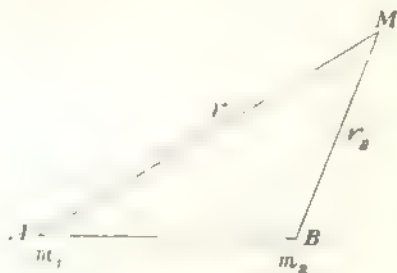


Рис. 109.



составляютъ сплошное тѣло, то мы раздѣлимъ его мысленно на безконечно малыя части, изъ которыхъ каждая будетъ играть роль одной изъ точекъ системы. Для знакомыхъ съ интегральнымъ исчисленіемъ замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ V принимаетъ видъ

$$V = \int \frac{kdr}{r} \dots \dots \dots (14)$$

гдѣ dv элементъ объема, k его плотности, r его расстояние отъ точки, потенциалъ которой V и, наконецъ, \int сокращенно обозначаетъ знакъ опредѣленнаго тройнаго интеграла, распространеннаго на объемъ тѣла.

Величина V , см. (13), есть функція точки, ибо съ измѣненіемъ положенія точки A вообще измѣняются все знаменатели r . Геометрическое мѣсто точекъ, обладающихъ одинаковымъ потенциаломъ, есть поверхность уровня потенциала. Ея уравненіе

$$V = C \dots \dots \dots (15)$$

гдѣ C постоянное число. Въ зависимости отъ числа и расположенія массъ m , видъ этихъ поверхностей можетъ быть весьма различный. Когда мы имѣемъ всего двѣ дѣйствующія массы m_1 и m_2 , то потенциалъ V въ точкѣ M (рис. 109) будетъ равняться $V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$ и уравненія поверхностей уровня будутъ $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = C$.

На рис. 110 изображены пунктиромъ линии пересѣченія плоскости рисунка съ поверхностями уровня потенциала для случая, когда въ точкѣ A находится масса m_1 , въ точкѣ B масса m_2 и притомъ $m_1 = 4m_2$. Поверхности уровня суть поверхности вращения, получающіяся при вращеніи всего рисунка около прямой AB . Кривыя, ближайшія къ A и B , мало отличающіяся отъ круговъ, не начерчены. Силовыя линіи суть ортогональныя траекторіи (стр. 193) поверхностей уровня потенциала; ихъ физическое значеніе выяснится ниже. Понятно, что двѣ системы кривыхъ (линіи силовыя и линіи пунктиромъ) на рис. 110 вездѣ пересѣкаются подъ прямыми углами.

Положимъ, что (рис. 108) m' переходитъ изъ точки A , потенциалъ которой равенъ

$$V_1 = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots \quad (16)$$

въ точку B , потенциалъ которой

$$V_2 = \frac{m_1}{r'_1} + \frac{m_2}{r'_2} + \frac{m_3}{r'_3} + \dots \quad (17)$$

гдѣ r'_1 расстояние массы m_1 отъ B . Требуется опредѣлить всю работу R , совершенную при этомъ переходѣ массы m' силою F , съ которою масса m' притягивается массами m системы. Сила F есть равнодѣйствующая силъ f_1, f_2, f_3, \dots съ которыми отдѣльныя эти массы притягиваютъ m' . Если черезъ R_1, R_2, R_3, \dots обозначить работу силъ f_1, f_2, f_3, \dots , то работа R силы F , на основаніи теоремы о работѣ равнодѣйствующей (стр. 193), равна алгебраической суммѣ работъ R_1, R_2, R_3, \dots .

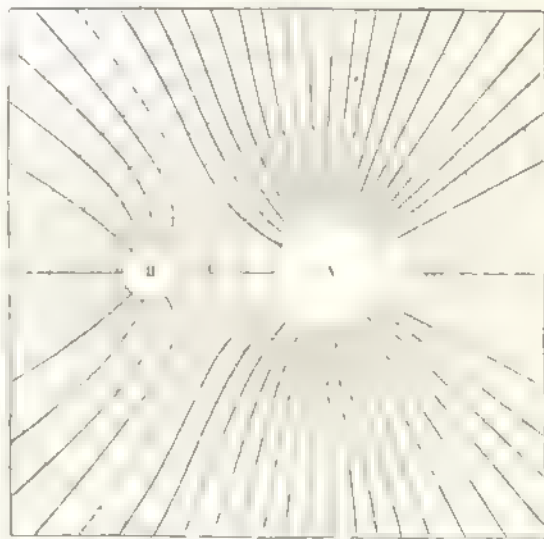
Итакъ

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (18)$$

Но на основаніи теоремы, формулирующей смыслъ равенства (6), имѣемъ

$$R_1 = m \left(\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_1}{r'_1} \right); \quad R_2 = m' \left(\frac{m_2}{r_2} - \frac{m_2}{r'_2} \right) \text{ и т. д. } ^\circ$$

Рис. 110.



Вставляя это въ (18), получаемъ

$$R = m' \left\{ \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_3}{r_3} - \dots \right\} - m' \left\{ \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_3}{r_3} - \dots \right\}$$

т. е., см. (16) и (17).

$$R = m'(V_2 - V_1) \dots \dots \dots (19)$$

Въ случаѣ системы дѣйствующихъ массъ, работа, произведенная при перемѣщеніи массы m' , также измѣняется произведениемъ этой массы на разность потенциаловъ конечной и начальной точекъ пути.

При $m' = 1$ получимъ формулу, тождественную съ (7). Если масса $m' = 1$ переведеть изъ безконечности по произвольному пути въ точку, потенциалъ которой V , то (19) дастъ ($m = 1$, $V = 0$, $V_1 = V$)

$$R = -V \dots \dots \dots (20)$$

Получается то же самое значеніе потенциала точки, которое было сформулировано послѣ равенства (8).

Формула (19) показываетъ, что работа R зависитъ только отъ тѣхъ двухъ поверхностей уровня потенциала ($V = V_1$ и $V = V_2$), между которыми былъ совершенъ переходъ массы m' , но не зависитъ, ни отъ формы пути, ни отъ положенія начальной и конечной точекъ пути на этихъ поверхностяхъ.

Рис. 111.



Черезъ каждую точку M пространства, въ которой дѣйствуетъ сила, можно провести поверхность уровня потенциала и притомъ только одну (рис. 111). Если въ эту точку M помѣстить массу m' , то на нее будетъ дѣйствовать нѣкоторая сила F . Опредѣлимъ ея направленіе. Если массу m' перемѣстимъ по поверхности AB на бесконечно малый путь MM_1 , MM_2 , или другой, не лежащій въ плоскости рисунка, то работа R силы F будетъ нуль

на основаніи формулы (19), такъ какъ начальныя и конечныя точки пути лежатъ на одной и той же поверхности уровня потенциала. Отсюда слѣдуетъ (стр. 92), что сила F перпендикулярна ко всякимъ малымъ линиямъ, которыя по всевозможнымъ направленіямъ можно провести изъ M по поверхности AB . Это показываетъ, что сама сила F нормальна къ поверхности AB .

Въ каждой точкѣ пространства дѣйствующая сила перпендикулярна къ поверхности уровня потенциала, проходящей черезъ эту же точку.

Отсюда непосредственно вытекаетъ, что линіи силъ суть орто-

гональные траектории (стр. 193) поверхностей уровня потенциала.

Сплошная линия на рис. 110 есть, следовательно, линия силы.

Сила F направлена в сторону возрастающего потенциала. Действительно, если m переместить на бесконечно малую величину $MM' = \varepsilon$ (рис. 111) по направлению силы F , то работа R с одной стороны будет равна $F\varepsilon$, с другой, на основании (19), $R = m'(V + \Delta V - V) = m'\Delta V$, если потенциал точки M (и всей поверхности AB) обозначить через V , а потенциал точки M' через $V + \Delta V$. Итак

$$F\varepsilon = m'\Delta V, \quad (21)$$

Отсюда ясно, что $\Delta V > 0$ и что F обращено в сторону возрастающего потенциала. Равенство (21) дает

$$F = m' \frac{\Delta V}{\varepsilon}.$$

Однако ε величина бесконечно малая и последняя формула строго верна только в предельн. т.-е.

$$F = m' \lim_{\varepsilon} \frac{\Delta V}{\varepsilon}. \quad (22)$$

Здесь ΔV есть изменение потенциала, соответствующее бесконечно малому перемещению ε , нормальному к поверхности уровня потенциала.

Проверим (22) для случая одной действующей точки m , когда $V = \frac{m}{r}$.

пусть малое перемещение $\varepsilon = BB'$ (рис. 105 стр. 194). Тогда $\Delta V = \frac{m}{r + \varepsilon} - \frac{m}{r} = \frac{m\varepsilon}{r(r + \varepsilon)} \approx \frac{m\varepsilon}{r^2}$. При бесконечно малом ε имеем $\lim_{\varepsilon} \frac{\Delta V}{\varepsilon} = \frac{m}{r^2}$, и (22) дает верное выражение $F = \frac{mm'}{r^2}$.

§ 4. Потенциал двух систем друг на друга. Положим, что имеются две системы точек A и B и пусть m_i масса одной из точек системы A , m_k масса одной из точек системы B и r расстояние этих двух точек друг от друга. Составим сумму W всех величин вида

$$\frac{m_i m_k}{r},$$

входящих при комбинации каждой точки системы A с каждой точкой системы B . Эту сумму

$$W = \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r}, \quad (23)$$

назовем потенциалом систем A и B друг на друга. Если эти системы переместить из какого-либо начального расположения точек, в котором $W = W_1$, в новое расположение, в котором $W = W_2$,

то изменение каждого члена $m_i m_k r$ даст работу силы, действующей между точками m_i и m_k , см. (11), а потому полное изменение величины W , т.-е. $W_2 - W_1$ даст всю работу R всех сил, действующих между точками двух систем. Таким образом имеем

$$R = W_2 - W_1 \dots \dots \dots (24)$$

Если обе системы первоначально находились на весьма большом расстоянии друг от друга, расстояний и затем перешли в расположение, при котором их потенциалы друг на друга равен W , то работа R сил, действующих между системами A и B , получится, если в (24) положить $W_1 = 0$ и $W_2 = W$; таким образом имеем

$$R = W \dots \dots \dots (25)$$

Потенциалы двух систем друг на друга равен работ сил, действующих между точками m_i одной и точками m_k другой системы, произведенной при переходе обеих систем из весьма далекого друг от друга расстояния в то положение, которое они занимают.

Пусть W_0 наибольшее значение величины W , возможное при заданных свойствах двух систем и получающееся при наибольшем их сближении. Тогда

$$R = W_0 - W \dots \dots \dots (26)$$

есть вся та работа, которая еще может быть получена от двух систем, потенциал которых друг на друга равен W . Ясно, что величина $W_0 - W$ равна запасу потенциальной энергии, которым обладает совокупность двух систем, вследствие существования притягательных сил между каждой точкой одной системы и каждой точкой другой.

§ 5 Потенциал системы самой на себя. Положим, что имеется система материальных точек

$$m_1 \ m_2 \ m_3 \dots m_i \dots m_k \dots$$

и пусть r_{ik} расстояние между двумя из них m_i и m_k друг от друга. Величина $\frac{m_i m_k}{r_{ik}}$ есть потенциал масс m_i и m_k друг на друга, стр. 197. Составим подобия дроби для всех возможных комбинаций двух частиц, причем однако каждая пара должна быть взята только один раз. Если n число всех частиц, то число дробей будет $\frac{1}{2}n(n-1)$, что при очень большом n можно принять равным $\frac{1}{2}n^2$. Сумму всех таких дробей назовем потенциалом системы самой на себя и обозначим через W .

Символическое условное обозначение для W легко написать, если мы поды символами

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{m_i m_k}{r_{ik}} \dots \dots \dots (27)$$

условимся понимать сумму дробей, которые получаются, если поочередно каждую точку системы (безъ пропусковъ) будемъ сочетать со всѣми остальными точками. Очевидно, что при этомъ каждая пара m_i и m_k встрѣтится по два раза и что слѣд. $W = \frac{1}{2} S$. Отбрасывая значки, принято писать

$$W = \frac{1}{2} \sum \sum \frac{m_i m'_k}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Величину S можно преобразовать, написавъ

$$S = \sum_i m_i \sum_k \frac{m_k}{r_{i,k}}.$$

Но $\sum_k \frac{m_k}{r_{i,k}}$ есть ничто иное, какъ значеніе V_i потенциала системы въ принадлежащей ей геометрической точкѣ, занимаемой массой m_i см. (13). Слѣд. можно написать $S = \sum_i m_i V_i$. Отсюда, отбросивъ значки, получаемъ для W такое выраженіе

$$W = \frac{1}{2} \sum m V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Потенціалъ системы самой на себя равенъ полусуммѣ произведеній массы каждой изъ матеріальныхъ точекъ, изъ которыхъ состоитъ система, на потенциаль занимаемой ею геометрической точки.

Предположимъ, что система изъ пѣкотораго первоначальнаго расположенія, при которомъ $W = W_1$, перешла въ новое, при которомъ $W = W_2$. Требуется опредѣлить всю «внутреннюю» работу R , совершаемую всѣми силами притяженія, дѣйствующими между частицами системы при этомъ переходѣ. Мы уже знаемъ (стр. 96), что R не зависитъ отъ тѣхъ путей, по которымъ точки системы перешли изъ перваго во второе расположеніе.

При переходѣ каждой пары m_i и m_k частицъ изъ перваго положенія въ второе, новое, совершается силою ихъ взаимодѣйствія работа R_k , равная измѣненію потенциала этихъ двухъ частицъ другъ на друга, т.-е. равная измѣненію соответствующаго имъ члена суммы (28), выражающей величину W . Вся искомаѣ работа R равна суммѣ всѣхъ работъ, подобныхъ R_k ; на слѣд. равна суммѣ измѣненій, претерпѣваемыхъ членами, изъ которыхъ состоитъ W , при переходѣ системы изъ перваго расположенія во второе, т.-е. ясно, что R равно измѣненію величины W , т.-е.

$$R = W_2 - W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Если система матеріальныхъ точекъ переходитъ изъ одного расположенія въ другое, то вся работа внутреннихъ силъ равна измѣненію потенциала системы самой на себя.

Допустимъ, что система изъ «незконечно разрозненнаго» состоянія,

при которомъ все $r_{i,k}$ безконечно велики, перешла въ данное расположение, при которомъ потенциалъ ея самой на себя равенъ W . Тогда въ (30) имѣемъ $W_1 = 0$, $W_2 = W$, т.-е.

$$R = W \dots \dots \dots (31)$$

Потенциалъ системы самой на себя равенъ работѣ, совершенной внутренними силами при ея образованіи изъ безконечнаго разрозненнаго состоянія.

Результатомъ этой работы долженъ явиться эквивалентный запасъ энергіи, напр. кинетической энергіи видимого движенія частицъ, или теплоты, или иной ея формы.

§ 6. Теорема о пространствѣ, внутри котораго $V = \text{Const}$. Докажемъ слѣдующую теорему:

Если внутри замкнутаго пространства потенциалъ V , вызванный массами, лежащими внѣ его, имѣетъ повсюду одно и то же постоянное значение $V = C$, то во всякой точкѣ этого

пространства дѣйствующая сила $F = 0$, и наоборотъ: если въ замкнутомъ пространствѣ вездѣ $F = 0$, то въ немъ потенциалъ $V = C$, т.-е. постояненъ.

Для доказательства положимъ, что внутри поверхности S (рис. 112) $V = \text{Const}$. Помѣстимъ мысленно въ какую-либо точку

A массу m' ; въ какомъ бы направленіи мы

ее изъ A ни перемѣстимъ, работа дѣйствующей силы F будетъ нуль, ибо въ (19) $V = V_1 = C$. Отсюда слѣдуетъ, что $F = 0$.

Положимъ, наоборотъ, что внутри S вездѣ $F = 0$; возьмемъ двѣ произвольныя точки A и B внутри S и перемѣстимъ массу m' изъ A въ B . Такъ какъ на всемъ пути $F = 0$, то ясно, что $R = 0$. Но тогда (19) показываетъ, что потенциалы точекъ A и B равны между собою. Въ виду произвольности точекъ A и B отсюда слѣдуетъ, что все точки внутри S обладают однимъ и тѣмъ же потенциаломъ.

§ 7. Потенціалъ шарового слоя и шара. Замѣтимъ, что кромѣ введенной выше терминологіи потенциалъ точки A , вызванный системой материальныхъ точекъ, еще говорить о потенциалѣ системы въ точкѣ A .

Для тонкаго шарового слоя, радіусъ котораго R , толщина s , плотность δ , можно найти внѣшній потенциалъ V_1 и внутренній V_2 слѣдующимъ элементарнымъ путемъ. Такъ какъ шаровой слой во внѣшнемъ пространствѣ вызываетъ такія же силы F , какъ еслибы вся его масса M была сосредоточена въ его центрѣ (стр. 189), то ясно, что и потенциалъ V_1 долженъ обладать соответствующимъ свойствомъ, т.-е. въ точкѣ A , лежащей на разстояніи $r > R$ отъ центра, долженъ быть

$$V_1 = \frac{M}{r} \dots \dots \dots (32)$$

Рис. 112.

S



Очевидно, что эта же формула относится и к однородному паровому слою конечной толщины и к однородному сплошному пару. Во внутреннем пространстве $F=0$ (стр. 187); из оснований теоремы § 6 мы должны иметь $V_1 = \text{const.}$, т.е. во всякой точке внутри парового слоя потенциал V должен иметь одно и то же значение. Легко найти значение V_1 потенциала в центре шара; ясно, что мы должны иметь $V_1 = V_0$. Разделим массу парового слоя на элементы mc ; они все находятся на одинаковом расстоянии R от центра, следовательно потенциал

$$V_i = \sum \frac{m}{R} = \frac{\sum m}{R} = \frac{M}{R}.$$

Итак,

[illegible]

Такъ какъ $M = 4\pi R^2 c \delta$, то V , равно еще

$$V_{\text{eff}} = 4 - R\phi^2 \quad (34)$$

Для взаимодействий сь интратермальными рассмотрим бодте строния выводъ величинъ U и V для точкато шарового слоя. Пусть A (рис. 113) вѣншняя точка, находящаяся на разстоянии $CA = x$ отъ центра шара. Если m масса элемента шарового слоя, находящегося въ B , и $BA = r$, то искомое $V = \sum_i^m$. Обозначимъ черезъ $\varphi = \angle BCD$ и ψ (долготу) полярныя координаты точки B , тогда $R \sin \varphi d\varphi d\psi$ элементъ поверхности около B и сльд. $m = c\delta R \sin \varphi d\varphi d\psi$. Далеѣ $r = VR^2 + x^2 - 2Rxc \cos \varphi$ и потому

$$V_{\perp} = c\partial R \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin\varphi d\varphi d\varphi'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\varphi}} = 2\pi c\partial R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\varphi}} \quad (35)$$

59 134

$$V = \frac{2\pi\epsilon R}{x} \int_0^{\sqrt{x^2 - R^2}} d\varphi \sqrt{R^2 - x^2 - 2Rx \cos \varphi} \quad (36)$$

Пределы пентрагра обозначены символически. Неопределенный пентраграф равен $\frac{1}{2} R^2 + x^2 - 2 R x \cos \varphi = r$ и потому символически написать $V_0 = \frac{2\pi R}{x} \int_0^{\frac{1}{2} R^2 + x^2 - 2 R x \cos \varphi = r} r \, dr$, где D и E точки на чертеже, в которых $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Это дает

$$V_r = \frac{2\pi c^2 R}{r} \{AE - D\lambda\} = \frac{2\pi c^2 R}{r} \{r - R\} - \frac{4\pi R^2 c^2}{r} \frac{M}{r};$$

ТАКИМЪ ОБРАЗОМЪ ФОРМУЛА (32) ПРОВЕРЕНА.

Внутренний потенциал V в точке 1 (рис. 114) выражается теми же

интегралами (35) и (36), как и V_1 ; только теперь $r = CA < R$. Мы опять имеем

$$V_1 = \frac{2\pi\delta R}{r} \{AE - AD\} = \frac{2\pi\delta R}{x} \{R - (R - x)\} = 4\pi\delta R = \frac{M}{R}.$$

чем и превращаются формулы (33) и (34).

Потенциаль V_1 во внутренней полости однородного шарового слоя, ограниченного шаровыми поверхностями с радиусами R_1 и

Рис. 113.

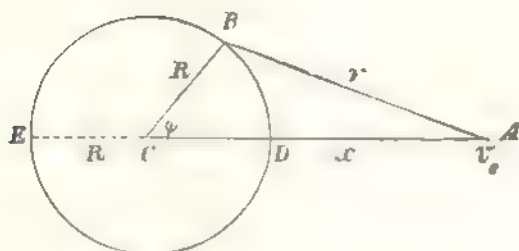
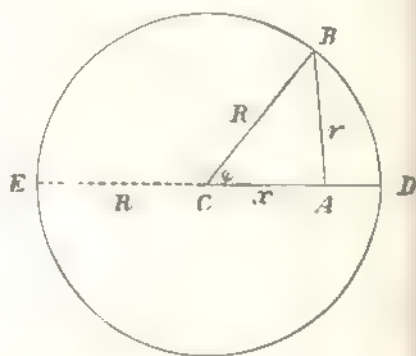


Рис. 114.



R_2 , получится, если разбить данный слой на бесконечно тонкие слои, принимая δ в (34) равным dR . Тогда

$$V_1 = \int_{R_1}^{R_2} 4\pi\delta R dR = 2\pi\delta(R_2^2 - R_1^2) \quad (37)$$

Потенциаль V внутри сплошного шара (радиус R , плотность δ) в точке A , находящейся на расстоянии x от центра, состоит из двух частей. Первая, V_1 , есть потенциал сплошного шара, радиус которого x и в поверхности которого находится точка A , (32) дает $V_1 = \frac{M}{x} = \frac{4\pi x^3}{3} \delta = \frac{4}{3} \pi x^2 \delta$. Вторая часть, V_2 , есть потенциал шарового слоя, внутри которого находится точка A ; он получится из (37), полагая $R_2 = R$ и $R_1 = x$, так что $V_2 = 2\pi\delta(R^2 - x^2)$. Складывая $V_1 + V_2 = V$, находим внутри сплошного однородного шара

$$V = 2\pi\delta R^2 - \frac{2}{3} \pi\delta x^2 = 2\pi\delta \left(R^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) \quad (38)$$

Потенциаль в центре сплошного шара равен $2\pi\delta R^2$.

Рышимъ любопытную задачу о потенциалѣ W сплошнаго однороднаго шара самаго на себя. Воспользуемся формулою (29)

$$W = \frac{1}{2} \sum m V \dots \dots \dots (39)$$

Раздѣлимъ шаръ концентрическими шаровыми поверхностями на бесконечно тонкіе слои; пусть r радиусъ, dx толщина одного изъ этихъ слоевъ. Такъ какъ V одно и то же во всѣхъ точкахъ слоя, а именно равно величинѣ (38), то мы можемъ въ (39) принять m равнымъ массѣ слоя т.-е. положить $m = 4\pi r^2 \delta dx$. Такимъ образомъ, см. (38),

$$W = \frac{1}{2} \int_0^R (2\pi \delta R^2 - \frac{2}{3} \pi \delta r^2) 4\pi \delta x^2 dx.$$

Этотъ простой интегралъ даетъ, если M масса всего шара,

$$W = \frac{16}{15} \pi \delta^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{M^2}{R} \dots \dots \dots (40)$$

Итакъ, потенциалъ шара самаго на себя пропорціоналенъ квадрату его плотности и пятой степени его радиуса.

Формула (40) даетъ намъ работу образования шара изъ безконечно разрозненнаго состоянія.

(40) показываетъ также, что если данная масса M , слѣдственно, послѣдовательно занимаетъ объемы шаровъ съ различными радиусами, то потенциалъ W , а слѣд. и работа образования шара обратно пропорціональны его радиусу.

Если масса M , занимаемая объемомъ шара съ радиусомъ R , сгустится до объема шара съ радиусомъ $R_1 < R$, то работа сгущения будетъ равна

$$W' - W = \frac{3}{5} M^2 \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

Слѣдуетъ твердо помнить, что формулы (40) и (41) даютъ намъ работу образования и сгущения шара не въ абсолютныхъ единицахъ. Если M выразить въ граммахъ, а R въ сантиметрахъ, то (40) и (41) дадутъ намъ искомую работу въ единицахъ, изъ которыхъ каждая приблизительно въ $15 \cdot 10^8$ разъ меньше эрга (стр. 194).

Формула (41) даетъ намъ возможность вычислить работу сгущения шара хотя бы на 0.1° его радиуса, а слѣд. и ту теплоту Q , которая при этомъ выдѣлится, что и предлагаемъ сдѣлать читателямъ. Интересно затѣмъ узнать, на сколько времени хватитъ этой теплоты, если допустить, что на квадратный сантиметръ, перпендикулярный къ лучамъ солнца и находящийся на разстояніи земли отъ солнца, падаютъ 3 малыя калоріи въ одну минуту. Принимая для теплоемкости шара какое-либо приближенное число, можно получить понятие о нагрѣваніи, которое имѣло бы мѣсто при его

ту единицу времени. Путь s_n , пройденный в течение n -ой секунды, равен

$$s_n = \frac{1}{2} g n^2 - \frac{1}{2} g (n-1)^2 \text{ или}$$

$$s_n = (2n-1) \frac{g}{2} = \frac{1}{2} g + (n-1)g \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Пути, пройденные въ последовательныя единицы времени, увеличиваются на ту же численную величину g , на которую возрастают и скорости въ концѣ последовательныхъ единицъ времени. Эти пути суть $s_1 = \frac{g}{2}$; $s_2 = \frac{g}{2} + g = \frac{9}{2}$; $s_3 = \frac{g}{2} + 2g = \frac{25}{2}$; $s_4 = \frac{g}{2} + 3g = \frac{49}{2}$ и т. д. Пути s_n относятся какъ нечетныя числа 1, 3, 5 и т. д., какъ это видно изъ (6).

Формулы (5) даютъ, если исключить время t

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{v^2}{2g} \\ v &= \sqrt{2gs} \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

II. Движеніе снизу вверхъ. Начальная скорость v_0 не можетъ равняться нулю. Имѣемъ, см. (23) стр. 70,

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 - gt \\ s &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Тѣло остановится въ то время T , для котораго $v = v_0 - gT = 0$, откуда

$$T = \frac{v_0}{g} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Вставляя это T въ выраженіе для s , находимъ высоту H поднятія

$$H = \frac{v_0^2}{2g} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Высота поднятія пропорциональна квадрату начальной скорости. Достигнувъ высшей точки, тѣло начинаетъ падать. Оно возвратится въ начальную точку, употребивъ на возвратный путь время T_1 , которое получится изъ формулы $H = \frac{1}{2} g T_1^2$ см. (5), откуда $T_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$; вставляя сюда (10), получаемъ $T_1 = \frac{v_0}{g}$, т.-е. $T_1 = T$. На обратное паденіе потребуется время, равное времени подъема. Скорость v_1 , которую обладаетъ тѣло въ моментъ его возвращенія въ начальную точку движенія, получается изъ (7), она равна $v_1 = \sqrt{2gH}$; вставляя (10) находимъ $v_1 = \pm v_0$. Въ данномъ случаѣ очевидно $v_1 = -v_0$. Тѣло при паденіи возвращается въ начальную точку со скоростью по абсолютной величинѣ равную начальной скорости подъема.

III. Движеніе по наклонной плоскости при отсутствіи тренія. Когда тѣло находится на наклонной плоскости AB (рис. 115)

Тѣло будетъ двигаться по нѣкоторой кривой и въ моментъ времени t находится въ нѣкоторой точкѣ P , координаты которой x и y , и обладать скоростью v , составляемая которой вдоль осей обозначимъ черезъ v_x и v_y . Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что горизонтальное движеніе есть равномерное со скоростью $v_0 \cos \alpha$, а движеніе вертикальное — равномерно переменное съ начальною скоростью $v_0 \sin \alpha$. Отсюда слѣдуетъ, что

Рис. 116.

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - gt \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Исключивъ t изъ уравненій (13), находимъ

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \dots \dots \dots (14)$$

Это уравненіе параболы ABC , по которой тѣло движется, она проходитъ черезъ O ; ея ось BD вертикальна. Скорость v во время t равна

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2 = V^2 \cos^2 \alpha - 2g(v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2),$$

или, см. (13),

$$v^2 = v_0^2 - 2gy \dots \dots \dots (15)$$

Эта формула показываетъ, что находясь при подъѣмѣ AB и при спускѣ BC на одинаковой высотѣ y , тѣло обладает и одинаковою скоростью v , такъ, въ точкахъ P и R скорость одна и та же по величинѣ, но, конечно, различная по направленію. Формулу (15) можно вывести изъ принципа сохраненія энергии. Въ тотъ моментъ, когда движущееся тѣло обладает скоростью v , оно потеряло, отъ начала своего движенія, кинетическую энергию $\frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} mv^2$ и приобрѣло потенциальную энергию $py = mgy$, гдѣ p вѣсъ тѣла. Упомянутый принципъ даетъ $\frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} mv^2 = mgy$, откуда непосредственно и получается (15).

Моментъ T_1 достиженія высшей точки B (вершины параболы) мы получимъ, полагая $v_y = 0$. Формула (12) даетъ время подъема

$$T_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \dots \dots \dots (16)$$

Подставляя T_1 вмѣсто t въ (13), находимъ высоту $DB = b$ подъема и абсциссу $a = OD$ точки B . Получается

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ b &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

При $\alpha = 90^\circ$ мы имѣемъ высоту $b = H$ вертикальнаго подъема, см. (10).

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \dots \dots \dots (18)$$

При $\alpha = 45^\circ$ имѣемъ $b = \frac{1}{2} H$.

Время T_1 , когда тѣло возвратится къ горизонтальной плоскости OX , определяется изъ условія $y = v_0 \sin \alpha \cdot T_1 - \frac{1}{2} g T_1^2 = T_2 (v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g T_1) = 0$. Отсюда, см. (16).

$$T_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2T_2 \dots \dots \dots (19)$$

Время спуска BC равно времени подъема AB .

Скорость въ C равна v , какъ видно изъ (15). Абсцисса $c = OC$ точки C , т. е. дальность полета, получается, подставляя T_1 вмѣсто t въ выражение (13) для x , получается, см. (17)

$$c = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 2a \dots \dots \dots (20)$$

Отсюда слѣдуетъ, что $OC = 2OD$. Максимальная дальность полета c_m получается при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. $\alpha = 45^\circ$; она равна, см. (18).

$$c_m = \frac{v_0^2}{g} = 2H \dots \dots \dots (21)$$

Максимальная дальность полета равна удвоенной высотѣ вертикальнаго подъема (т. е. когда $\alpha = 90^\circ$).

Формула (20) показываетъ, что при данной начальной скорости v_0 тѣло, выходя изъ O , можетъ попасть въ каждую точку E , лежащую на OX , при двухъ различныхъ значеніяхъ угла α , если только $OE < c_m$. Эти два значенія угла α дополняютъ другъ друга до 90° . Такъ напр. при $\alpha = 30^\circ$ получится парабола OFE , при $\alpha = 60^\circ$ — парабола $OG E$.

Предоставляемъ читателю доказать, что описанная выше парабола соответствующимъ значеніямъ угла α отъ $\alpha = 0$ до $\alpha = \pi$, есть также некоторая парабола ABC (рис. 117) ось которой совпадаетъ съ осью Oy и вершина которой лежитъ надъ точкою O на разстояніи $OB = H = \frac{v_0^2}{2g}$; на пересѣкаетъ ось OX въ двухъ точкахъ A и C , координаты которыхъ $OC = OA = \pm c_m = \pm 2H$. Сравненіе ея

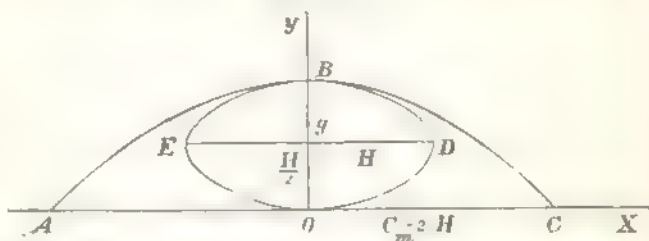
$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2 \dots \dots \dots (22)$$

Далѣ легко доказать, что геометрическое мѣсто вершинъ параболъ есть эллипсъ $BDOEB$, малая ось котораго совпадаетъ съ осью Oy ; ось проходитъ черезъ точку O и черезъ точку B , лежащую надъ O на высотѣ H , т.-е. черезъ вершину параболы (22). Его малая полуось $\frac{1}{2}BO$ равна слѣд. $\frac{1}{2}H = \frac{c^2}{4g}$, горизонтальная большая полуось $\frac{1}{2}ED$ равна $H = \frac{c^2}{2g}$ такъ что $ED = OA = OC$. Его уравненіе

$$y^2 + \frac{x^2}{\frac{H}{2}} = H \quad y = \dots \quad (23)$$

При данной начальной скорости c , тѣло ни при какихъ значеніяхъ угла α не достигнетъ точки, лежащей внѣ параболы ABC . Точки, лежащія внутри эллипса $BDOEB$ могутъ быть достигнуты, какъ при восходящемъ, такъ и при нисходящемъ движеніяхъ; въ каждой изъ нихъ пересѣкаются двѣ параболы. Точки, лежащія между эллипсомъ $BDOEB$ и параболою ABC могутъ быть достигнуты тѣломъ только при α нисходящемъ движеніи.

Рис. 117.



§ 5. Математическій маятникъ. Математическій маятникъ состоитъ изъ материальной точки, которой мы приписываемъ массу m и вѣсъ $p = mg$ и которая помѣщается на одномъ концѣ идеальнаго стержня CM (рис. 118) неразстѣпимаго, неопругаго и не обладающаго массой. Другой его конецъ связанъ съ точкою C , около которой весь маятникъ можетъ вращаться. Длинну маятника обозначимъ черезъ $l = CM$, его положеніе покоя есть CA .

Предположимъ, что маятникъ былъ отклоненъ въ сторону на $\angle ACB = \alpha$ и оставленъ предоставленъ самому себѣ. Подъ вліяніемъ силы тяжести онъ будетъ качаться, причемъ $AB = l$ назовемъ полуразмахомъ качанія; обозначимъ его черезъ $a = lz$. Время полнаго качанія, т.-е. время отъ момента когда маятникъ занимаетъ крайнее положеніе CB до возвращенія къ тому же положенію, обозначимъ черезъ T . Внеси цѣлѣмъ мы нѣсколько измѣнимъ это обозначеніе. Намъ слѣдуетъ прежде всего скорость c конца маятника въ одномъ изъ промежуточныхъ положеній CM , когда его уголъ отклоненія отъ положенія равновѣсія равенъ $\angle ACM = \varphi$. Опустимъ изъ B и M перпендикуляры BF и ME на CA и положимъ $EF = h$. Живая сила $\frac{1}{2}mv^2$ маятника въ рассматриваемый моментъ должна равняться работѣ $ph = mgh$ произведенной силой тяжести при переходѣ массы m изъ B въ M . Слѣд. $c = 2gh$, но $h = CF = CF' - l \cos \varphi = l \cos \alpha - l \cos \varphi$. Отсюда получается

$$c = 2g(l \cos \alpha - l \cos \varphi) \dots \dots \dots (24)$$

Въ моментъ прохожденія маятника черезъ положеніе равновѣсія CA получаемъ максимальную скорость v_0 его конца, подставивъ въ (24) $\varphi = 0$,

$$v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gl} (25)$$

Для весьма малыхъ α можно положить $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{q}{2l}$ такъ что

$$v_0 = a \sqrt{\frac{g}{l}} (26)$$

Натяженіе F нити въ моментъ, которому соответствуетъ положеніе CM и скорость v , состоитъ изъ двухъ частей: изъ составляющей вдоль нити веса p , равной $p \cos \varphi$ и изъ центробѣжной силы f , которая равна $\frac{mv^2}{l}$. Подставивъ (24), имѣемъ

Рис. 118.

$$f = \frac{mv^2}{l} = 2mg(\cos \varphi - \cos \alpha) = 2p(\cos \varphi - \cos \alpha);$$

откуда

$$F = p \cos \varphi + f = p(3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha) . . . (27)$$

Въ моментъ, когда $\varphi = 0$, натяженіе дѣлается равнымъ

$$F_0 = p(3 - 2 \cos \alpha) . . . (28)$$

Если $\alpha = 90^\circ$, т.-е. маятникъ былъ отклоненъ до положенія CD , то получимъ $F_0 = 3p$, т.-е. натяженіе въ три раза больше, чѣмъ когда маятникъ въ покоѣ и на нить дѣйствуетъ только весъ p .

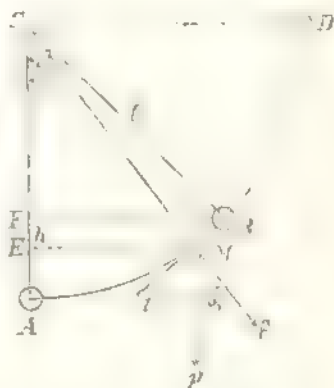
Положимъ $\alpha = 180^\circ$ въ моментъ, когда $\varphi = 90^\circ$ т.-е. маятникъ находится въ положеніи ED , получимъ изъ (28) $F = 2p$; для F_0 имѣемъ на основаніи (28) $F_0 = 5p$.

Разсмотримъ случай весьма малыхъ колебаній. Угломъ AB считать за положительное. Сила f , дѣйствующая на конецъ маятника по направленію его движенія и являющаяся причиною тангенціальнаго ускоренія въ его движеніи, равна $f = p \sin \varphi$. Полагая $p = mg$ и считая φ за весьма малый уголъ, имѣемъ $f = mg\varphi$. Обозначая разстояніе AM конца маятника отъ его средняго положенія чрезъ s , имѣемъ $l\varphi = s$ и слѣд.

$$f = m \frac{g}{l} s (29)$$

По виду это выраженіе тождественно съ (22) стр. 117, если положить

$$c = \frac{g}{l} (30)$$



Отсюда следует, что при весьма малых качаниях можно, как первое приближение, принять, что конец маятника совершает гармоническое колебательное движение с амплитудой $a = AB$. Но однако не по прямой линии, но по весьма малой дуге окружности. Формула (18) стр. 117 дает $\epsilon = a\sqrt{g} = a\sqrt{\frac{g}{l}}$, что согласно с (26), дайте формула (17) стр. 116 дает для времени полного колебания

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Подъ временем качания T маятника условимся, однако, понимать половину этой величины, т. е. время от одного прохождения через положение покоя до следующего или время между двумя последовательными остановками маятника в крайних положениях ($s = +a$ и $s = -a$). Таким образом имеемъ

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Время весьма малых качаний маятника не зависит ни от величины размаха (качания и захоронны), ни от массы m , находящейся на его конце. Оно пропорционально квадратному корню из длины маятника и обратно пропорционально квадратному корню из ускорения силы тяжести (напряжения динамического поля).

Формула (31) лишь приближенная, как видно из нашего вывода. В аналитической механике выводится точное выражение для T ввидѣ бесконечнаго ряда

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right) \sin^4 \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right) \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\} \quad (32)$$

Для достаточно малых α можно ограничиться первыми двумя членами суммы и положить

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \quad (33)$$

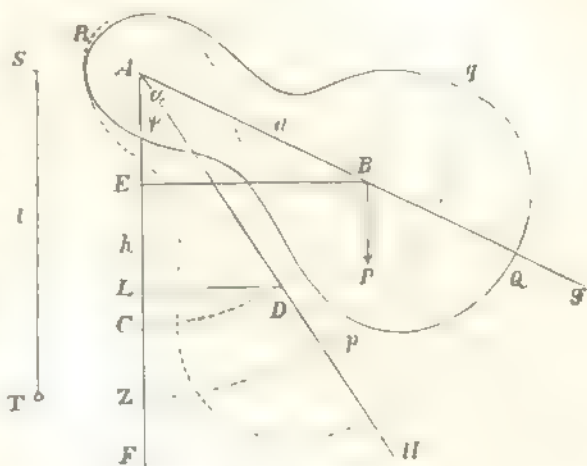
или, положивъ $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} = \frac{a}{2l}$,

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{16} \frac{a^2}{l^2} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

§ 6. Физическій маятникъ. Физическимъ маятникомъ называется тѣло BQ (рис. 116), могущее вращаться около горизонтальной оси, не проходящей черезъ его центръ тяжести. Положимъ, что эта ось перпендикулярна къ плоскости рисунка и проходитъ черезъ точку A . Когда маятникъ находится въ положении покоя (не изображенномъ на рисунокѣ), то его центръ тяжести C помѣщается на вертикальной прямой AF , проходящей

через ось вращения. Расстояніе центра тяжести отъ оси вращения обозначимъ черезъ $AB = AC = a$, массу маятника черезъ M , его вѣсъ черезъ $P = Mg$. Если отклонить маятникъ

Рис. 119.



на уголъ $FAG = \alpha$, причѣмъ центръ тяжести перейдетъ въ B и затѣмъ предоставить его самому себѣ, то онъ, при отсутствіи сопротивленія воздуха и тренія въ оси A , будетъ качаться съ постояннымъ въ обѣ стороны угловымъ размахомъ α . Опредѣлимъ его угловую скорость ω въ моментъ, когда отклоненіе равно $\varphi = \angle FAN$. Работа, произведенная силою тяжести P , приложенной къ центру тяжести, при измѣненіи отклоненія отъ α до φ , равна Pb , гдѣ $b = EL$ (прямая BE и $DL \perp$ къ AF), отсюда работа равна $Pa(\cos \varphi - \cos \alpha)$. Приобрѣтенная живая сила равна (стр. 90) $\frac{1}{2} K\omega^2$, гдѣ K моментъ инерціи маятника относительно оси вращения. Равенство $Pa(\cos \varphi - \cos \alpha) = \frac{1}{2} K\omega^2$ даетъ

$$\omega = \sqrt{\frac{2Pa(\cos \varphi - \cos \alpha)}{K}} \quad (35)$$

Въ моментъ прохожденія маятника черезъ положеніе равновѣсія ($\varphi = 0$) имѣемъ угловую скорость

$$\omega_1 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{Pa}{K}} \quad (36)$$

Приведенною длиною физическаго маятника называется длина $ST = l$ такого математическаго маятника, который имѣетъ одинаковое съ первымъ время качанія. Если маятникъ ST отклонить на уголъ $\alpha = \angle FAG$ и затѣмъ предоставить его самому себѣ, то для требуемаго равенства времени качанія двухъ маятниковъ необходимо, чтобы при равныхъ отклоненіяхъ α угловыя скорости маятниковъ физическаго (ω) и математическаго (ω_1) были равны между собою. Величина ω найдена, см. (35). Скорость v конца T математическаго маятника равна $v = V 2gl(\cos \varphi - \cos \alpha)$, см. (24). Но $v = l\omega_1$, см. (42), стр. 62, слѣд.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g(\cos \varphi - \cos \alpha)}{l}} \quad (37)$$

Равенство $\omega = \omega_1$ даст

$$l = \frac{K}{Ma} \dots \dots \dots (38)$$

Это весьма важная формула определяющая приведенную длину маятника. Отложим на прямой AF длину $AZ = l$. Точка Z называется центром качания физического маятника. Эта точка имеет очевидно следующее замечательное свойство: если бы исчезли все материальные точки физического маятника, исключая одной, находящейся в Z и образующей математический маятник AZ , то ее время качания осталось бы без изменения и таким же, каким оно было, когда точка Z входила в состав физического маятника. Все точки физического маятника, лежащие ближе к оси, чем Z , качаются медленнее, а точки, лежащие дальше — быстрее, чем они качались бы образы нижние концы математических маятников. Строго говоря, мы имеем не одну, но бесконечное множество точек Z : их геометрическое место есть часть поверхности цилиндра pq , ось которого A и радиус основания l . Если ограничиться точками, лежащими в вертикальной плоскости AP , проходящей через ось A , то их геометрическое место будет отрезок прямой, проходящей через Z и параллельной оси A .

Центр качания Z лежит ниже центра тяжести, т. е. всегда $l > a$. Действительно, пусть момент инерции тела относительно оси вращения A есть K_1 , равное K в (38) и пусть момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести C и параллельной оси A , есть K_2 . На стр. 209 мы указали, что $K_1 = K_2 + Ma^2$. Вставив это место K в (38), получаем

$$l = \frac{K_1}{Ma} = a + \frac{K_2}{Ma} \dots \dots \dots (39)$$

откуда и видно, что $l > a$.

Точка вращения A и центр качания Z обладают замечательным свойством сопряженности, т. е. способностью обмениваться ролями: если перевернуть маятник и через Z провести ось вращения (параллельно прежней оси A), то A становится центром качания, приведенная длина $l = AZ$, а следовательно и время качания останутся без изменения.

Для показательности обозначим расстояние центра качания от центра тяжести через $a_1 = CZ$ (рис. 120). Имеем $a = AZ = AC + l = a_1$, (39) даст

$$a_1 = \frac{K}{Ma_1} \dots \dots \dots (40)$$

Перевернем маятник в положение, изображенное на рис. 120, теперь ось вращения Z , центр тяжести C и $CZ = a_1$. Центр качания y находится на некотором расстоянии $Zy = x$; мы должны доказать, что $x = l$. Величину x мы получаем из (40), заменяя a через a_1 ,

$$x = a_1 + \frac{K_1}{Ma_1}.$$

Вставимъ сюда a , изъ (40); получаемъ

$$r = \frac{K}{Ma} - \frac{K Ma}{MK} - \frac{K}{Ma} + a.$$

или, см. (39), $r = l$, что и требовалось доказать.

Такъ какъ время качанія физическаго маятника равно времени качанія маятника математическаго, длина l котораго определяется формулою (38), то мы находимъ, на основанн (41), для времени T качанія физическаго маятника при весьма малыхъ размахахъ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \dots \dots (41)$$

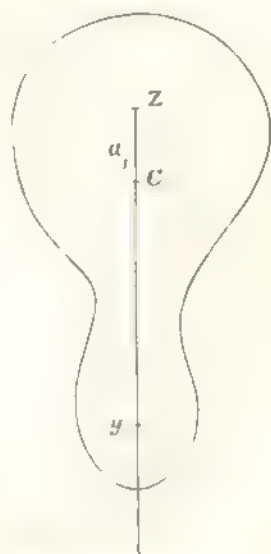
гдѣ вмѣсто Mg введенъ вѣсъ P маятника.

Выраженіе (42) даетъ намъ соответствующую точную формулу, а (33) приближенную

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{Pa} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \dots (42)$$

Когда маятникъ качается въ воздухѣ, онъ претерпѣваетъ треніе около его оси, то онъ совершаетъ затухающія колебательныя движенія, разсмотрѣнныя на стр. 156. Натуральный логарифмъ отношенія двухъ последовательныхъ размаховъ даетъ намъ логарифмическій декрементъ качанія маятника, см. 78, стр. 138. Постепенное уменьшеніе угла α увлекаетъ за собою и постепенное уменьшеніе времени колебанія, какъ видно изъ (42), гдѣ второй членъ въ скобкахъ, всегда положительный, что уменьшеніе времени колебанія, однако, весьма мало, когда начальный уголъ α не великъ и оно происходитъ весьма медленно, когда сопротивление воздуха и треніе малы, т.е. логарифмическій декрементъ малая величина.

Рис. 120.



ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Размѣръ физическихъ величинъ

§ 1. Опредѣленіе термина „размѣръ“. Въ предыдущихъ главахъ этого курса мы познакомились съ такъ называемыми абсолютными единицами, которыми физическія величины, о которыхъ упоминается въ механикѣ, выражены, что система единицъ строится на трехъ основныя единицы, за каковыя мы условились принимать единицы длины, массы и

мѣняется пропорціонально корню квадратному основной единицы длины L , пропорціонально степени $\frac{3}{2}$ единицы массы и обратно пропорціонально квадрату единицы времени. Если мы напр. сперва имѣли дѣло съ C.G.S. единицами, а потомъ начали принять за основныя единицы метръ, сантиметръ и минутъ, то производная единица во-первыхъ увеличится въ 10 разъ ($\sqrt{100}$), во-вторыхъ уменьшится въ 1000 разъ ($\frac{1}{\sqrt{100^3}}$) и въ третьихъ уменьшится въ 3600 разъ ($\frac{1}{60^2}$), т.-е. всего уменьшится въ 360000 разъ.

Если производная единица A вовсе не зависитъ отъ которой нибудь изъ основныя единицы то мы говоримъ, что единица A нулевого размѣра относительно этой основной единицы.

Символическия равенства, подобныя (1), называются формулами размѣра соответствующихъ физическихъ величинъ.

Въ тѣсной связи съ вышеуказаннымъ способомъ символическаго обозначения зависимости производной единицы отъ единицъ основныя находится особаго рода способъ писать численныя значенія самихъ величинъ. Положимъ, что некоторая величина a содержитъ въ себѣ n единицъ, напр. 7. Если мы просто написали $a = 7$, то осталось бы неяснымъ, какихъ единицъ содержитъ 7 въ величинѣ a , которую можно измѣрять безчисленнымъ множествомъ различныхъ несоотвѣстныхъ единицъ. Такъ какъ производная единица вполнѣ определяется основными единицами, то неясность исчезаетъ, если мы, рядомъ съ численнымъ значеніемъ величины, хотя бы въ скобкахъ, напишемъ названія тѣхъ трехъ основныя единицъ, на которыхъ основана принятая нами система единицъ. Напр. выраженіе

$$a = 7 \text{ (футъ, килогр., мин.)} \dots \dots \dots (3)$$

состоитъ изъ того, что въ величинѣ a содержится 7 такихъ-ся единицъ, которыя вытекаютъ изъ основныя единицы длины, массы и времени, указанныхъ въ скобкахъ. Если напр. некоторая работа $r = 10$ (сант., граммъ, сек.) единицами, то это значитъ, что $r = 10$ эрговъ.

Оказывается однако въ высшей степени неудобнымъ писать названія основныя единицъ не просто рядомъ въ скобкахъ, но въ томъ порядкѣ, какъ съ тѣми показателями, съ которыми эти единицы входятъ въ формулу размѣра единицы той величины, численное значеніе которой мы желаемъ написать. Полагая напр. что формула размѣра единицы A имѣетъ видъ (2), мы вмѣсто (3) напишемъ

$$a = 7 \frac{(\text{футъ})^{\frac{1}{2}} (\text{килогр.})^{\frac{3}{2}}}{(\text{мин})} \dots \dots \dots (4)$$

Такой способъ писанія очень удобенъ, мы не только видимъ, на какихъ основныя единицахъ была построена принятая нами система, но и потомъ еще отмѣчаемъ, какъ зависятъ единица величины a отъ единицъ основныя. Главная выгода такого метода писанія вынесится ниже въ § 3.

§ 2. Определе́ніе размѣра единицъ различныхъ величинъ. При выводѣ формулы размѣра мы воспользуемся слѣдующею простою теоремою:

Если численное значеніе a одной величины равно произведенію или частному численныхъ значеній b и c двухъ другихъ величинъ, т.-е. если

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} a &= bc \\ a &= \frac{b}{c} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

и если формулы размѣра единицъ B и C величинъ b и c суть

$$\left. \begin{aligned} [B] &= M^p L^q T^r \\ [C] &= M^x L^y T^z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

то формула размѣра единицы A величины a будетъ

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} [A] &= M^{p+x} L^{q+y} T^{r+z} \\ [A] &= M^{p-x} L^{q-y} T^{r-z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

т.-е. символическая формула размѣра величины A составляется изъ символическихъ формулъ размѣровъ величинъ B и C такъ, какъ составляется произведение или частное двухъ одночленовъ, выражающихъ размѣры единицъ B и C .

Доказательство: если $a = bc$ или $a = \frac{b}{c}$, то $a = 1$, когда $b = 1$ и $c = 1$; отсюда ясно, что единица A пропорциональна B и прямо или обратно пропорциональна C . Но B мѣняется пропорционально p -той степени отъ основной единицы M , а C пропорционально x -той степени той же единицы M . Отсюда ясно, что при $a = bc$ единица A мѣняется пропорционально $(p+x)$ -той, при $a = \frac{b}{c}$ — пропорционально $(p-x)$ -той степени единицы M , что и выражено символически формулами (7).

Доказанная теорема, очевидно, обобщается для произвольнаго случая $a = b^u c^m$. Символически будемъ имѣть

$$[A] = [B]^u [C]^m \dots \dots \dots (7a)$$

Теперь легко составить формулы размѣра для различныхъ единицъ.

Единица S поверхности пропорциональна квадрату, единица O объема — кубу единицы длины. Отсюда слѣдуетъ

$$\left. \begin{aligned} [S] &= L^2 \\ [O] &= L^3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Объ единицы нулевого размѣра относительно M и T .

Уголъ измѣряется отношеніемъ дуги s къ радиусу r ; его единица (уголъ, для котораго $s = r$, т.-е. уголь въ $57^\circ 17' 44.8''$, стр. 36) вовсе не зависитъ

отъ выбора основнѣхъ единицъ. Уголъ нулевого размѣра относительно M , L и T .

Скорость v измѣряется отношеніемъ пути къ времени; отсюда уже слѣдуетъ, на основаніи (7), что

$$[V] = \frac{L}{T} = LT^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Ясно, что единица скорости (та, при которой въ единицу времени проходитъ единица длины) должна быть пропорциональна единицѣ длины и обратно пропорциональна единицѣ времени. Соответственно (4) имеемъ, напр.,

$$v = 1 \frac{\text{саж.}}{\text{мин.}} \quad \text{или} \quad v = 15 \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Ускореніе u тангенціальное и нормальное. И то, и другое выражается отношеніемъ скорости къ времени, а потому размѣръ единицы ускоренія

$$[W] = \frac{[V]}{T} = \frac{L}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Для нормальнаго ускоренія мы имѣли еще выраженіе $u = \frac{v^2}{R}$ (стр. 58), гдѣ R линейная величина. Это даетъ

$$[W] = \frac{[V]^2}{L} = \frac{L^2}{T^2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{L}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11a)$$

согласно съ (11). Мы находимъ, что абсолютная единица ускоренія пропорциональна единицѣ длины и обратно пропорциональна квадрату единицы времени. Не трудно сообразить, что действительно напр. (метръ, сек.)-единица ускоренія въ 3600 разъ больше (метръ, мин.)-единицы ускоренія. Первая единица соответствуетъ движенію, при которомъ въ 1 сек. скорость увеличивается на «метръ въ секунду», вторая — когда въ 1 мин. скорость увеличивается только на «метръ въ минуту». Численные значенія различныхъ ускореній напишутся напр. такъ:

$$u = 1 \frac{\text{саж.}}{(\text{час.})^2}, \quad u = 15 \frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Второе ускореніе выражено въ $C.G.S.$ единицахъ. Для g имѣемъ

$$g = 981 \frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Сила $f = mu$. Отсюда размѣръ единицы силы

$$[F] = M[W] = \frac{ML}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Понятно, какое значение имѣютъ равенства

$$\left. \begin{aligned} f &= 8 \frac{\text{фунт. метр}}{(\text{инч.})^2} \\ f &= 75 \frac{\text{грамм. саят.}}{(\text{сек.})^2} = 75 \text{ динам.} \end{aligned} \right\} \dots \dots (15)$$

Здѣсь будетъ уместнымъ вставить два весьма важныхъ замѣчанія.

I. Слѣдуетъ до крайности остерегаться смотрѣть на символы, стоящіе въ выраженіяхъ, подобныхъ (10), (12) и (15), какъ на действительныя величины, состоящи изъ множителей и дѣлителей. Это большая, но изъ сожалѣнія весьма распространенная ошибка. То, что написано рядомъ съ численнымъ значеніемъ величины, представляетъ именно символъ и ничего больше, символъ, долженствующій замѣнить названіе единицы, какъ это особенно налицо видно изъ второго примѣра (15).

II. Въ члены равенства, т.-е. въ величины, которыя связаны знаками сложенія, вычитанія и равенства должны быть одного размѣра. Дѣйствительно, только однородныя величины могутъ быть сравниваемы между собою, а таковыя, понятно, должны быть одинаковаго размѣра. Въ этомъ зак. почастѣе удобное средство проверки формулъ.

Приведемъ примѣръ. Для времени t колебанія маятника мы имѣли формулу $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Обѣ стороны должны быть одного размѣра; лѣвая сторона имѣетъ размѣръ T , съ правой стороны размѣръ l есть L , размѣръ g есть $\frac{L}{T^2}$, см. (11); π , какъ абсолютное число, нулевого размѣра.

Вся правая сторона размѣра

$$\sqrt{\frac{L}{\frac{L}{T^2}}} = \sqrt{T^2} = T.$$

т.-е. такого же, какъ и лѣвая.

Если двѣ величины a и b , различныя по первоначальному опредѣленію, на основаніи какихъ-либо выводовъ оказываются численно равными, если ту и другую измѣрить въ абсолютныхъ единицахъ, такъ что $a = b$ то размѣры этихъ величинъ должны быть равны, т.-е. зависимость ихъ единицъ A и B отъ основныхъ единицъ L , M и T должна быть одинаковая. Равенство $a = b$ должно оставаться вѣрнымъ, какими бы абсолютными единицами A и B мы ихъ ни измѣряли, т.-е. каковы бы ни были основныя единицы L , M и T . Еслибы размѣры единицъ A и B не были равны, то они съ измѣненіемъ L , M и T мѣнялись бы неодинаково, а потому и численныя значенія a и b перестали бы быть равными. На основаніи формулъ (20) стр. 74 и (9) стр. 91 мы должны слѣд. ожидать, что имѣлись силы и количество движенія, живая сила и работа оказались одинаковыхъ размѣровъ.

Равенство размѣровъ величинъ $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\sigma}{l}$, которыми въ различныхъ слу-

чаяхъ выражается одна и та же величина, а именно ускореніе, см. (11) и (11,а), подтверждаетъ сказанное.

Продолжаемъ выводъ размѣровъ различныхъ величинъ.

Работа $r = fs$, гдѣ f есть сила и s — путь; слѣд. размѣръ единицы работы

$$[R] = [F]L = \frac{ML}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Понятно, что обозначаетъ

$$r = 2 \frac{\text{килогр. (аршинъ)}^2}{(\text{часъ})^2}$$

или

$$r = 8 \frac{\text{граммъ. (саят.)}^2}{(\text{сек.})^2} = 8 \text{ эргамъ.}$$

Живая сила $i = \frac{1}{2} mv^2$; размѣръ ея единицы J

$$[J] = M[V]^2 = \frac{ML^2}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16,а)$$

т.е. онъ равенъ размѣру работы, какъ мы только-что и предвидѣли. Такого же размѣра и всякая другая форма энергій, напр. теплота q :

$$[Q] = \frac{MJ}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16,б)$$

Импульсъ силы $u = ft$, а потому

$$[U] = [F]T = \frac{ML}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Количество движенія $h = mv$; слѣд.

$$[H] = M[V] = \frac{ML}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17,а)$$

одинаково съ (17), какъ мы и ожидали.

Моментъ пары силъ $m' = fl$, гдѣ l плечо пары; очевидно

$$[M'] = \frac{ML}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Размѣръ тотъ же, какъ и размѣръ работы. Такъ и должно быть на основаніи (8) стр. 93, ибо уголъ нулевого размѣра.

Плотность $\rho = \frac{m}{o}$, гдѣ o объемъ; слѣд.

$$[D] = \frac{M}{L^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Угловая скорость $\varphi = \frac{\alpha}{t}$, гдѣ α уголъ поворота тѣла; отсюда

$$[\Phi] = \frac{1}{T} = T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Угловое ускореніе $\psi = \frac{\ddot{\varphi}}{t}$, слѣд.

$$[\psi] = \frac{1}{T^2} = T^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Моментъ инерціи $k = mL^2$; слѣд.

$$[K] = ML^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Время качанія физическаго маятника равно $t = \pi \sqrt{\frac{k}{Pa}}$ размѣръ k только что найденъ. P есть сила, см. (14), a есть длина. Размѣръ правой стороны

$$\sqrt{\frac{ML^2}{T^2 \cdot L}} = T.$$

какъ и должно быть.

Если законъ всемирнаго тяготѣнія написать въ видѣ

$$f = C \frac{mm'}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

и силу f измѣрять въ абсолютныхъ единицахъ, то численное значеніе коэффициента C будетъ зависетьъ отъ основныяъ единицъ, а потому можно говорить о размѣрѣ величины C .

Формула (23) даетъ

$$[F] = [C] \frac{M^2}{L^2};$$

14) даетъ

$$[C] = \frac{L^2}{M^2} = M^{-2} L^2 T^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Если же писать законъ Ньютона, полагая $C=1$, то сила, которую теперь для отличія обозначимъ черезъ f , будетъ равна

$$f = \frac{mm'}{r^2}.$$

Астрономическая единица силы F' размѣра

$$[F'] = \frac{M^2}{L^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Принимая для работы r' выраженіе $f'z$, гдѣ z линейная величина, получаемъ для размѣра астрономической единицы R'

$$[R'] = \frac{M^2}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Какъ и слѣдуетъ, потенциалъ двухъ массъ другъ на друга того же самаго размѣра, см. (9a) и (10) стр. 197.

§ 3. Переходъ отъ одной системы единицъ къ другой. Задача о переходѣ отъ одной системы къ другой заключается въ слѣдующемъ: имѣется некоторая физическая величина, которую мы символически обозначимъ буквою a и пусть n ея численное значеніе, когда она измѣрена абсолютной единицею, построенною на основныхъ единицахъ λ, μ, τ ; требуется найти численное значеніе n_1 той же величины a , измѣренной абсолютной единицею, которая построена на другихъ основныхъ единицахъ λ_1, μ_1, τ_1 . Дана зависимость между старыми и новыми основными единицами и пусть $\lambda = x\lambda_1, \mu = y\mu_1, \tau = z\tau_1$; дагѣ извѣстенъ размѣръ единицы A величины a ; пусть

$$[A] = L^p M^q T^r \dots \dots \dots (27)$$

Для рѣшенія этой задачи, т. е. для опредѣленія величины n_1 , должно пользоваться слѣдующими тремя манипуляціями:

1. Написать величину a по извѣстной схемѣ см. (4), съ символомъ, составленнымъ изъ старыхъ основныхъ единицъ, см. (27):

$$a = n \lambda^p \mu^q \tau^r \dots \dots \dots (28)$$

2. Въ символахъ старыхъ основныхъ единицъ выразить въ новыхъ:

$$a = n (x\lambda_1)^p (y\mu_1)^q (z\tau_1)^r \dots \dots \dots (29)$$

3. Временно смотрѣть на символъ не какъ на символъ, но какъ на сочетание множителей и вынести изъ него коэффициенты, связывающіе старыя основныя единицы съ новыми:

$$a = n x^p y^q z^r \cdot \lambda_1^p \mu_1^q \tau_1^r \dots \dots \dots (30)$$

Рѣшеніе задачи этимъ кончено, ибо искомое новое численное значеніе n_1 и есть

$$n_1 = n x^p y^q z^r \dots \dots \dots (31)$$

Рядомъ стоящее $\lambda_1^p \mu_1^q \tau_1^r$ опять только символъ абсолютной единицы величины a въ новой системѣ.

Такой странный способъ, повидимому, противорѣчающій тому, что на стр. 224 I было сказано о символахъ, можетъ быть допущенъ, если мы докажемъ разъ навсегда, что онъ ведетъ къ вѣрному результату. Для этого вполне достаточно показать, что отъ замѣны единицы длины λ новою единицею λ_1 численное значеніе n увеличивается въ x^p разъ (гдѣ p можетъ быть и отрицательное). Мы положили $\lambda = x\lambda_1$, слѣд. мы уменьшили единицу длины въ x разъ; (27) показываетъ, что вслѣдствіе этого единица A величины a уменьшается въ x^p разъ, отсюда ясно, что численное значеніе величины a увеличилось въ x^p разъ. Итакъ формула (31), полученная путемъ прихвѣненія вышеуказанныхъ трехъ манипуляцій, несомнѣнно вѣрна.

Станиславъ

Примѣръ: Нѣкоторая работа r имѣетъ въ системѣ (пудъ, сажень-минута) численное значение 100; какое будетъ ея численное значение въ системѣ (фунтъ, аршинъ, секунда)? Имѣемъ формулу размѣра, см. (16)

$$[R] = \frac{ML^2}{T^2}$$

Производимъ три манипуляции, указанные выше:

$$\begin{aligned} 1. \quad r &= 100 \frac{\text{пудъ (сажень)}^2}{(\text{мин})^2} \\ 2. \quad r &= 100 \frac{(40 \text{ фунт}) (3 \text{ аршин})^2}{(60 \text{ сек.})^2} \\ 3. \quad r &= \frac{100 \cdot 40 \cdot 9}{3600} \frac{(\text{фунтъ}) (\text{аршинъ})^2}{(\text{сек.})^2} \end{aligned}$$

или, сокративъ,

$$r = 10 \frac{\text{фунтъ} \cdot (\text{аршинъ})^2}{(\text{сек.})^2}.$$

Искомое новое численное значение работы будетъ 10. Надо бы имѣть надобности такъ строго отдѣлять другъ отъ друга три манипуляции. Рѣшимъ еще нѣсколько задачъ.

I. Найти численное значение ускорения g силы тяжести въ системѣ (фунтъ, фунтъ, минута), полагая сантиметръ = 0,0328 фута.

$$g = 980 \frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2} = 980 \frac{0,0328 \text{ фута}}{\left(\frac{1}{60} \text{ мин.}\right)^2} = 980 \times 0,0328 \times 3600 \frac{\text{фунтъ}}{(\text{мин.})^2},$$

или

$$g = 115718 \frac{\text{фунтъ}}{(\text{мин.})^2}.$$

II. Сколько *C. G. S.* единицъ ускорения, силы и работы содержатся въ соответствующихъ Гауссовыхъ единицахъ, въ которыхъ основныя единицы суть миллиметръ, миллиграммъ и секунда?

$$\text{Гаусс. ед. ускорения} = 1 \frac{\text{мм.}}{(\text{сек.})^2} = 1 \frac{0,1 \text{ сант.}}{(\text{сек.})^2} = 0,1 \frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2} = 0,1 \text{ C. G. S. ед. ускорения.}$$

$$\begin{aligned} \text{Гаусс. ед. силы} &= 1 \frac{\text{мм.} \cdot \text{мм.}}{(\text{сек.})^2} = 1 \frac{(0,1 \text{ сант.}) (0,001 \text{ гр.})}{(\text{сек.})^2} = 0,0001 \frac{\text{сант. граммъ}}{(\text{сек.})^2} \\ &= 0,0001 \text{ дина.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Гауссов. ед. работы} &= 1 \frac{\text{мм.} \cdot \text{гр.} \cdot (\text{мм.})^2}{(\text{сек.})^2} = 1 \frac{(0,001 \text{ гр.}) (0,1 \text{ сант.})^2}{(\text{сек.})^2} = \\ &= 0,00001 \frac{\text{граммъ (сант.)}^2}{(\text{сек.})^2} = 0,00001 \text{ эрга.} \end{aligned}$$

III. 2 (метръ, килограммъ, $\frac{1}{2}$ часа) единицы работы выразить въ эргахъ.

$$\begin{aligned} 2 \frac{\text{килогр. (метръ)}^2}{\left(\frac{1}{2} \text{ часа}\right)^2} &= 2 \frac{(1000 \text{ гр.}) (100 \text{ сант.})^2}{(1800 \text{ сек.})^2} = \frac{2 \cdot 1000 (100)^2}{(1800)^2} \frac{\text{граммъ (сант.)}^2}{(\text{сек.})^2} = \\ &= 6,17 \frac{\text{граммъ (сант.)}^2}{(\text{сек.})^2} = 6,17 \text{ эрга.} \end{aligned}$$

IV. Найти плотность ртути въ системѣ (метръ, килограммъ, годъ). За плотность ртути примемъ число 13,6: это ея значеніе въ *C. G. S.* системѣ (стр. 78), см. (19).

$$13,6 \frac{\text{граммъ}}{(\text{саят.})^3} = 13,6 \frac{0,001 \text{ килгр.}}{(0,01 \text{ метр.})^3} = 13,6 \frac{0,001 \text{ килгр.}}{(0,01)^3 (\text{метр.})^3} = 13600 \frac{\text{килгр.}}{(\text{метр.})^3}.$$

V. Найти живую силу въ *C. G. S.* единицахъ тѣла, масса котораго равна 5-ти золотникамъ и которое движется со скоростью 2-хъ сажень въ 7 минутъ (золотникъ = 4,266 грамма, сажень = 213,36 сантим.).

Если принять за основныя единицы 2 сажени, 5 золотниковъ и 7 минутъ, то живая сила данного тѣла будетъ имѣть численное значеніе $\frac{1}{2}$ (стр. 89), см. (16,а).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{(5 \text{ золотн.})(2 \text{ саж.})^2}{(7 \text{ мин.})^2} &= \frac{1}{2} \frac{(5 \cdot 4,266 \text{ грамм.})(2 \cdot 213,36 \text{ сантим.})^2}{(7 \cdot 60 \text{ сек.})^2} = \\ &= \frac{5 \cdot 4,266 \cdot 4 \cdot (213,36)^2}{2 \cdot 49 \cdot 3600} \frac{\text{граммъ} (\text{саят.})^2}{(\text{сек.})^2} = 11,04 \text{ эрга.} \end{aligned}$$

VI. Метадинамъ имѣеть численное значеніе 100 въ системѣ (двоймъ, фунтъ, x сек.). Найти единицу времени въ этой системѣ, принимая двоймъ = 2,5 сантим. и фунтъ = 410 гр. Метадинамъ равенъ 10^6 динамъ, слѣд. по заданію имѣемъ

$$\begin{aligned} 10^6 \frac{\text{саят. граммъ}}{(\text{сек.})^2} &= 100 \frac{\text{двоймъ фунтъ}}{(x \text{ сек.})^2} = 100 \frac{(2,5 \text{ саят.})(410 \text{ грамм.})}{(x \text{ сек.})^2} = \\ &= \frac{100 \cdot 2,5 \cdot 410}{x^2} \frac{\text{саят. граммъ}}{(\text{сек.})^2}. \end{aligned}$$

Первое и послѣднее выраженіе даютъ

$$10^6 = \frac{100 \cdot 2,5 \cdot 410}{x^2};$$

отсюда $x = 0,42$: искомаѣ единица времени равна 0,42 сек.

§ 4. Абсолютныя системы единицъ, построенныя не на основныхъ единицахъ L , M и T . Указавъ, что систему абсолютныхъ единицъ можно построить на трехъ произвольно выбранныхъ основныхъ единицахъ, мы за таковыя постоянно принимали единицы длины (L), массы (M) и времени (T). Но можно было бы и единицы другихъ трехъ величинъ принять за основныя. Мы рассмотримъ вкратцѣ эту возможность, тѣмъ болѣе, что въ послѣднее время неоднократно стали пользоваться различными системами единицъ не построенными на единицахъ L , M и T .

Выборъ трехъ основныхъ единицъ не можетъ быть сдѣланъ вполне произвольно: эти три единицы должны быть независимы другъ отъ друга, т.е. одна изъ нихъ не должна опредѣляться двумя другими на основаніи какой-либо изъ формулъ, въ которыхъ коэффициентъ

пропорциональности приравнивается единице, когда строится система единиц. Такъ напр. единица массы, ускорения и силы, или длины, силы и работы, или времени, скорости и ускорения и т. д. не могутъ быть приняты за основныя, ибо во всякъ этихъ примѣрахъ одна изъ единицъ (проче всего третья) определяется двумя остальными. Когда выбраны три основныя единицы, то прежде всего слѣдуетъ определить размѣры единицъ длины, массы и времени, которые теперь уже являются единицами производными, а затѣмъ уже размѣры остальныхъ единицъ легко определяется на основаніи формулъ § 2-го.

Приравнивая къ пропорциональности, которыя выражаются формулами размѣровъ, легко сообразить, что для выполнения только-что сказаннаго слѣдуетъ рѣшать эти формулы какъ простые уравненія. Это будетъ еще болѣе понятно на примѣрѣ.

За основныя единицы приняты единицы скорости V , ускоренія W и силы F . Требуется найти размѣры данныхъ единицъ. Мы имѣли формулы

$$[V] = LT^{-1}; [W] = LT^{-2}; [F] = MLT^{-2}.$$

Теперь V , W и F основныя, L , M и T производныя единицы, а потому тѣже пропорциональности, которыя существуютъ между этими шестью величинами дадутъ намъ теперь

$$[L][V]^{-1} = W; [L][V]^{-2} = W; [M][L][T]^{-2} = F.$$

Рѣшая эти равенства какъ уравненія, относительно $[L]$, $[M]$ и $[T]$ получаемъ

$$\left. \begin{aligned} [L] &= VW^{-1} \\ [M] &= FW^{-1} \\ [T] &= VW^{-1} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Далѣе получаемъ для размѣровъ единицъ

работы	$[R] = VFW^{-1}$
поверхности	$[S] = V^2W^{-1}$
объема	$[O] = V^3W^{-3}$
углового ускоренія	$[\Psi] = V^{-2}W^2$
количества движенія	$[H] = [L] - VFW^{-1}$
импульса силы	$[U] = VFW^{-1}$
плотности	$[D] = FV^{-6}W^2$
момента инерціи	$[K] = FV^4W^{-4}$

Предоставимъ читателю проверить нижеслѣдующія формулы и вывести

недостающих за основные единицы приняты единицы силы F , работы R и плотности D . Получается

$$[L] = RF^{-1}$$

$$[M] = DR^3F^{-3}$$

$$[T] = D^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}F^{-\frac{5}{2}}$$

$$[W] = D^{-1}R^{-3}F^4$$

$$[H] = D^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}F^{-\frac{3}{2}}$$

и т. д.

ЛИТЕРАТУРА.

Механика составляет особый предмет преподавания въ высшихъ учебныхъ заведенияхъ, разпадаясь на механику теоретическую и механику практическую, съ ихъ многообразными подраздѣленіями. Здѣсь не мѣсто указывать на литературу этихъ самостоятельныхъ и обширныхъ наукъ. Изъ сочиненій, посвященныхъ специально элементарной механикѣ, примѣрно въ томъ объемѣ, въ которомъ она должна входить въ курсъ физики, можно указать слѣдующіе:

П. П. Фанг-дери-Фанг. Введеніе въ механику. Спб. 1889.

Н. Шиллеръ. Основы физики. Ч. I. Кіевъ. 1884.

П. Аббадси. Начала механики. Спб. 1892.

О. Хвольсонъ. Ученіе о движеніи и о силахъ. Спб. 1893.

W. Voigt. Elementare Mechanik. Leipzig. 1889.

J. G. Macmillan. Elementary treatise on kinematics and dynamics. London. 1887.

Antomari. Cours de mécanique. 1895.

H. Klein. Die Principien der Mechanik. Leipzig. 1872.

H. Strömte. Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig. 1883.

(I. Maxwell. Matter and Motion (съ рускомъ переводѣ «Матерія и движеніе»).

Mach. Die Mechanik. Leipzig. 1889.

КЪ ГЛАВѢ III (РАБОТА И ЭНЕРГІЯ).

Въ ученіи о теплотѣ будетъ приведена литература по вопросамъ о теплотѣ, какъ о формѣ энергіи. Здѣсь указана литература относящаяся вообще къ ученію объ энергіи.

Rob. Mayer. Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. Ann. d. Chemie & Pharm. 1842. Bd. 42. p. 323; перепечатано въ его «Mechanik der Wärme».

H. Helmholtz. Die Erhaltung der Kraft. Berl. 1847. Wiss. Abhandl. I, p. 12; Ostwald's Klassiker. № 1.

M. Planck. Erhaltung der Energie. Leipzig. 1887.

B. Stewart. Conservation of Energy. Нѣмецкій переводъ: *Erhaltung der Energie.* Leipzig, 1875.

Januschke. Erhaltung der Energie. Troppau, 1884.

Г. Кребсъ. Сохраненіе энергии (перев. съ нѣмецкаго). Кіевъ, 1880.

R. Colson. L'énergie et ses transformations. Paris, 1889.

M. Zwerger. Die lebendige Kraft und ihr Maass. Munchen, 1885.

G. Helm. Die Lehre von der Energie. Leipzig, 1887.

E. Mach. Die Geschichte des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag, 1872.

A. Секки. Единство физическихъ силъ (перев. съ итальян.). Спб., 1872.

КЪ ГЛАВѢ IV (ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ).

Статьи, въ которыхъ разсматриваются свойства гармоническихъ колебательныхъ движеній и образование и распространеніе лучей, помѣщены въ книгахъ, посвященныхъ учениямъ о звукѣ и о свѣтѣ.

Интерференція колебаній и лучей:

Thomas Young. Philosoph. Transactions, 1802, p. 12 и p. 393. (On the theory of light and colours).

Fresnel. Oeuvres compl. I. p. 32, 51 и др.

Принципъ Гюйгенса:

Huygens. Traite de la lumiere. Leyden, 1690. Ostwald's Classiker. № 20.

Fresnel. Oeuvres. I. p. 365.

Принципъ Доплера:

Doppler. Ueber das farbige Licht der Doppelsterne. Prag, 1842.

Дальнѣйшая литература въ Т. III.

КЪ ГЛАВѢ IX (РАЗМѢРЪ ФИЗИЧ. ВЕЛИЧИНЪ И УЧЕНЕ ОБЪ ЕДИНИЦАХЪ).

D. Everett. Units and physical constants. London, 1879.

D. Everett's Единицы и физ. постоянныя (перев.). Спб., 1888.

О. Хвольсонъ. Объ абсолютныхъ единицахъ. Спб., 1887.

Schoontjes. Les grandeurs electriques et leurs unités. Paris, 1884.

H. Hewig. Physicahsche Begriffe und absolute Maasse. Leipzig, 1880.

Blavier. Les grandeurs electriques. Paris, 1881.

Serpieri. (Перев. съ итальянск.) Die absoluten Maasse. Leipzig, 1885.

A. Czöglyer. Dimensionen und absolute Maasse. Leipzig, 1889.

О. Хвольсонъ. О метрической системѣ мѣръ и вѣсовъ. Спб., 1884.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

НѢКОТОРЫЕ ИЗМѢРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И СПОСОБЫ ИЗМѢРЕНІЯ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Общая замѣчанія о производствѣ физическихъ измѣреній.

§ 1. Измѣренія абсолютныя и относительныя. Мы видѣли (стр. 3), что наблюдение и опытъ даютъ намъ возможность расширить наши познанія о происходящихъ въ природѣ явленіяхъ. Они ведутъ къ открытію новыхъ явленій, къ подробному ихъ изученію и къ выясненію закономерныхъ связей, господствующихъ между ними. Задача для разрѣшенія которой мы производимъ наблюдение или опытъ, такимъ образомъ, двойная: она можетъ касаться или качественной, или количественной стороны явленія. Чисто качественныя наблюденія и опыты производятся обыкновенно весьма рѣдко и почти всегда къ нимъ болѣе или менѣе тѣсно присоединяется изслѣдованіе количественное, имѣющее напр. цѣлью выяснитъ ближайшія условія, при которыхъ возникаетъ или обнаруживается замѣченная качественная сторона явленія, или тѣ данныя, которыми эта качественная сторона точнѣе опредѣляется. Закономерныя связи, какъ было замечено въ § 7, стр. 16, открываются изученіемъ количественной стороны явленій, путемъ измѣренія разнаго рода величинъ, играющихъ роль въ условіяхъ возникновенія или въ ближайшей характеристикѣ различныхъ сторонъ явленія.

Измѣренія различныхъ величинъ играютъ такимъ образомъ, наиболѣе важную роль при физическихъ изысканіяхъ и способами этихъ измѣреній посвящены многочисленныя спеціальныя сочиненія, къ которымъ и слѣдуетъ обратиться лицамъ, впервые приступающимъ къ точнымъ физическимъ измѣреніямъ, требующимъ не только знанія, но и умѣнья. По-

даже одновременное измерение какой-либо величины двумя методами, из которых один дает ей численное значение b в единицах определенных и известных, а другой ей же численное значение a в единицах произвольных. Разд. коэффициент приведения f определяется на основании формулы (1) мы можем уже далее, пользуясь той же формулой, постоянно «приводить» результаты измерения, дающих числа a , к «абсолютной» мѣрѣ b . Определение коэффициента f должно быть повторено отъ времени до времени такъ какъ несомнѣнно измерения въ приборѣ въ его установкѣ или во вѣстныхъ вліяніяхъ могутъ имѣть слѣдствіемъ измѣненіе той произвольной единицы, къ которой приборъ даетъ численное значеніе a . Это особенно усложняется, когда эта единица зависитъ отъ вѣстныхъ причинъ, напр. отъ температуры.

2. Относительное измереніе сводится къ простому определенію отношенія двухъ величинъ x и y , изъ которыхъ одну, напр. x , можно разсматривать какъ играющую роль «произвольной единицы». Если возможно произвести абсолютное измереніе величины x и если мы уверены, что эта величина не измѣняется въ промежутокъ времени между этимъ измереніемъ и ея сравненіемъ съ величиною y , то и для этой послѣдней получается мѣра абсолютная.

3. Къ разряду относительныхъ измереній можно причислить измеренія разрядныхъ, при производствѣ которыхъ определяется не сама величина, но лишь ея измѣненіе въ зависимости отъ времени, температуры или другихъ факторовъ, отъ которыхъ она зависитъ. Если выходящими измерения сопровождаются отъ времени до времени измерениями абсолютными то и для этихъ промежуточныхъ моментовъ, когда они и определены разрядъ величинъ, становится извѣстнымъ ея абсолютная мѣра.

§ 2. Эталоны и измерительные приборы. Тѣло, для котораго одна изъ физическихъ величинъ, характеризующихъ его, извѣстна со всюю достижимое точностью, называется эталономъ этой величины если оно можетъ служить для ея сравненія съ другими величинами того же рода. Такъ напр. стержень, длина котораго въ метрахъ съ точностью извѣстна, или проволока электрическое сопротивленіе которой въ единицахъ сопротивленія (омахъ) определено со всею возможною тщательностью могутъ соответственно служить эталонами при измереніи длины или сопротивленія какого-либо другого тѣла. Обыкновенно стараются, чтобы величина эталона по возможности ближе подходила или къ единицѣ, или къ простому ея кратному или поделенію. Такъ, эталонъ длины обыкновенно имѣетъ длину равную цѣлой единицѣ длины или ея кратному или простому ея части (напр. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$) эталонъ сопротивленія обыкновенно составляетъ сопротивленіемъ, равнымъ цѣлой единицѣ сопротивленія или простому ея части и т. д.

Для производства измереній служатъ особые инструменты весьма разнообразныя, смотря по первичнымъ по роду величины, для измерения которой они должны служить. Изъ которыхъ по специальному методу измерения вѣсѣшникъ, въ третьихъ по тѣмъ мастерскимъ, въ которыхъ они строятся

и которые вводить въ нихъ различныя особенности, касающіяся деталей конструкции, расположенія частей и т. д. Съ теченіемъ времени въ нихъ вводится «улучшенія», но всегда впрочемъ, заслуживающія этого названія.

Измерительные приборы естественно дѣлятся на группы, соответствующія различнымъ измеряемымъ величинамъ.

Смотря по роду измерения, для котораго они назначены, отличаютъ и приборы «абсолютные», «относительные» и «вариационные».

Относительно названія измерительныхъ приборовъ замѣтимъ, что многія оканчиваются однимъ изъ словъ «скопъ», «метръ» и «графъ».

Инструменты, названія которыхъ оканчиваются словомъ «скопъ», строго говоря, могутъ и не быть отнесены къ измерительнымъ приборамъ, хотя они иногда играютъ важную роль при производствѣ измереній, особенно по «нулевому методу», о которомъ будетъ сказано ниже. Эти приборы не даютъ возможности непосредственно измерить какую либо величину, они только показываютъ, какого знака данная величина, а также равна или не равна эта величина нулю, точнѣе говоря, превышаетъ ли она нѣкоторое минимальное значеніе, которое еще обнаруживается «скопомъ» (спектроскопъ, гальваноскопъ). Сюда же относятся приборы, служащіе только для разсматриванія чего-либо или нѣкакого отношенія къ измеряемъ, не имѣютъ (микроскопъ, телескопъ, отдѣльно взятый) или, какъ части, входятъ въ составъ измерительныхъ приборовъ.

Приборы «метра» суть измерительные приборы, служащіе для болѣе или менѣе непосредственнаго опредѣленія числового значенія измеряемой величины (спектрометръ, барометръ, спектрометръ, гальванометръ, пирометръ, калориметръ и т. д.).

Приборы, названія которыхъ оканчиваются словомъ «графъ», составляютъ особую группу «самонизирующихъ» приборовъ непрерывно или черезъ опредѣленные, обыкновенно частію равныя промежутки времени отмѣчающе мѣру той или другой величины. Большинство этихъ приборовъ (не исключая) суть приборы вариационные — они отмѣчаютъ, насколько данная величина измѣнилась съ теченіемъ времени сравнительно съ ея значеніемъ въ нѣкоторый начальный моментъ (барографъ, манометръ, термографъ и т. д.). Но напр., анемографъ, непосредственно отмѣчающій азимутъ направленія и силу (скорость) вѣтра, очевидно уже не принадлежитъ къ приборамъ вариационнымъ.

§ 3. Манипуляціи при измеренияхъ. Всякое измереніе физической величины распадается на рядъ манипуляцій, совокупность которыхъ приводить къ тѣмъ даннымъ, изъ которыхъ непосредственно, или путемъ различныхъ комбинацій и вычисленій получается искомое численное значеніе измеряемой величины.

Нѣтъ никакой возможности дать перечень тѣхъ манипуляцій, съ которыми приходится имѣть дѣло при производствѣ физическихъ измереній, объ нихъ слѣдуетъ прочесть въ вышеупомянутыхъ специальныхъ сочиненіяхъ. Впрочемъ и они не могутъ замѣнить ничаго опыта, самостоятельнаго производства измереній, которое одно только можетъ дѣйствительно научить дѣлу.

Оправдываемся немногими, но основными указаниями.

При огромномъ большинствѣ физическихъ измѣреній мы имѣемъ дѣло съ тремя последовательными манипуляциями. съ установкой, наблюдениемъ и отчетомъ.

I. Установка заключается въ правильномъ помѣщеніи и размѣщеніи прибора съ соблюденіемъ внутреннихъ и вѣшнихъ условий, опредѣленныхъ, какъ свойствами самихъ приборовъ, такъ и особенностями тѣхъ явленій, которые наблюдаются. Очень многие приборы должны быть установлены такъ, чтобы нѣкоторая плоскость, въ нихъ содержащаяся, была горизонтальна. Такая установка весьма часто достигается помощью уровней (см. ниже) вращеніемъ винтовыхъ ножекъ прибора. Далеко приборъ вообще долженъ быть установленъ такъ, чтобы возможно и удобно было производить съ нимъ измѣренія, чтобы опредѣленные его части были обращены въ надлежащую сторону. Къ вѣшнымъ условиямъ, къ которымъ необходимо отнестись съ величайшею осмотрительностью, жгуть относиться прочность установки прибора, который не долженъ подвергаться сотрясеніямъ или напр. постепеннымъ измѣненіямъ упомянутого горизонтальнаго положенія; это достигается установкой прибора на крѣпительныхъ, прикрѣпленныхъ къ стѣнѣ или на каменныхъ столбахъ, стоящихъ на крѣпкихъ сводахъ или имѣющихъ откѣплены фундаментъ. Далеко сюда относятся вліяніе окружающей обстановки — возможность воздушныхъ теченій, измѣненія температуры (близость печи, отопители, окна), влажности (влияющей напр. на длину коконныхъ нитей) и т. д. дѣйствие приборовъ другъ на друга, вліяніе соседняго желѣза или проводниковъ, по которымъ текутъ электрическіе токи (на приборы магнитные) и т. д. Установка должна сопровождаться самымъ тщательнымъ использованием всѣхъ вѣшнихъ условий, могущихъ вліять на показанія прибора, эти условия должны быть устранены или величина ихъ вліянія должна быть принята въ расчетъ.

II. Наблюденіе при весьма многихъ измѣреніяхъ заключается въ такомъ постепенномъ измѣненіи части прибора или положенія вѣшняго предмета, которымъ достигается какой нибѣ опредѣленный результатъ, причемъ моментъ его достиженія опредѣляется въ большинствѣ случаевъ наблюдениемъ глазами, но иногда и по слуху или осязаніемъ (см. ниже сфенометръ). Такою рода наблюденіе иногда также называютъ установкой той или другой части такъ, чтобы было достигнуто опредѣленный результатъ. Манипуляция при этомъ должна быть возможна, но отсюда не слѣдуетъ, чтобы всякій ее могъ исполнить съ пераго раза. Умѣнье производить ее иногда достигается лишь долгимъ упражненіемъ, а точныя наблюденія, т.-е. возможно близкое улавливаніе именно того момента, когда достигается опредѣленный результатъ, можетъ произвести только искусный наблюдатель.

Перемѣщеніе части прибора или вѣшняго предмета въ очень многихъ случаяхъ производится вращеніемъ головки винта и лишь рѣдко передвиженіемъ отъ руки (нѣкоторые фотометры). При этомъ весьма часто жазнавается возможнымъ произвести установку съ двухъ противополо-

ложных сторонъ и слѣдуетъ ее два раза, сперва съ одной, потомъ съ другой стороны достигнуть болѣе точнаго результата. Весьма большое внимание слѣдуетъ обратить на т. наз. мертвый ходъ винта: если винтъ сперва будетъ вращаться въ одну сторону, причемъ перемѣщалась какая-либо часть прибора и если затѣмъ начать вращать винтъ въ другую сторону, то подвижная часть прибора на которую онъ дѣйствуетъ не тотчасъ начинаетъ имѣть увлеченіе, такъ что величина вращенія винта не можетъ служить мѣрою перемѣщенія этой части прибора. Экспериментаторъ долженъ рѣшить, каковыя способы въ каждомъ данномъ случаѣ исключитъ вредное вліяніе мертвого хода или такая при каждомъ измѣреніи два наблюдателя съ двухъ противоположныхъ сторонъ т.-е. вращая сперва винтъ въ одну а при слѣдующемъ наблюденіи въ противоположную сторону, или производя рядъ послѣдовательныхъ измѣреній, вращая головку винта постоянно въ одну и ту же сторону.

Выше уже неопредѣленно сказано что перемѣщеніе части прибора производится до тѣхъ поръ пока на глазъ или на ощупь не окажется достигнутымъ нѣкоторый опредѣленный результатъ. Этотъ результатъ по своему характеру можетъ быть весьма различнымъ наиболѣе частонъ заключается въ томъ, что двѣ наблюдаемыя величины, качественныя (напр. звукъ утѣти) или интенсивныя (напр. сила звука степень освѣщенія), количественно до тѣхъ поръ слѣдуютъ равными. Сюда можно отнести и случаи, когда только быть достигнуто одинаковая окраска двухъ поверхностей, одинаковой высота двухъ звуковъ и тому подобныя равенства качественныя.

Мы не въ состояніи указать момента, когда двѣ величины, наблюдаемыя нами, находятся въ опредѣленномъ отношеніи другъ къ другу напр. одна въ два раза интенсивнѣе другой; зато вопросъ о достигнутомъ равенствѣ или неравенствѣ при наивысш. рѣшается съ большою точностью.

При весьма многихъ методахъ измѣреній приходится наблюдать моментъ исчезновенія или опредѣленнаго явленія, такъ методы мы назовемъ нулевыми. Они особенно дѣльны, ибо судить о присутствіи или отсутствіи впечатлѣній на органы чувствъ мы можемъ еще точнѣе чѣмъ о равенствѣ двухъ впечатлѣній. Впрочемъ тутъ нельзя провести рѣзкой границы, ибо иногда самое исчезновеніе явленія служитъ для насъ къ тому что два ощущенія дѣлаются равными, напр. когда на свѣтломъ фонѣ наблюдается нитно или порося (фотометры) и требуется указать моментъ когда они исчезаютъ, т.-е. когда яркость мѣста ими занимаемого, дѣлается равной яркости окружающаго фона.

При весьма многихъ измѣреніяхъ приходится добиваться до возможности полнаго совпаденія двѣ точки, черты и точку или двѣ черты, по одной изъ нихъ, подвижную, къ другой, неподвижной. Здѣсь требуется навыкъ: ибо точка и черта въ сущности представляютъ малый кружокъ и узкую полосу; совпадать должны геометрически ихъ средины.

«Наблюденіе», въ смыслѣ точной установки части прибора, которую мы здѣсь приведемъ, какъ вторую изъ трехъ главныхъ манипуляцій, при нѣкоторыхъ измѣреніяхъ совершенно отсутствуетъ и замѣняется простою ма-

индукции, вызывающей в самом приборе какое-либо передвижение или вообще изменение. Так, напр. замыкание тока вызывает вращение магнита гальванометра, подогревание (при измерениях коэффициента расширения, точки плавления и кипения и т. д.) вызывает перемещение ртути термометра и т. д.

III. Отсчет бывает двойки длины и времени.

Отсчет длины делается на шкалу, расположенную вдоль прямой или вдоль окружности круга, требуется определить числовое значение шкалы, соответствующее определенной ее точке. Если эта точка приходится между двумя целыми делениями шкалы, то доли деления определяются по глазомеру.

Отсчет времени делается 1) по секундам помощью счетчика отбивающего секунды или полусекунды, причем требуется определить момент, когда происходит наблюдаемое явление и 2) помощью особых приборов, называемых хронографами (см. ниже) и дающих возможность отсчета времени вполне замкнуть отчетом длины.

§ 4. Некоторые подробности, относящиеся вообще до производства физических измерений. Указав на установку, наблюдение и отсчет, как на главные машины выки, на которые распадается всякое физическое измерение, припомним еще несколько общих указаний, которые могут быть полезны для начинающих.

1. Неумение производить хорошие, т. е. точные измерения с данным прибором заключается в умении достигнуть крайних предельных того, что этот прибор может дать. Для грубых, приблизительных измерений, которыми часто довольствуются в технике (особенно в электротехнике), могут служить простые приборы, настолько удобные, что машина провасть с ними научается всякий, иногда в несколько минут. Совсем другое, когда речь идет о научном исследовании при условии достижения крайних возможных предельных точности. Здесь требуется тщательное изучение свойств прибора, та осмотрительность и тот навык, о которых было сказано выше. Искусный наблюдатель и с простым прибором достигнет лучших результатов, чем неискусный с прибором хорошим, усовершенствованным.

2. Редко только возможно, следует каждое измерение повторять много раз сряду. Подчеркнем, что для опытных читателей, которые, как оказывается, в начале весьма склонны ограничиваться одним единичным измерением.

Не следует забывать, что обыкновенно приходится затрачивать много времени и труда, чтобы достичь результата первого измерения, между тем как следующие, повторные измерения требуют все меньшего и меньшего времени и труда.

3. Когда измеряется влияние какого-либо действия A на некоторую величину B (напр. влияние изменения температуры на электрическое сопротивление проволоки), то следует или чередовать измерения той величины B , когда имеется и когда не имеется действия A , или, по крайней мере, начав с измерения B без действия A и сделав ряд

измѣреній при наличности этого дѣйствія, непременно вновь возвратиться къ начальному состоянiю, т.-е. произвести опять измѣренiе величины B безъ дѣйствія A . Отимъ мы убѣждаемся, что во время нашей работы не произошло измѣненiй въ самомъ приборѣ или во внѣшней обстановкѣ, могущихъ имѣть влияние на его показанiя. Если обнаружилось такое измѣненiе и оно не велико, то слѣдуетъ его принять во вниманiе, допуская, что оно происходитъ постепенно, пропорционально времени, истекшему отъ перваго измѣренiя.

4. Никогда не слѣдуетъ забывать записывать въ началѣ ряда измѣренiй, что и какимъ методомъ измѣряется дѣлѣ мѣсто наблюденiя и время, т.-е. годъ, мѣсяць, число и часъ, а при каждомъ отдѣльномъ измѣренiи минутъ и даже дробь, если это нужно, минуты или секунды. Почти всегда приходится записывать и температуру. Другiя величины (давленiе и влажность воздуха, магнитное склоненiе и т. д.) отбѣчаются, если они могутъ имѣть влияние на результатъ измѣренiя.

5. Числовые данныя, получаемыя при непосредственныхъ отчетахъ, лишь въ рѣдкихъ случаяхъ непосредственно равны тѣмъ числовымъ значенiямъ измѣряемыхъ величинъ, которыя мы желаемъ опредѣлить. Почти всегда искомымъ величина получается путемъ вычисленiй, на основанiи опредѣленныхъ формулъ, въ которыя должны быть вставлены результаты отчетовъ. Слѣдуетъ принять за правило не накопить множества измѣренiй, не вычисливъ таковыхъ, ибо результаты вычисленiй весьма часто могутъ дать разные указанiя касательно недостатковъ метода, внѣшнихъ влиянiй и т. д. Самые вычисленiя, представляющiя нередко трудъ гораздо болѣе кропотливый, продолжительный и, по всякомъ случаѣ, скучный чѣмъ производство измѣренiй, слѣдуетъ располагать такъ, чтобы ихъ легко можно было и обзрѣть и проверить. Посредствомъ могутъ служить вычислительныя машины и разные таблицы, какъ напр. таблица Барлоу (Barlow, квадраты, кубы, квадратные и кубичные корни и обратныя величины цѣлыхъ чиселъ) и Кретц (Cretz, Rechentafeln, таблицы умноженiя чиселъ).

6. Избранный методъ измѣренiя слѣдуетъ предварительно подвергнуть теоретическому изслѣдованiю для опредѣленiя условий наибольшей его чувствительности, которая будетъ достигнута когда весьма малое измѣненiе измѣряемой величины вызоветъ возможно болѣе измѣненiе отчета. Общи правила здѣсь даны быть не могутъ, кромѣ развѣ слѣдующаго: когда мы желаемъ измѣрить малую вариацію Δx величины x вызванную какою-либо внѣшнею причиною (напр. измѣненiе Δx сопротивленiя x части цѣпи при ея нагрѣванiи или измѣненiе Δx силы свѣта x подъ влiянiемъ магнитныхъ силъ, см. магнитное вращенiе плоскости поляризацiи), то слѣдуетъ стремиться къ тому, чтобы начальное x было по возможности мало или даже равно нулю, или чтобы сама величина x не вляла на отчетъ, который всецѣло долженъ зависѣть только отъ Δx . Когда сопротивленiе x цѣпи весьма велико, то малое, по абсолютной величинѣ, его измѣненiе Δx не вызоветъ замѣтныхъ измѣ-

неній въ силѣ тока, а слѣд. и въ показаніяхъ инструмента (гальванометра); та же величина Δx вызоветъ большое измѣненіе этихъ показаній, когда послѣднія отъ x вовсе не зависятъ. Малое измѣненіе Δx силы яркаго освѣщенія остается незамѣтнымъ; та же самая по абсолютной величинѣ Δx сила освѣщенія, возникающая на темномъ фонѣ, весьма замѣтна.

Здѣсь играетъ большую роль психофизическій законъ Фехнера, гласящій, что одинаковыя относительныя измѣненія величины вышней причины, производящія раздраженіе въ одномъ изъ нашихъ органовъ чувствъ, вызываютъ одинаковыя абсолютныя измѣненія ощущенія.

7. Всякій теоретически установленный методъ измѣренія представляетъ нѣчто отвлеченное или, если можно такъ выразиться, идеальное. При примѣненіи метода на практикѣ почти всегда оказывается наличность цѣлаго ряда обстоятельствъ, влияющихъ на окончательный отчетъ и тѣмъ самымъ мѣняющихъ теоретическую формулу, которая должна намъ дать искомое численное значеніе измѣряемой величины. Принимая во вниманіе эти обстоятельства, мы должны ввести въ наши вычисленія поправки, чтобы получить истинное значеніе измѣряемой величины.

Одна изъ главныхъ заботъ лица, производящаго измѣреніе и должна заключаться въ отысканіи всѣхъ тѣхъ побочных обстоятельствъ, которыя могутъ вліять на результатъ измѣренія, и въ опредѣленіи соответствующихъ поправокъ.

Вычисливъ эти поправки и стремясь тѣмъ самымъ къ полученію возможно точнаго результата, слѣдуетъ поступать весьма осмотрительно, чтобы не впасть въ одну часто замѣчаемую ошибку. Дѣло въ томъ, что различныя обстоятельства могутъ имѣть весьма неодинаковое влияние на результатъ измѣренія: одніе поправки могутъ выражаться въ цѣлыхъ процентахъ, другія въ десятыхъ, сотыхъ или тысячныхъ доляхъ процента. слѣдуетъ весьма остерегаться безцѣльнаго введенія малыхъ поправокъ, когда не приняты во вниманіе поправки, сравнительно гораздо большія. Наблюдая качанія коромысла извова, можно при извѣщиваніи вводить поправки, представляющія 0,001° (и меньше) предѣляемаго вѣса; но это безцѣльно и составляетъ сущій самообманъ, если въ то же время не ввести напр. поправки на потерю вѣса тѣла въ воздухѣ, могущую превысить 0.1%.

8. слѣдуетъ отличать абсолютную и относительную точность окончательнаго результата измѣренія, представляющагося въ видѣ нѣкотораго числа, положимъ, съ десятичными дробями. Та и другая «точность» предѣляется тою долей полученнаго числа, за достовѣрность которой мы считаемъ возможнымъ поручиться. Если напр. вѣсъ тѣла оказался равнымъ 125,0463 грамма и мы можемъ поручиться за то, что предшлѣдшій цифра должна быть 6 (т.-е. что вѣсъ больше, чѣмъ 125,0455 грамма и меньше, чѣмъ 125,0465 грамма), то абсолютная точность взвѣшиванія составляетъ лишь миллиграммъ, относительная же точность равна 0,00001. Когда точность «дѣла или содѣлья» не зависитъ отъ размѣровъ измѣряемой величины (углубъ, точность температуръ, иногда длина и время), то говорить только объ абсолютной точности («до 0,1" дуги», «до 0,01° C.», «до 0,001 мм.»).

0,01 сек.), В большинстве же случаев, говоря о точности результата измерения, подразумевают точность относительную. Она определяется порядком той цифры полученного числа, считаемой слева направо, за которую можно поручиться; при этом нули, стоящие слева, не считаются, если полученное число представляется в виде малой десятичной дроби, иногда вследствие случайного выбора единиц измерения. Первая цифра, не равная нулю, называется в этом случае первой значащей цифрой, и от нее ведется счет достоверных цифр. Если напр. измеренная величина оказалась равною 0,0016843 и мы можем поручиться за вѣрность цифры 8, то это не значит, что точность равна 0,00001. Мы должны сказать, что величина измерена с точностью до третьей значащей цифры или до 0,01. Указание на «значащую цифру», впрочем, не особенно строго, еслибы измеренное число было 0,0096843 и мы могли бы поручиться за вѣрность цифры 8, то это была бы точность почти до 0,001.

Следует помнить, что между точностью отдельных измерений, на которых распадается определение численного значения некоторой величины, и точностью этого последнего определения может быть большая разница. Если напр. при измерении некоторой величины y (коэффициент кручения, см. отдельной вѣтви) приходится попутно определять радиус r проволоки, приблизительно равный 0,4 мм, и если величина y пропорциональна r^4 , то даже при крайней достижимой абсолютной точности измерения r до 0,001 мм, может получиться ошибка в 1% в численном значении величины y . Правила дифференциального исчисления дают возможность безъ особого труда разбираться въ подобныхъ вопросахъ. Если мы имѣемъ вообще $y = f(x)$ и если x непосредственно измеряется, а y вычисляется по известной формуле, то возможная погрѣшность Δy при измерении x влечетъ за собою относительную ошибку $\Delta y/y$ въ определении y , которую можно съ достаточною точностью выразить приближеннымъ равенствомъ

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)\Delta x}{f(x)} = \Delta \lg f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

9. Многократное повторение одного и того же измерения однимъ лицомъ и безъ измѣненія обстановки и метода всегда оставляетъ сомнѣніе относительно возможности постоянно повторяющихся погрѣшностей, источниками которыхъ могутъ служить неперравность прибора, неправильная его установка, постороннія вѣщныя вліянія и, наконецъ, субъективныя ошибки наблюдателя. Вотъ почему варіированіе метода измерения есть одинъ изъ главныхъ способовъ достиженія точныхъ результатовъ. Это варіированіе можетъ касаться деталей измерения или всего его метода.

Варіировать детали слѣдуетъ непременно, гдѣ только тому представляется возможность, руководясь главнымъ образомъ такими соображеніями. Положимъ, что есть поводъ допустить, что какая либо причина A имѣетъ вліяніе на результатъ измерения, но что величина этого вліянія не поддается точному опредѣленію. Въ такомъ случаѣ слѣ-

дуетъ постараться произвести измѣреніе два раза, варьируя его такъ, чтобы вліяніе причины A имѣло при этихъ двухъ измѣреніяхъ противоположныя направленія, т.-е. при одномъ увеличивало, при второмъ уменьшало бы численный результатъ. Вывѣ среднее изъ результатовъ, мы этимъ исключаемъ вліяніе причины A , хотя, конечно, и не вполне, ибо два противоположныхъ вліянія могутъ и не быть строго равными.

Гдѣ окажется возможнымъ, надѣ стараться производить измѣренія величины по существенно различнымъ методамъ, которые должны дать согласные между собою результаты.

§ 5. Приближенное вычисленіе результатовъ измѣреній. При вычисленіи результатовъ измѣреній слѣдуетъ помнить, что они могутъ обладать лишь нѣкоторою опредѣленною степенью точности, о которой самъ наблюдатель имѣетъ всегда болѣе или менѣе опредѣленное представленіе. Поэтому при самомъ вычисленіи вычисленій можно допускать упрощенія, вводя тѣмъ самымъ сознательно нѣкоторыя погрѣшности, которыя однако достовѣрно меньше тѣхъ неточностей, которыя во всякомъ случаѣ должны оставаться въ окончательномъ результатѣ. Такія упрощенія или, какъ говорить, приближенныя вычисленія особенно удобны, когда каки-либо изъ величинъ, входящихъ въ формулы, довольно столь малы, что квадратами ихъ можно пренебречь. Вотъ нѣсколько примѣровъ упрощеній, допустимыхъ при вычисленіи результатовъ физическихъ измѣреній. Пусть α , β , γ весьма малыя величины, тогда можно положить:

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) \dots = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \dots$$

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha, \text{ напр. } (1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha, \quad 1 - \alpha = (1 + \alpha)^{-1} = 1 - \alpha,$$

$$\frac{1}{1 + \alpha} = (1 + \alpha)^{-1} = 1 - \alpha, \quad \frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha; \quad \frac{1}{1 + \alpha} = (1 + \alpha)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\frac{1}{1 - \alpha} = (1 - \alpha)^{-1} = 1 + \alpha,$$

$$\sin \alpha = \alpha; \quad \cos \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \alpha; \quad \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Точнѣе можно принять } \sin \alpha = \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3, \quad \cos \alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \alpha \cos \beta, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha - \alpha \sin \beta.$$

Если α , β , γ = x весьма малая величина, то можно положить

$$\sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$$\sqrt{x_1 + x_2} = \sqrt{x_1(1 + \frac{x_2}{x_1})} = \sqrt{x_1} \sqrt{1 + \frac{x_2}{x_1}} = x_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

§ 6. Вычисленіе наиболѣе вѣроятнаго результата ряда опредѣленій одной величины. Положимъ, что мы произвели n опредѣленій одной величины и получили n чиселъ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Еслибы наши опредѣленія были абсолютно точны, то всѣ эти числа равнялись бы

$$\varphi = \pm 0,6745 \sqrt{\frac{S}{n-1}} \text{ или } \varphi = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{S}{n-1}} \dots (7)$$

$$\Phi = \pm 0,6745 \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} \text{ или } \Phi = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} \dots (8)$$

Для искомой величины x находимъ окончательно

$$x = \bar{x} \pm \Phi.$$

т. е.

$$x = \frac{\sum x_i}{n} \pm 0,6745 \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{n(n-1)}} \dots (9)$$

Приведемъ примѣръ (изъ книги Terquem et Damien, Introduction à la physique expérimentale). Нѣкоторый уголъ x былъ измѣренъ $n = 10$ разъ, причемъ получены были слѣдующія его значенія x_i :

x_i	Отклоненія δ_i	δ_i^2
20°,666	— 0,0023	0,00000529
20,740	— 0,0763	0,00582169
20,701	— 0,0373	0,00139139
20,616	+ 0,0477	0,00227529
20,641	+ 0,0227	0,00051529
20,700	— 0,0363	0,00131769
20,658	+ 0,0057	0,00003249
20,616	+ 0,0477	0,00227529
20,658	+ 0,0057	0,00003249
20,641	+ 0,0227	0,00051529

Сумма 206,637

$$S = \sum \delta_i^2 = 0,01418220$$

т. е.

$$\bar{x} = 20,6637 \quad f = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{S}{9}} = \pm \sqrt{0,00157580} = \pm 0,0397 = \pm 2'23''.$$

$$\text{или } F = \pm \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{S}{90}} = \pm 0,01256 = \pm 45''.$$

$\bar{x}_0 = 20^\circ 39' 49''$

$$\varphi = \frac{2}{3} f = \pm 0,0261 = \pm 1'34''.$$

$$\Phi = \frac{2}{3} F = \pm 0,00837 = \pm 30''.$$

Окончательно

$$x = 20^\circ 39' 49'' \pm 30''.$$

Когда численное значеніе величины было определено нѣсколькими рядами наблюдений, произведенными по различнымъ методамъ, при различной обстановкѣ или, наконецъ, различными наблюдателями, то числовые результаты этихъ рядовъ наблюдений, вообще говоря, будутъ заслуживать различной степени довѣрія. Было бы неправильно, еслибы мы окончательно остановились на арифметическомъ среднемъ чиселъ x_i , полученныхъ въ отдѣльныхъ рядахъ, ибо этимъ мы бы признали, что всѣ они имѣютъ

одинаковое значение. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ каждому изъ результатовъ приписать особый вѣсъ, это число, характеризующее значение или степень достовѣрности результата каждаго ряда наблюдений.

При выводѣ окончательнаго результата x слѣдуетъ каждое изъ чиселъ r_i помножить на его вѣсъ p_i и затѣмъ взять среднее, раздѣливъ на сумму вѣсовъ.

Такимъ образомъ

$$x = \frac{\sum p_i r_i}{\sum p_i} \quad (10)$$

Во многихъ случаяхъ приходится определять вѣсъ по личному усмотрѣнью. Нередко онъ вычисляется изъ самихъ наблюдений, а именно вѣсъ результата ряда наблюдений обратно пропорционаленъ квадрату его вѣроятной погрѣшности Φ , см. (8).

Положимъ, что рядъ определений широты мѣста λ данъ

$$\lambda_i = 49^\circ 16' 13'' \pm 5''.$$

Другой рядъ, полученный другимъ приборомъ или другимъ наблюдателемъ данъ

$$\lambda_2 = 49^\circ 16' 10'' \pm 3''.$$

Вѣса относятся какъ 9 : 25, а потому

$$x = \frac{9r_1 + 25r_2}{9 + 25} = 49^\circ 16' + \frac{9 \cdot 13'' + 25 \cdot 10''}{34} = 49^\circ 16' 10''{,}8.$$

§ 7. Вычисленіе наиболѣе вѣроятныхъ значеній нѣсколькихъ величинъ. Способъ наименьшихъ квадратовъ. Подробное изложеніе такъ называемаго способа наименьшихъ квадратовъ слѣдуетъ искать въ специальныхъ сочиненіяхъ по теоріи вѣроятностей. Здѣсь мы должны ограничиться краткимъ указаніемъ на значеніе и сущность этого способа.

Мы видѣли (стр. 6), что закономерная связь между явлениями, которую мы ищемъ, выражается определенными алгебраическими связями между численными значеніями различныхъ величинъ.

Положимъ, что нѣкоторая величина x есть функція величинъ y, z, \dots , такъ что можно написать $x = F(y, z, \dots)$.

Въ функцію F войдутъ, кромѣ y, z, \dots еще различные числовые параметры a, b, c, \dots , напр. коэффициенты, показатели степеней, основанія перемѣнныхъ степеней и т. д. Поэтому мы вообще напишемъ

$$x = F(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots) \quad (11)$$

Въ огромномъ большинствѣ случаевъ отыскиваютъ связь лишь между двумя величинами x и y , и тогда мы, вмѣсто (11), имѣемъ

$$x = F(x, a, b, c, \dots) \quad (12)$$

Видъ функции F можетъ быть или выведенный теоретически или онъ взятъ наугадъ, или наконецъ это функция эмпирическая (стр. 23). Во всѣхъ трехъ случаяхъ мы ставимъ вопросъ о томъ, можно ли опредѣлить постоянныя a, b, c, \dots такъ, чтобы наблюденныя значения величинъ c, x, y, z, \dots или только c и x удовлетворяли выведенной, угаданной или эмпирически принятой функции F . Въ послѣднемъ случаѣ эмпирической связи при двухъ величинахъ c и x весьма часто придаютъ видъ

$$c = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots \quad (13)$$

Численные значения величинъ c, x, y, z, \dots или только c и x получаются изъ наблюдений; численные же значения параметровъ a, b, c, \dots требуется опредѣлить такъ, чтобы послѣ подстановки ихъ въ (11), (12) или (13) получалась алгебраическая зависимость, съ которою опытнымъ найденныя численные значения оказались бы по возможности согласными. Такимъ образомъ напр. въ (13) мы имѣемъ изъ опытовъ рядъ сопряженныхъ значений величинъ c и x ; на c, x, c^2, c^3, \dots въ (13) слѣдуетъ положить (смотря какъ на известные намъ коэффициенты, на a, b, c, d, \dots какъ на искомыя неизвестныя).

Если число наблюдений, т.-е. число известныхъ сопряженныхъ значений величинъ c и x равно числу неизвестныхъ параметровъ a, b, c, \dots , то эти послѣдние опредѣляются однозначнымъ образомъ и ни о какой проверкѣ параметровъ выведенной или эмпирической функции не можетъ быть и рѣчи.

Подождемъ напр. что c и x связаны формулою

$$c = a + bx + cx^2.$$

Если измѣренія даютъ всего три пары сопряженныхъ значений величинъ c и x , а именно x_1, x_2, x_3 , c_1, c_2, c_3 , то три уравненія вида

$$c_i = a + bx_i + cx_i^2,$$

гдѣ $i = 1, 2, 3$, послужатъ для опредѣленія трехъ неизвестныхъ a, b и c . Точно также при

$$c = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x,$$

четыре пары сопряженныхъ значений величинъ x и c послужатъ для опредѣленія четырехъ параметровъ a, b, c и d .

Совсѣмъ другое будетъ, когда число n наблюдений больше числа m неизвестныхъ параметровъ, напр. когда мы имѣемъ 20 наблюдений при 3-хъ параметрахъ. Тогда имѣются n уравненій (напр. 20) съ m неизвестными (напр. 3). Еслибы допущенная связь между наблюденными величинами выражала истинную или закономерную связь и еслибы измѣренія были абсолютно точны, то m параметровъ, опредѣленные изъ какихъ либо m уравненій, удовлетворяли бы и остальнымъ $n - m$ уравнениямъ. Но наблюдения не безъ погрѣшностей и допущенная связь, особенно если она эмпирическая,

лишь приближенно выражаетъ закономѣрную зависимость между величинами, а потому мы для параметровъ получимъ не вполне одинаковыя значенія. Если различно будемъ выбирать группы въ m уравненій изъ имѣющихся n уравненій. Спрашивается, на какихъ значеніяхъ параметровъ мы должны остановиться, какія изъ численныя значенія наиболѣе вѣроятны?

Теорія вѣроятностей даетъ на этотъ вопросъ такой отвѣтъ: слѣдуетъ выбрать такія значенія параметровъ, для которыхъ сумма квадратовъ отклоненій наблюденныхъ значеній функціи F отъ вычисленныхъ есть наименьшая. Итакъ величина

$$S = \sum \{v_i - F(x_i, a, b, c, \dots)\}^2 \quad (14)$$

въ которой v_i и x_i , сопряженные значенія величинъ v и x , найденныя изъ наблюденій, должна имѣть наименьшее значеніе при искомымъ значеніяхъ параметровъ a, b, c, \dots .

Правила дифференціальнаго исчисленія показываютъ, что условіе минимума величины S будетъ удовлетвоено, когда

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \quad \text{и т. д.} \quad (15)$$

Получается столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ параметровъ; остается рѣшить эти уравненія.

Предположимъ, что мы имѣемъ связь вида

$$z = ax + by + cz \quad (16)$$

(здѣ въ частномъ случаѣ можетъ быть $y = x^2$, $z = x^3$ или $x = 1$, $z = y^4$, и что наблюденія дали n значеній величинъ v, x, y, z . Требуется найти наиболѣе вѣроятныя значенія коэффициентовъ a, b, c . Вышеуказанный способъ наименьшихъ квадратовъ даетъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sum \{v_i - ax_i - by_i - cz_i\}^2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \sum \{v_i - ax_i - by_i - cz_i\}^2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial c} \sum \{v_i - ax_i - by_i - cz_i\}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Здѣсь въ v_i, x_i, y_i и z_i суть величины извѣстныя. Первое изъ ур. (17) даетъ

$$\sum \{v_i - ax_i - by_i - cz_i\} x_i = 0$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sum v_i x_i &= a \sum x_i^2 + b \sum x_i y_i + c \sum x_i z_i \\ \sum v_i y_i &= a \sum x_i y_i + b \sum y_i^2 + c \sum y_i z_i \\ \sum v_i z_i &= a \sum x_i z_i + b \sum y_i z_i + c \sum z_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

аналогично

Эти три уравнения и послужатъ для опредѣленія трехъ параметровъ a , b и c . Легко обобщить этотъ выводъ для случая большаго числа иско-
мыхъ параметровъ.

Приведемъ примѣръ. Величины x и y связаны уравненіемъ

$$y = ax + b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Изъ наблюдений были получены слѣдующія численныя значенія

x	y	x	y
0.33	2.51	2.60	8.81
1.04	5.23	3.14	9.10
1.32	6.12	3.82	8.26
2.06	7.97	4.13	8.04

Сравнивая (19) съ (16), мы видимъ, что $y = v^2$, $z = 0$ и потому (18) даетъ два уравненія

$$\begin{aligned} \sum x_i y_i &= a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 \\ \sum x_i y_i^2 &= a \sum x_i^3 + b \sum x_i^4 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Для вычисленія этихъ суммъ пользуются таблицами квадратовъ и кубовъ цѣлыхъ чиселъ и весьма полезною формулою

$$pq = \frac{p+p'}{2} \frac{p-p'}{2}.$$

откуда

$$\sum pq = \frac{\sum(p+p')^2 - \sum p^2 - \sum q^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Послѣдняя формула даетъ возможность вычисленіе суммы произве-
деній свести къ вычисленію суммъ квадратовъ. Въ нашемъ случаѣ:

$\sum x_i y_i = 147.01$; $\sum x_i^2 = 55.446$; $\sum x_i^3 = 186.92$; $\sum x_i^4 = 669.00$ и $\sum x_i y_i^2 = 457.33$. Подставивъ эти числа въ (20), получаемъ $a = 5.9735$ и $b = 0.9851$; поэтому искомая зависимость будетъ

$$y = 5.9735x + 0.9851x^2.$$

Если въ полученное такимъ путемъ выраженіе для $F(x, y, z, \dots)$ подставить числа x_i, y_i, z_i, \dots то получатся числа v_i «вычисленныя», отличающіяся отъ чиселъ v «наблюденныхъ». Отклоненія обозначимъ черезъ $\delta_i = v_i' - v_i$. Средняя ошибка f результата равна, какъ доказываются въ теоріи вѣроятностей.

$$f = \frac{\sum \delta_i^2}{n-m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

гдѣ n число уравненій, m число параметровъ. Въ нашемъ примѣрѣ

$$\sum \delta_i^2 = 0.529, \quad n = 8, \quad m = 2, \quad \text{слѣд. } f = \frac{0.529}{6} = 0.088.$$

Когда функции F , см. (11), не имѣть вида (16), такъ что искомыя параметры a, b, c, \dots не входятъ въ нее, какъ линейные коэффициенты при известныхъ величинахъ x, y, z, \dots то вычислить сперва изъ m уравненій приближенные значения a_0, b_0, c_0, \dots искомымъ величинамъ.

Полная затѣмъ $a = a_0 + \alpha, b = b_0 + \beta, c = c_0 + \gamma, \dots$ имѣемъ

$$F(x, y, z, \dots, a_0 + \alpha, b_0 + \beta, c_0 + \gamma, \dots).$$

Такъ какъ α, β, γ величины малыя, то можемъ положить

$$v = F(x, y, z, \dots, a_0, b_0, c_0, \dots) + \frac{\partial F}{\partial a} \alpha + \frac{\partial F}{\partial b} \beta + \frac{\partial F}{\partial c} \gamma + \dots$$

Вводя обозначенія

$$v = F(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots) =$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} x + \frac{\partial F}{\partial b} y + \frac{\partial F}{\partial c} z + \dots$$

имѣемъ

$$x = \alpha + \beta + \gamma + \dots$$

Гдѣ величины $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ известны, остается опредѣлить числа a, b, c, \dots по тому же методу, который далъ намъ величины a, b, c, \dots въ ур. 16.

ЛИТЕРАТУРА.

Спеціальныя сочиненія, посвященныя производству опытовъ измѣреній и вообще работѣ въ физическихъ лабораторіяхъ:

Калибровка. Руководство къ практикѣ физическихъ измѣреній Сиб. 1891 (перев. съ нѣмецкаго).

Wiedemann und Ebert. Physikalisches Practicum. Braunschweig.

Ostwald. Hand- und Hilfsbuch zur Ausführung physiko-chemischer Messungen. Leipzig.

O. Lehmann. Physikalische Technik.

L. Kuelp. Die Schule des Physikers.

Glazebrook and Shaw. Practical physics.

B. Stewart and H. Gee. Lessons in elementary practical physics.

A. Witz. Cours de manipulations de physique.

Tirquim et Damaen. Introduction a la physique expérimentale.

В. В. Лермантовъ. Объясненіе практическихъ работъ по физикѣ Сиб. 1893—1895. (интгр.).

Frick. Physikalische Technik. 6-te Aufl. v. Otto Lehmann. Braunschweig.

W. Pechard. Einleitung in die praktische Physik.

А. Смирновъ. Руководство для практическихъ занятій по физикѣ.

Bunsen. Gasometrische Methoden.

Weinhold. Physikalische Demonstrationen.

G. Hopkins. Experimental Science. London.

Сочиненія, посвященныя специально электрическимъ измѣреніямъ будутъ указаны въ части IV.

Вопросъ объ ошибкахъ наблюденій, о вычисленіи результатовъ наблюденій и о способѣ уменьшающихъ квадратовъ излагается въ сочиненіяхъ по теоріи вѣроятностей.

По существуютъ и нѣкоторыя книги, болѣе специально посвященныя этому вопросу. Укажемъ на слѣдующія:

Airy. On the algebraical and numerical theory of errors of observations. Cambridge. 1861.

Biernaymé. Probabilité des erreurs (Journ. de Liouville, 1 serie t. 17).

Gauss. Theoria combinationis observationum errorum minimis obnoxiae.

Bruno. Calcul des erreurs. Paris. 1869.

Weinstein. Handbuch der physikalischen Maassbestimmungen, 2 части, Berlin. 1885—1892.

M. Merriman. Method of least squares. London. 1877.

G. Hagen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeits Rechnung Berlin. 1867

J. Bertrand. Calcul des probabilités. Paris. 1868.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Нѣкоторые вспомогательные приборы.

§ 1. Дѣлительная машина линейная. На стр. 239 было упомянуто, что отчеты длины дѣлаются на шкалахъ (масштабахъ) прямыхъ (линейныхъ) или круговыхъ. Для нанесенія дѣленій на этихъ шкалахъ соответственно употребляютъ дѣлительныя машины линейныя и круговыя. Линейныя дѣлительныя машины бываютъ обыкновенныя и копирующія. Первые служатъ для нанесенія опредѣленныхъ, заданныхъ дѣленій; вторыя — для перенесенія (копированія) дѣленій съ готоваго масштаба на новый, изготавливаемый.

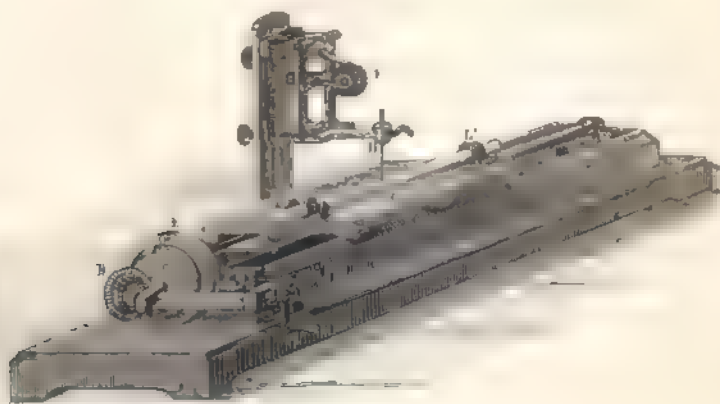
Существуетъ весьма большое число разновидностей дѣлительныхъ машинъ, отличающихся другъ отъ друга устройствомъ деталей. Важнѣйшую и общую имъ всѣмъ (некопирующимъ) часть представляетъ горизонтально расположенный винтъ съ весьма тщательн. отфланкой и возможно одно-осальной парѣзкой. Концы этого винта снабжены круговой парѣзкой и лежатъ въ соответствующихъ гнездахъ (см. рис. 122 XL, съ правой стороны), вследствие чего винтъ при вращеніи около своей оси не имѣетъ поступательнаго движенія. Винтъ проходитъ черезъ гайку, прикрѣпленную къ горизонтальной площадкѣ, находящейся надъ винтомъ, при вращеніи винта гайка, а вмѣстѣ съ нею и площадка, получаютъ поступательное движеніе, величина котораго была бы строго пропорциональна углу поворота винта, еслибы парѣзка на немъ была абсолютно правильная. Особые приспособленія даютъ возможность поворачивать винтъ каждыи разъ на одинъ тотъ же уголъ и тѣмъ переѣзжать площадку на одну и ту же линейную величину. Рядомъ съ площадкой установленъ рѣзецъ, дающій возможность проводить черты на стержнѣ, прикрѣпленномъ къ площадкѣ параллельно ей и винта и переѣзжающемуся съ нею въ сторону при вращеніи винта. Во многихъ приборахъ, наоборотъ, рѣзецъ переѣзжается вмѣстѣ съ площадкой, а стержень неподвижно закрѣпленъ рядомъ съ нею, параллельно осѣи винта.

Въ деталяхъ различныя машины отличаются главнымъ образомъ тѣми

приспособленіями, которыми достигается поворотъ винта послѣдовательно на одинъ и тотъ же уголъ, и устройствомъ рѣзца, долженствующаго проводить черточки и притомъ, въ большинствѣ случаевъ, не одинаковой длины, но, какъ вѣтъ извѣстно, на масштабахъ обыкновенно каждую пятую и десятую черты дѣлають болѣе длинными, иногда-же попеременно идутъ черты средней длины и наиболѣе короткія (напр. при дѣленіи на подмилліметры) или въ inomъ определенномъ порядкѣ чередуются черты различной длины. Поворотъ винта на данный уголъ и возможность проведенія черточекъ надлежащей длины должны получаться автоматически, такъ, чтобы все вниманіе наносящаго дѣленія могло сосредоточиться на носяхъ или острій рѣзца на томъ, чтобы черточки выходили какъ слѣдуетъ, равномерно и ясно.

На рис. 121 представлена довольно простая дѣлительная машина. Здѣсь видны винтъ *F*, площадка *G*, на ней стержень *LI'* и рядомъ съ ней

Рис. 121.

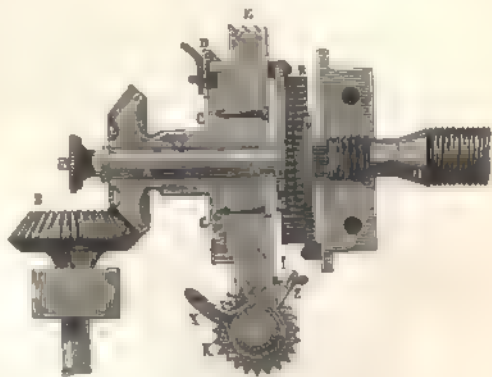


рѣзецъ, снабженный остриемъ *H*. Часть *ECBB'*, приводимая въ движеніе рукояткою *A* и служащая для автоматическаго поворота винта на данный уголъ, отдѣльно изображена на черт. 122, а рѣзецъ на черт. 123.

Вращеніе ручки *A* передается посредствомъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ конусообразныхъ зубчатыхъ колесъ *BB* (черт. 122) части *BGE* свободно насаженной на продолженію ось *AA* винта *NM*, на которую кромѣ того наглухо насажено зубчатое колесо *R*, при вращеніи котораго вращается слѣд. и винтъ. Въ зубцы колеса *R* упирается пружина *UF* расположенная такимъ образомъ, что при вращеніи части *BGE* по часовой стрѣлкѣ (если смотрѣть слѣва) конецъ *F* этой пружины свободно пере-скакиваетъ по зубцамъ, такъ что ось *AAM* остается неподвижною; пружина *U*, прикрѣпленная къ чугунной рамѣ (*MM* на черт. 121), поддерживающей винтъ, мѣшаетъ при этомъ пружинѣ *UF* увлекать за собою колесо *R*. При обратномъ вращеніи рукоятки, а слѣд. и части *BGE* конецъ *F* пружины упирается въ одинъ изъ зубчиковъ колеса *R*, которое вмѣстѣ съ винтомъ *M* поворачивается такъ, какъ еслибы часть *BGE* была наглухо-

насажена на ось *АА*. Для того, чтобы поворачиваніе рукоятки *А*, а слѣд. и винта, всегда происходило на одинъ и тотъ же заданный уголъ, имѣется узкій цилиндръ *Е*, снабженный винтовой нарезкою, съ которой сцеплено зубчатое колесо *К*, и двумя выступами *І* и *Д*, изъ которыхъ послѣдній можетъ быть закрѣпленъ въ любой точкѣ окружности круга *GG*, такъ что угловое разстояніе выступовъ *І* и *Д* можетъ быть сдѣлано какимъ угодно. На ось колеса *К* насажены еще два выступа *З* и *Х*, которые также могутъ быть закрѣплены въ любомъ другъ отъ друга угловомъ разстояніи. Легко понять, что при вращеніи системы *BGE* на 360° колесо *К* поворачивается на одинъ зубецъ. Вращеніе системы *BGE*, а слѣд. и рукоятки *А* (черт. 121) обратно часовой стрѣлкѣ (если смотрѣть слѣва,

Рис. 122.



черт. 122) задерживается, когда выступъ *І* ударитъ въ выступъ *З*; вращеніе въ обратную сторону останавливается, когда *Д* доидетъ до *Х*.

Теперь легко понять, какимъ образомъ получить повторенныя вращенія винта на данный уголъ и, какъ слѣдствіе, поступательныя движенія площадки *GG* (черт. 121) на заданную линейную величину. Положимъ, что ширина винтового хода равна 1 мм. и что требуется на стерѣнѣ нанести дѣленія въ $\frac{1}{n}$ -тую долю миллиметра. Тогда устанавливаютъ выступъ *Д* такъ, чтобы

то угловое разстояніе отъ выступа *І* равнялось $\frac{1}{n}$ -той части окружности; въ то же время закрѣпляютъ выступы *З* и *Х* такимъ образомъ, чтобы *І* и *Д* съ ними встрѣчались при поворотахъ системы *BGE* въ ту или другую сторону на $\frac{360}{n}$ градусовъ. Если напр. дѣленія масштаба должны равняться $0.1 = 0.25 = 0.5$ или 1 мм., то угловыя разстоянія *І* и *Д* соответственно должны равняться 36° , 90° , 180° и 360° или 0° (т. е. *І* и *Д* должны быть расположены другъ противъ друга). Если дѣленія масштаба должны быть больше одного миллиметра и напр. равняться 1.5 или 5 мм., то выступъ *Х* слѣдуетъ перемѣстить въ сторону такъ, чтобы *Д* могъ одинъ или, во второмъ случаѣ, четыре раза свободно пройти мимо колеса *К* и только въ второмъ или, соответственно, пятомъ оборотѣ удариться въ выступъ *Х*, который вмѣстѣ съ колесомъ *К* медленно поворачивается въ ту или другую сторону. Понятно, что въ первомъ случаѣ угловое разстояніе выступовъ *І* и *Д* должно равняться 180° , а во второмъ 0° .

Вращая рукоятку попеременно въ ту и другую стороны до взаимнаго трюкосновенія двухъ выступовъ *І* и *З* или *Д* и *Х*, мы при вращеніи слѣва (обратно часовой стрѣлкѣ) оставляемъ винтъ неподвижнымъ; при

вращении направо поворачиваемъ винтъ на опредѣленный уголъ и перемѣщаемъ площадку на заданную линейную величину.

Чтобы вращение колеса R и винта начинались одновременно съ вращениемъ части BGE , необходимо, чтобы конецъ пружины UF плотно входилъ въ одинъ изъ зубцовъ колеса R , когда положеніе частей соответствуетъ чертежу 122. Далеѣ легко сообразить, что число зубцовъ колеса R должно дѣлиться безъ остатка на число n , т. е. что на угловое разстояніе выступовъ I и X должно приходится на колесе R цѣлое число зубцовъ.

Равнымъ вращениемъ винта тогда только будутъ соответствовать равныя перемѣщенія площадки, когда ширина оборотовъ винта на всемъ протяженіи

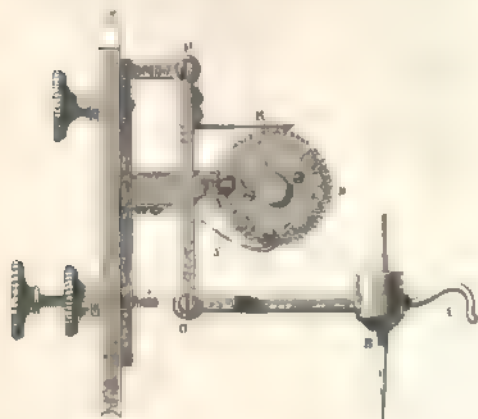
винта одна и та же. На дѣль этого не бываетъ и потому нарезка винта дѣлительной машины должна быть подвергнута тщательному изслѣдованію; не слѣдуетъ также забывать о вліяніи температуры на ширину винтовой нарезки.

На рис. 123 изображенъ сравнительно весьма простой рѣзецъ, снабженный ножомъ H , который прикреплень къ рамкѣ POH , имѣющей въ P и O шарниры. Два зубчатыхъ колеса D и V , надетыя на общую ось, расположены такъ, что выступъ X находится въ плоскости мень-

шаго колеса V . На рис. 121 лучше видны рамка PO и общее расположеніе частей рѣзца, изображеннаго на рис. 123 сбоку.

Черточки проводятся слѣдующимъ образомъ: поворачивая ножъ H за крючекъ U , перемѣщаемъ его направо до тѣхъ поръ, пока выступъ X не упрется въ край колеса V , опускаемъ ножъ на поверхность стержня, на которомъ дѣлають нарезку и отодвигають его назадъ до тѣхъ поръ, пока вѣнная часть O рамки (см. рис. 123 и 121) не упрется въ винтъ T предварительно установленный надѣвающимъ образомъ. Для получения въ опредѣленномъ порядкѣ черточекъ различной длины сдвигать впадины соответственно распределенныя вдоль края колеса V и пружина R , поворачивающія колеса D , а вмѣстѣ съ нимъ и колесо V на одинъ зубецъ перваго каждыиъ разъ, когда ножъ и рамка перемѣщаются нагѣво (въ смыслѣ чертежа 123), т. е. когда проводится черта. Выступъ X попеременно будетъ упираться на вѣнныиъ край колеса V или входить въ одну изъ болѣе или менѣе глубокихъ впадинъ, вслѣдствіе чего черточки и будутъ выходить различной длины. Распределеніе и глубина впадинъ легко опредѣляются въ зависимости отъ того, въ какомъ порядкѣ должны чередоваться черточки и на какой уголъ поворачиваются колеса D и V при каждомъ перемѣщеніи рамки PO .

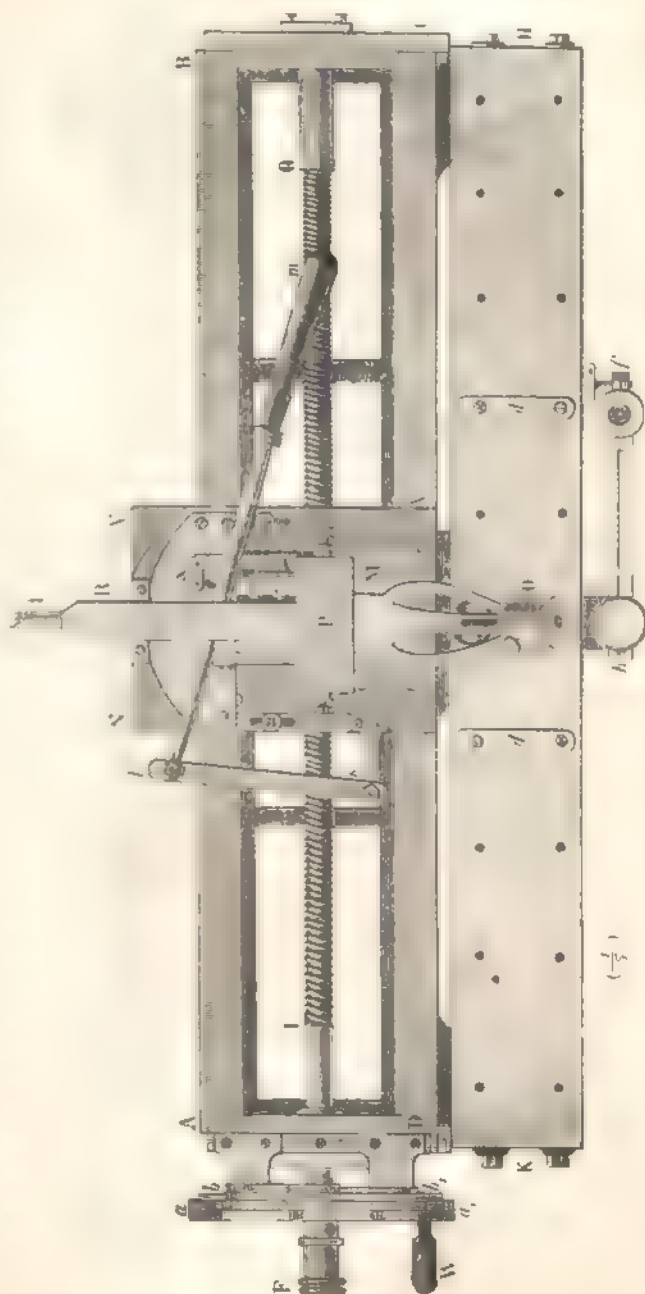
Рис. 123.



Переходимъ къ краткому описанію болѣе точной дѣлительной машины петербургскаго механика Брауэра: описаніе и рисунки заимствуемъ изъ курса физики проф. О. О. Петрушевскаго. Машина Брауэра изображена (въ $\frac{1}{2}$ ея величины) на черт. 124 въ планѣ, а на черт. 125 сбоку, если смотрѣть со сторонъ *КН* (на рис. 124). На черт. 126 изображенъ отдѣльно рѣзецъ и на черт. 127 одна его часть. На всѣхъ 4-хъ чертежахъ одинакія буквы соответствуютъ однимъ и тѣмъ же частямъ машины. Приводимое нами описаніе имѣетъ въ виду всѣ 4 чертежа, на которыхъ и слѣдуетъ отыскивать приводимыя буквы.

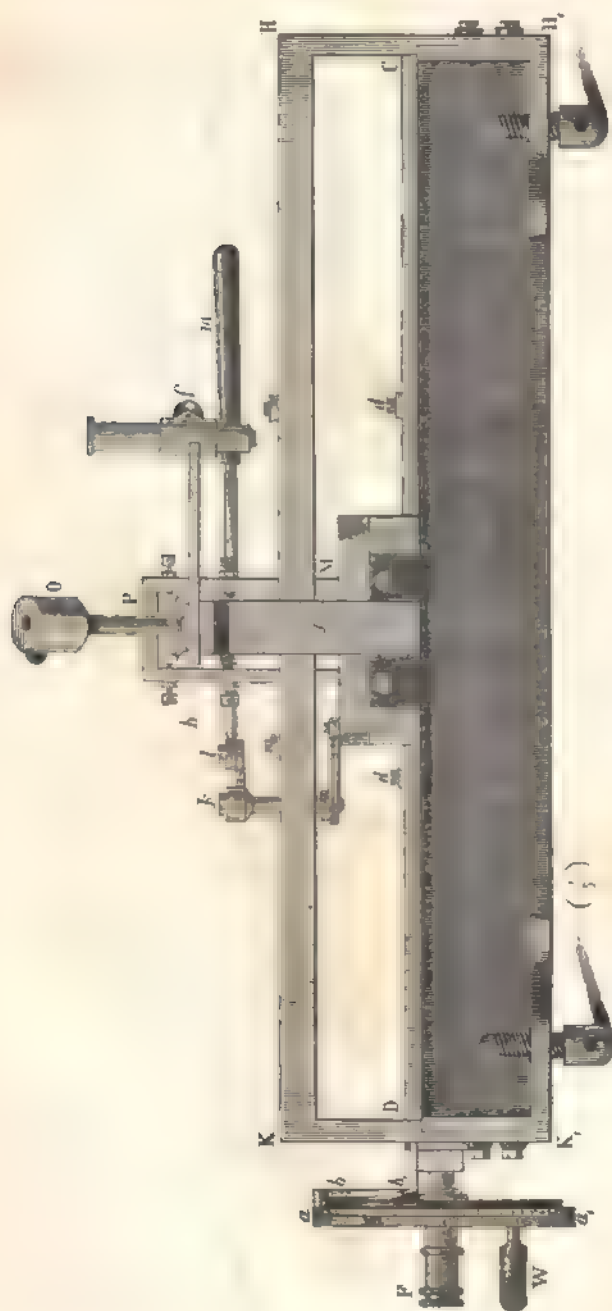
На рис. 124 виденъ винтъ *LQ*, на продолженную ось котораго насажена головка *aa*₁, раздѣленная на 100 частей; но-мѣсь (см. ниже: Глава I, § 2) *b* даетъ возможность измѣрить уголъ поворота винта, производимаго рукояткою *W*, съ точностью до 0.001 окружности. Винтъ проходитъ черезъ гайку, прикрѣпленную къ салазкамъ *U* *U'*, скользящимъ по верхнему краю рамы *ABCD*. На салазкахъ помѣщенъ рѣ-

Рис. 124.



образомъ перемѣщается параллельно винту, при его вращеніи. Между салазками находится пластинка *M* (рис. 126), которая можетъ имѣть движеніе

Рис. 125.



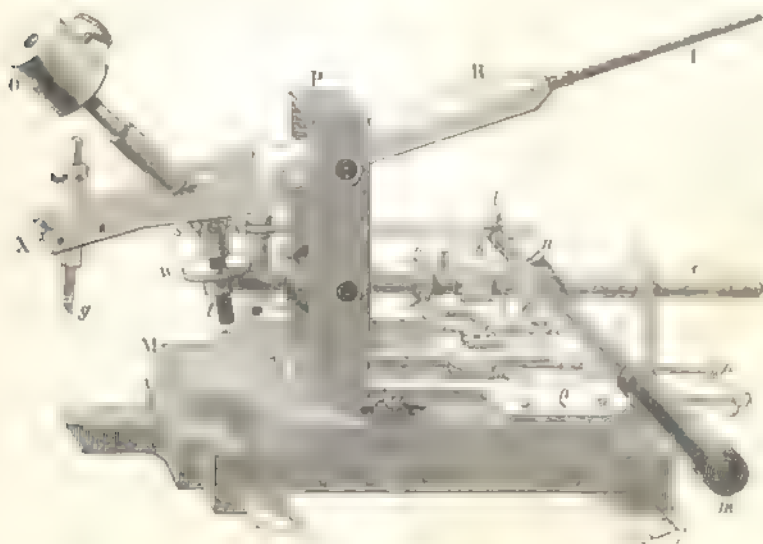
по направленію длины, т.е. перпендикулярно къ оси винта.

Устройство рѣзца (рис. 126 и 127) слѣдующее: Къ *M* придѣлана рама *P*, поддерживающая рычагъ *TRX*, къ концу котораго прикрѣпленъ ножъ *y*. Этотъ ножъ автоматически приподнимается, перемѣщается къ той точкѣ, гдѣ должно быть начало черточки, опускается внизъ до соприкосновенія острія съ поверхностью стержня, на которомъ предполагается начертить шкалу, перемѣщается въ горизонтальномъ направленіи на длину черточки и вновь приподнимается.

Манипуляція повторяется, когда надлежащимъ вращеніемъ головки *aa*, (рис. 125) весь рѣзецъ передвинуть до того мѣста, гдѣ должна быть проведена вторая черта на стержнѣ, неподвижно закрѣпленномъ на чугунномъ столикѣ *KN* съ помощью пластинокъ *dd*, которыя могутъ быть привинчены къ *KN* въ различныхъ другъ отъ друга разстояніяхъ. Указанныя движенія ножка *y* получаютъ при помощи особыхъ частей машины. Стержень *e*, свободно проходящій черезъ подставку *i* и черезъ ша-

рикъ, находящийся внутри рамки P , приводится въ движеніе при помощи стержня kl , прикрѣпленнаго къ неподвижному столбѣ k и рычага lm , который скрѣпленъ съ нимъ въ l и который оканчивается рукояткою m . Дѣй крутясь пластинки o и o' , ударяясь объ упомянутый шарикъ, ограничиваютъ скольженіе стержня e , который при помощи колесика z производитъ поднятіе или опусканіе ножа g . Если продолжать движеніе рукоятки m послѣ того, какъ o или o' коснулись шарика, то вся пластинка M приходитъ въ движеніе, а вмѣстѣ съ нею рама P и ножъ g . Такимъ образомъ получается перемѣщеніе опущеннаго рѣза направо (это положеніе изображено на рис. 126), причемъ проводится черта, и обратное перемѣщеніе ножа, когда онъ приподнимается. Для полученія черточекъ же-

Рис. 126.



лаемой длины служатъ винты δ и φ (последній не изображенъ на рис. 127), проходяще черезъ части π и π' , составляющія одно цѣлое съ пластинкою ρ , которая прикрѣплена къ салазкамъ. Эти винты ограничиваютъ положеніемъ своихъ концовъ движеніе пластинки M въ салазкахъ, упираясь въ колесо u_1 , вращающееся вмѣстѣ съ храповымъ колесомъ u около оси, идущей къ пластинкѣ M . Звѣзика z , прикрѣпленная помощью изогнутой части uu къ стержню e , заставляеть колесо u , снабженное всего десятью лопатками, повернуться на одинъ зубецъ, причемъ на одинаковый уголъ (6°) поворачивается и колесо u_1 . Это послѣднее снабжено двумя диаметрально противоположными выемками, глубина которыхъ можетъ быть регулирована винтиками (хорошо видно на рис. 127), помѣщенными на дѣйствующей. Черезъ каждыя четыре выемки взадъ и впередъ винтъ δ входитъ въ одну изъ выемокъ, въ дѣйствіе чего пятая и десятая черты получаютъ длиннѣе и притомъ, обыкновенно, десятая длиннѣе пятой. Вращая

два упомянутых винтика, можно вполне уничтожить действие выемки, если требуется, чтобы все черточки имѣли одинаковую длину.

Для опредѣленія величины хода винта, т. е. перемѣщения рѣзца при одномъ его полномъ оборотѣ, а также для изслѣдованія самого винта, перемѣщаютъ на столѣ *КН* (рис. 124) вѣрный масштаб, наводятъ микроскопъ *Г* (рис. 124 и 125), прикрѣпленный къ салазкамъ, на одну изъ черточекъ и вращаютъ головку *аа*₁ винта до тѣхъ поръ пока микроскопъ не передвинется на известное число дѣлений масштаба. Искомый ход винта и будетъ равняться этому числу, дѣленному на число произведенныхъ оборотовъ винта. Затѣмъ уже легко опредѣлить тотъ уголъ, который слѣдуетъ поворачивать головку *аа*₁ винта послѣ каждой про-

веденія черточки, если дано разстояние, на которомъ эти послѣднія должны находиться другъ отъ друга.

Мы не останавливаемся на роли, которую играетъ второй новіусъ *б*₁, помѣщенный у головки *аа*₁ большого винта *ЛQ*.

Копирующая линейная дѣлительная машина служитъ для получения шкалы на некоторомъ стержнѣ *A*, тождественной съ уже готовой шкалой на образцовомъ масштабѣ *B*. Ограничиваемся указаніемъ на идею

устройства подобныхъ машинъ. Стержень *A* и масштабъ *B* закрѣпляются параллельно другъ другу, надъ *A* находится рѣзецъ *C*, надъ *B* — микроскопъ *D*. Разстояние рѣзца *C* и микроскопа *D* и точно также стержень *A* и масштабъ *B* другъ отъ друга остаются неизмѣнными. Одна изъ двухъ системъ *A* и *B* или *C* и *D* можетъ перемѣщаться, хотя бы помощью винта и гайки, какъ въ вышеописанныхъ дѣлительныхъ машинахъ, и направленно длины стержня *A* и масштабъ *B*. Копированіе производится слѣдующимъ образомъ. Перемѣщая подвижную систему, подводятъ одно изъ дѣлений масштаба подъ микроскопъ (т. е. заставляютъ его совпасть съ нитью, которая была въ серединѣ поля зрѣнія микроскопа) и рѣзцомъ проводятъ черту по стержню *A*. Затѣмъ подводятъ сошедшее съ первымъ дѣленіемъ масштаба подъ микроскопъ, опять проводятъ черту и повторяютъ то же самое съ такимъ числомъ дѣлений масштаба, сколько желаютъ нанести дѣлений на стержнѣ. Легко понять, что всякая обыкновенная дѣлительная машина, снабженная микроскопомъ, можетъ служить машиною копирующей, если рядомъ со стержнемъ, на которомъ должны быть нанесены дѣленія, можетъ быть закрѣпленъ образцовый масштабъ.

§ 2. Дѣлительная машина круговая. Она служитъ для нанесенія дѣленій на кругахъ и рѣзницахъ наиболѣе важную роль въ приборахъ, въ которыхъ приходится измѣрять уголъ вращенія какой-либо ихъ части. Кругъ

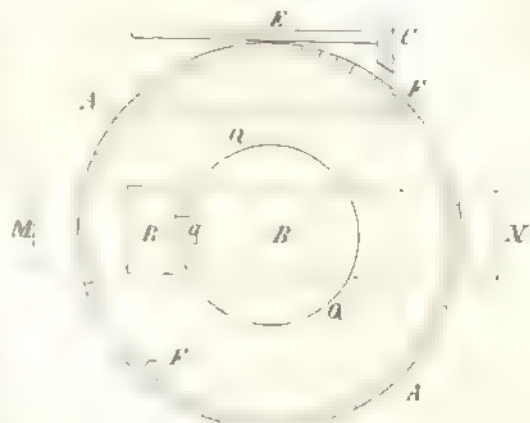


Рис. 127.

вая дѣлительная машина есть машина копировальная: она служитъ для перенесенія на данный кругъ тѣхъ дѣленій, которыя уже имѣются на готовомъ, горизонтально расположенномъ образцовомъ кругѣ, составляющемъ самую существенную и цѣнную ея часть.

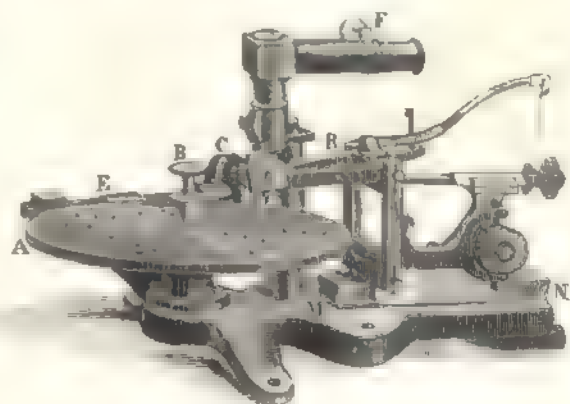
Идея устройства дѣлительной крутовой машины можетъ быть понята изъ схематическаго чертежа 128. Образцовый кругъ AA , насаженный на ось B и снабженный вдоль края зубцами, приводится во вращеніе при помощи безконечнаго винта E , головка C котораго имѣетъ дѣленія. Надъ дѣленіями круга AA помѣщается одинъ или нѣсколько микроскоповъ FF . Кругъ QQ , на который желаютъ перенести дѣленія круга AA закрѣпляется надъ послѣднимъ, концентрически съ нимъ, на общей оси B . Рыцецъ R перемѣщается вдоль салазокъ, составляющихъ какъ бы мостъ MV , перекинутый черезъ кругъ AA , или расположенныхъ сбоку

Рис. 128.



отъ него по направленію его радіуса. Смотри по величинѣ радіуса круга QQ , закрѣпляють рыцекъ на такомъ имѣть стикъ салазокъ, чтобы остріе ножа приходилось надъ тѣмъ мѣстомъ этого круга QQ , гдѣ желаютъ получить дѣленія. Вращая головку C винта E , подводятъ послѣдовательно одно дѣленіе круга AA за другимъ подъ микроскопъ F , и каждый разъ проводятъ поломъ a черту по поверхности круга QQ , вращающагося вмѣстѣ съ кругомъ AA . Рыцекъ и здѣсь устроенъ такъ, чтобы ножъ автоматически поднимался, опускался и проводить въ немой послѣдовательности черты различной длины.

Рис. 129.



Если пользоваться дѣленіями головки C винта E , то можно, не приходя къ микроскопамъ F , наносить на кругъ QQ равноотстоящія дѣленія, тѣмъ пользуются, когда не требуется большой точности или когда напо-

сятся дѣленія, которыя не должны непременно соответствовать опредѣленнымъ, напередъ заданнымъ условнымъ величинамъ.

На черт. 129 изображена одна изъ круговыхъ дѣлительныхъ машинъ. Буквы поставлены соответственно схемѣ на черт. 128. Кругъ QQ (схемѣ

Рис. 130.



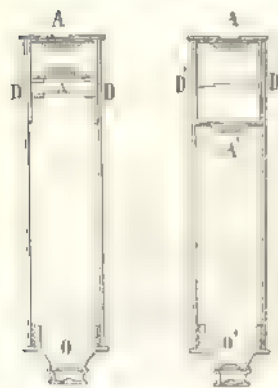
здѣсь не изображенъ. Ясно виденъ образцовый кругъ A , безконечный винтъ E съ головкой C , снабженный нониусомъ, часть B , служащая для закрѣпленія второго круга (Q схемы) на общую съ кругомъ ось, микроскопъ F (въ данномъ

случаѣ локанный) и рѣзецъ R , ношъ котораго можно установить на произвольномъ разстояніи отъ оси, перемѣщая рѣзецъ вдоль салазокъ MN , расположенныхъ здѣсь сбоку, а не въ видѣ моста. Специальное устройство рѣзца не разсматриваемъ. Кругъ A раздѣленъ на шестыя доли градуса, его діаметръ 25 см.

Въ 1893 г. была построена въ Вашингтонѣ круговая дѣлительная машина, производящая дѣленіе круговъ вполне автоматически. Полное дѣленіе окружности на 360×12 частей (такъ что одно дѣленіе соответствуетъ 5 мин.) оканчивается втеченіе 8 часовъ.

§ 3. Уровень. Этотъ вспомогательный приборъ, служащій для горизонтальной установки какой-либо плоскости, какъ извѣстно изъ началъ

Рис. 131.



нато курса физики, состоитъ изъ горизонтальной трубки, внутренняя поверхность которой въ верхней части слегка изогнута по дугѣ окружности большого радиуса. Трубка почти наполнена легкоиспаряемой жидкостью, кромѣ того въ ней находится пузырекъ газа, обыкновенно берется эфира. Параллельная верхняя поверхность снабжена дѣлениями, на серединѣ которыхъ и устанавливается пузырекъ, когда ось трубки горизонтальна, онъ перемѣщается въ сторону, когда эта ось наклонена къ горизонту.

На черт. 130 изображенъ уровень, прикрѣпленный къ пластинкѣ L ; пузырекъ виситъ въ M . Помощью винта V слѣдуетъ прежде всего установить трубку такъ, чтобы пузырекъ M находился между точками 00 , когда нижняя поверхность L строго горизонтальна. Манипуляціи, коими это достигается, мы, какъ и все подобныя, опускаемъ.

Данная плоскость горизонтальна, когда въ двухъ условныхъ, расположенныхъ на ней въ направленныхъ взаимно перпендикулярныхъ, пузырьки устанавливаются въ серединѣ. Можно пользоваться и однимъ уровнемъ послѣдовательно наблюдаемымъ въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ положеніяхъ.

Существуют круглые уровни, плоская поверхность крышки которых есть малая часть поверхности сферы большого радиуса. Горизонтальность поверхности, на которой помещенъ такой уровень, обнаруживается тѣмъ, что пузырекъ устанавливается въ серединѣ крышки, отмѣченной маленькимъ кружкомъ. Эти уровни менѣе чувствительны, чѣмъ цилиндрическіе.

Необходимо имѣть въ виду, что размѣры пузырька въ значительной степени мѣняются въ зависимости отъ температуры.

§ 4. Лупа, микроскопъ и зрительная труба. Для детальнаго разсмотрѣнія мелкихъ дѣлений или другихъ малыхъ предметовъ приспособляютъ ко многимъ приборамъ удобоупотребительныя лупы или микроскопы, хорошее освѣщеніе разсматриваемаго объекта играетъ при этомъ весьма важную роль. Для разсматриванія болѣе удаленныхъ предметовъ употребляютъ зрительныя трубы; онѣ, равно какъ и микроскопы, даютъ вообще изображенія обратныя.

Какъ извѣстно, микроскопы и зрительныя трубы содержатъ двѣ системы стеколъ, предметную (объективную) и глазную (окуляръ). Предметная система даетъ обратное дѣйствительное изображеніе въ фокальной плоскости лежащей отъ нея дальше главнаго фокуса. Это изображеніе и разсматривается при помощи окуляра, играющаго роль простой или сложной лупы, дающей увеличенное, мнимое изображеніе. Въ фокальной плоскости, которая въ зрительныхъ трубахъ всегда близка къ главному фокусу предметной системы, помещаются весьма тонкія нити (проводки или паутина), которыя и видны въ полѣ зрѣнія одновременно съ разсматриваемымъ предметомъ. На рис. 131 изображены, въ предѣльномъ раздѣлѣ, два микроскопа, O и O' предметная, болѣе или менѣе сложная система стеколъ, которая въ дѣломъ зеркалѣ даетъ изображеніе предмета въ фокальной плоскости DD , содержащей нити. Глазная система состоитъ изъ двухъ плоско-выпуклыхъ стеколъ, обращенныхъ выпуклостями другъ къ другу и составившихъ т. наз. окуляръ Рамздена. На правомъ чертежѣ изображенъ окуляръ Гюйгенса: два плосковыпуклыхъ стекла обращены оба плоскими сторонами къ глазу наблюдателя. Фокальная плоскость $P'P'$ и нити расположены между стеклами, такъ что, строго говоря, внутреннее стекло A' должно бы считаться за часть предметной системы.

На рис. 132 изображены кольца, которыя помещаются въ фокальныхъ плоскостяхъ микроскоповъ и зрительныхъ трубъ, съ натянутыми въ нихъ системами нитей, различно расположенныхъ, смотря по цѣлямъ, для которыхъ назначенъ приборъ.

Подробности объ устройствѣ зрительныхъ трубъ будутъ изложены во второмъ томѣ.

Рис. 132.



ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Измѣреніе линейныхъ размѣровъ тѣлъ.

§ 1. Эталоны длины. Въ предыдущей главѣ мы рассмотрѣли нѣкоторые изъ приборовъ, которые не могутъ быть непосредственно причислены къ измѣрительнымъ приборамъ, но которые играютъ важную роль или въ изготовленіи послѣднихъ, или какъ ихъ составныя части. Въ остальныхъ главахъ этого отдѣла мы рассмотримъ способы измѣренія нѣкоторыхъ длинъ, уже упомянутыхъ на стр. 234, какъ измѣняются остальные причины, которыя будутъ встрѣчаться въ дальнѣйшихъ частяхъ нашего курса, будетъ указано въ соответственныхъ мѣстахъ.

Чтобы имѣть возможность производить точныя измѣренія длинъ, должны сравнить шкалы нашихъ приборовъ со шкалою заведомо правильной, а для этого мы должны имѣть точные эталоны длины.

Эталоны длины бываютъ двухъ родовъ: 1) эталоны концовъ (à bout), мало точные, въ которыхъ длина определяется разстояніемъ

Рис. 133



опредѣленной температурѣ двухъ параллельныхъ касательныхъ къ поверхности проведенныхъ перпендикулярно къ эталону, къ своимъ закругленнымъ его концамъ; 2) эталоны нитрѣзные (à fil) въ которыхъ представляемая длина равна разстоянію при опредѣленной температурѣ двухъ черточекъ, проведенныхъ на ихъ поверхности перпендикулярно къ ихъ длинѣ.

Точнѣйшие эталоны метра изготовляются въ настоящее время въ Международномъ бюро мѣръ и вѣсовъ учрежденномъ на общій счетъ всѣхъ цивилизованныхъ государствъ въблизи Парижа. Эти эталоны дѣлаются изъ сплава 90% платины и 10% иридия, плотность котораго 21,53, ихъ форма изображена на рис. 133. Поперечное сѣченіе походитъ на букву X, принято въ виду того что въ такой формѣ эталонъ наименѣе подверженъ гнущемуся. Крайніе черточки нарисованы на горизонтальной поверхности доски, составляющей дно впадины, на разстояніяхъ въ 1 см. отъ концовъ, эта поверхность проходитъ черезъ центръ тяжести эталона. Первымъ прототипомъ метра считали эталонъ изготовленный въ 1799 г. (на немъ начертаны слова *pour tous les temps, pour tous les peuples*). Международной комиссіей была сперва изготовлена копія съ этого эталона и затѣмъ уже съ нея скопированы тѣ первые 31 эталона, которые въ 1891 г. по дробно были распределены между государствами, участвовавшими въ устройствѣ Международнаго бюро мѣръ и вѣсовъ. Россія получила при этомъ два эталона, а именно метры № 11 и № 28.

Метръ № 11 хранится при Академіи Наукъ; его длина

$$1 \text{ метръ} = 0.5\mu + [8,650t + 0.00100t^2]\mu,$$

где μ — знак микрона т.е. 0,001 мм., и t — температура по Цельзиусу. Метръ № 28 находится въ Главной Палатѣ мѣръ и всѣмъ его длина

$$1 \text{ метръ} + 0,5\mu + [8,650t + 0,00100t^2]\mu.$$

Благодаря странной случайности оказывается такимъ образомъ, что среднее изъ длинъ этихъ двухъ метровъ при 0° какъ разъ равняется одному метру.

Истинная длина метра вывъ принятаго за единицу длины, опредѣляется совокупностью эталоновъ, распределенныхъ въ 1891 г. между государствами, служащихъ каждый въ своемъ государствѣ основнымъ прототипомъ единицы длины и не отличающихся между собою по величинѣ замѣтнымъ при современномъ развити техники и способамъ измѣренія ея конечно, принять во внимание поправки подобныя вышеприведеннымъ и данныя для каждаго изъ эталоновъ.

(Guillaume (J. de phys 1894 p. 215) предлагать устранивать эталоны второго разряда (богѣ дешевые) изъ пиккета.

Для сравненія между собою различныхъ эталоновъ длины служить приборъ, называемый компараторомъ. Идея на которой основано его устройство, будетъ указана ниже въ § 4.

Неоднократно поднимался вопросъ о возможности потери или постепеннаго измѣненія нѣмъ установленной единицы длины вѣдѣеъ какихъ либо великихъ катастрофъ или вѣдѣеъ постепенной порчи эталоновъ. Желательно было найти возможность съ точностью вновь восстановить длину метра, еслибы она была утеряна. Американскій ученый Michelson указалъ на такую возможность, основанную на опредѣленн отношеніи метра къ таковой длинѣ, которая могла бы быть получена на основанн наблюденн опредѣленнаго явленн, зависящаго только отъ основныхъ свойствъ матеріи или эфира. Такимъ явленіемъ представляется распространене свѣтовыхъ колебанн черезъ воздухъ, находящійся при опредѣленной температурѣ и при опредѣленномъ давленіи.

Мы неоднократно упоминали, что свѣтъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ гармоническое колебательное движеніе, которое распространяется въ эфирѣ средѣ называемой эфиромъ. Разноцвѣтные лучи отличаются другъ отъ друга періодомъ колебанія и лучъ каждаго даннаго цвѣта (преломляемости) соответствуетъ опредѣленная длина волны λ . По мысли Michelson'a слѣдуетъ принять длину волны опредѣленнаго луча при строго формулированныхъ условіяхъ какъ бы за первичную единицу длины и разъ всегда опредѣлить ея отношеніе къ метру. Для этой цѣли Michelson выстрѣлъ три луча, красный, зеленый и голубой, испускаемые накаленными парами кадміи. Michelson нашелъ что въ воздухѣ при 15° C. и давленіи въ 0,76 метра

$$\text{для луча краснаго} \dots\dots\dots 1 \text{ метръ} = 1553163,6 \lambda_1.$$

$$\text{для луча зеленаго.} \dots\dots\dots 1 \text{ метръ} = 1966249,7 \lambda_2.$$

$$\text{для луча голубого} \dots\dots\dots 1 \text{ метръ} = 2083372,1 \lambda_3.$$

гдѣ λ_1 , λ_2 и λ_3 длины волнъ трехъ выданныхъ лучей.

Отсюда

$$\lambda_1 = 0,64384722 \mu$$

$$\lambda_2 = 0,50858240 \mu$$

$$\lambda_3 = 0,47999107 \mu,$$

где $\mu = 0,001$ мм.

(Michelson, Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures, t. XI, Journ. de phys. (3) 3 p. 5, 1894).

§ 2. Нониус. Этот прибор служит для отчета десятых долей делений на масштабах. Он представляет маленькую линейку, скользящую вдоль масштаба и снабженную десятью делениями, общая длина которых равна девяти (рис. 134) или одиннадцати (рис. 135) делениям масштаба. В обоих случаях одно деление нониуса отличается от одного деления масштаба на 0,1 последнего. В первом случае деления нониуса

Рис. 134.

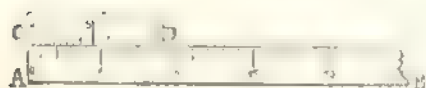
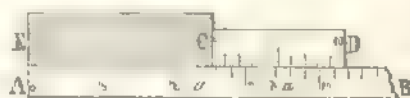


Рис. 135.



должны идти в ту же сторону, как и деления масштаба (рис. 134 и 135), во втором случае деления нониуса идут в противоположную сторону (рис. 136). На рис. 135 показано, как помощью нониуса CD измерится длина EC на масштабе AB с точностью до 0,1 деления последнего. Когда нониус придвинут к EC , то седьмое его деление совпадает с одним из делений масштаба. Шестое деление нониуса отстоит на 0,1 от ближайшего деления масштаба; пятое на 0,2, четвертое на 0,3 и т. д. Легко понять, что длина $EC = 12,7$ делениям масштаба, такую же длину имеют EC' и на рис. 136.

Рис. 136.



У нас употребляются почти исключительно нониусы первого рода и отсчитывается та точка шкалы, против которой находится нулевая черта нониуса. Целые деления шкалы отсчитываются непосредственно, а число десятых долей деления определяется номером той черты нониуса, которая совпадает с чертой масштаба.

§ 3. Микрометры. Под этим названием подразумеваются приборы или приспособления к частям приборов, служащие для измерения линейных размеров весьма малых тел.

Для измерения тел микроскопических применяют иногда такой способ. В фокальной плоскости объектива микроскопа, где могут находиться нити (стр. 201), помещают тонкую стеклянную пластинку, на которой начерчены деления видя параллельных, довольно длинных, равноотстоящих друг от друга черточек (см. рис. 137 и 138). Положим, что таких делений n в 1 мм. Через окуляр мы увидим одновременно эти

деления и изображение измеряемого предмета, полученное объективомъ. м. рис. 138. Такимъ образомъ непосредственно определяются размеры этого изображения. Истинный размеръ предмета въ k разъ меньше, если k увеличение, произведенное объективомъ. Чтобы определить k , рассматриваютъ

Рис. 137.

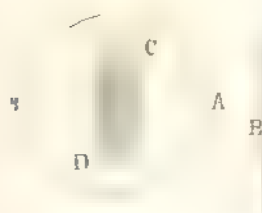


Рис. 138.

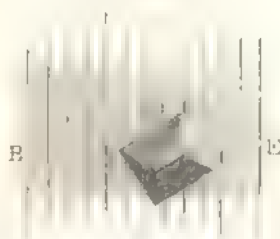


Рис. 139.

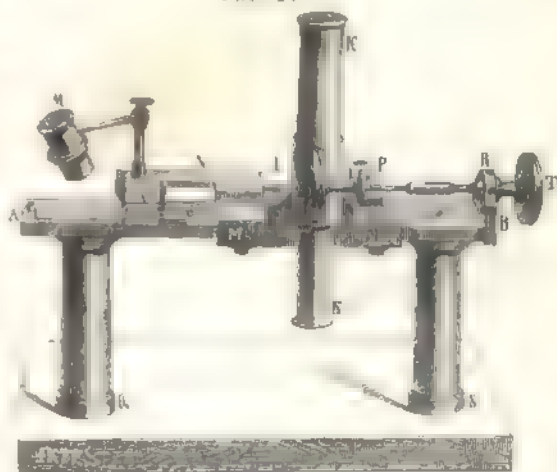


с микроскопъ другою, настолько мелкою вспомогательною шкалою, чтобы въ полевъ зрѣнія были видны нѣсколько ея черточекъ; положимъ, что такая шкала въ 1 мм. На рис. 139 изображено поле зрѣнія съ двумя одновременно видимыми шкалами, причемъ 1-1—2-2—3-3 сѣть деления вспомогательной шкалы. Опредѣляютъ какое число делений одной шкалы покрывается опредѣленнымъ числомъ другой, а отсюда сколько делений окуляриной

шкалы (положимъ p) равны одному делению изображения вспомогательной шкалы, кажу- щаяся величина котораго равна $\frac{k}{m}$ мм. Равенство $\frac{k}{m} = \frac{p}{n}$ есть намъ искомое число k .

Существуетъ множество микрометровъ, въ которыхъ измереніе основано на опредѣленіи числа оборотовъ винта, снабженнаго весьма мелкой и равномерной нарезкой и вращающагося въ соответствующей гайкѣ; такой винтъ называется микрометрическимъ. Если оборота винта отчитываются на его головкѣ, снабженной неподвижнымъ указателемъ, или шпиготомъ, конусомъ, причиняющаго вращеніе винта и вызваннаго имъ поперечнаго движенія сѣтчатой линіи или какой-либо части прибора, опредѣляются искомые размеры тѣлъ.

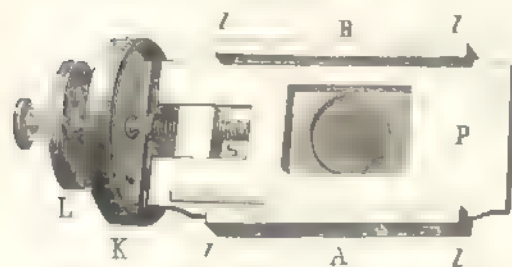
Рис. 140.



На рис. 141 изображенъ микрометръ, который также служитъ для измерения линейныхъ размеровъ тѣлъ, помощью микроскопа, окуляра котораго снабженъ шпиготомъ. Въ столбикъ микроскопа прикреплена рамка

AB, связанная съ болтомъ *S* въ которомъ выгнана гайка винта. Головка *K* скрѣпляется въ произвольномъ положеніи съ болтомъ при помощи кружка *L*. При вращеніи винта передвигается пластинка *P*, снабженная круглымъ отверстиемъ, которое прикрыто стеклышкомъ. На это стеклышко кладется разсматриваемый предметъ, причемъ измѣряемой его длина должна быть параллельна оси винта. Вращая головку *K*, заставляютъ сперва изображение одного а затѣмъ другого конца измѣряемой длины совпасть съ

Рис. 141.



точкою пересѣченія нитей и каждый разъ дѣлають отчетъ положенія винта, причемъ цѣлые обороты отчитываются на шкалѣ, находящейся на пластинкѣ *P*, а доли оборота на головкѣ *K*. Разность двухъ отчетовъ и дастъ искомую длину.

На рис. 140 изображенъ простейшій микрометръ: на стоечкѣ *AB* находится масштабъ *Cd*, парал-

лельно которому перемѣщается часть *MM*, несущая на себѣ микроскопъ *KK* и полнусъ *V*, для отчета котораго служатъ цѣпа *M*. Перемѣщеніе микроскопа производится вращеніемъ винтовой головки *I*. Предметъ кладется на микропъ пластинку подъ микроскопъ *KK* такъ, чтобы измѣряемая длина была параллельна масштабъ *Cd*, т.е. направлению движенія микроскопа. Надо бы нить окуляра, перпендикулярно къ этому направлению и в

Рис. 142.



точку пересѣченія двухъ нитей сперва на одинъ, а потомъ на другой конецъ измѣряемой длины и отсчитывая каждый разъ полнусъ *V*, находимъ по разности двухъ отчетовъ эту длину.

Къ микрометрамъ относятся обыкновенно и приборъ, изображенный на рис. 142, и служащій для измѣренія толщины пласти-

нокъ и проволоки. Если вращать головку *D*, то трубка *E* и винтъ *C* получаютъ поступательное движеніе. Измѣряемый предметъ помещается между *C* и выступомъ съ лѣвой стороны, винтъ прибоитъ сперва съ непосредственнымъ соприкосновеніемъ съ выступомъ причемъ дѣлается первый отчетъ на шкалѣ *B*, раздѣленной на миллиметры и на трубкѣ *E* окружность которой раздѣлена на 100 частей. Когда лѣвый конецъ винта *C* влирается въ выступъ или въ измѣряемый предметъ, то дальнейшее вращеніе головки *D*, не плотно соединенной съ винтомъ, не увеличиваетъ степени нажатія винта на выступъ или тѣло.

§ 4. Окулярный микрометръ. Этотъ важный измѣрительный приборъ приписывается къ окуляру микроскоповъ и зрительныхъ трубъ. Онъ помещается въ плоской коробкѣ *P* (рис. 143) окружающей окулярную

трубку *A*. Снаружи видна головка *M* микрометричнаго винта, служащая для перемещенія одной или нѣсколькихъ витѣй окуляра параллельно самимъ себѣ. Внутреннее устройство микрометра показано на рис. 144. Ось *mF* винта проходитъ черезъ стѣнку коробки и черезъ кольцо и при вращеніи не имѣетъ поступательнаго движенія. Винтъ проходитъ черезъ гайку, къ которой прикреплена рамка *R*, а къ этой рамкѣ нить *cd*. Нарѣзки гайки прилегаютъ къ нарѣзкамъ винта при помощи цѣпочки *K* и пружины, находящейся внутри барабана *S*. Этимъ уменьшается мертвый ходъ винта. Дно коробки *B* снабжено круглымъ отверстиемъ, да въ взаимно перпендикулярныя неподвижныя нити, изъ которыхъ на рис. 144 изображена только одна *ab*, а на отдѣльномъ рис. 145 показаны оныя, расположенныя по диаметрамъ отверстія, или точка пересѣченія должна лежать на оси прибора.

Если вращать головку *M* винта, то гайка, а съ нею и рамка *R* и нить *cd* перемѣщаются по направлению оси винта. Чтобы измѣрить длину какой либо линіи необходимо чтобы ея изображеніе цѣлкомъ было видно

Рис. 143.

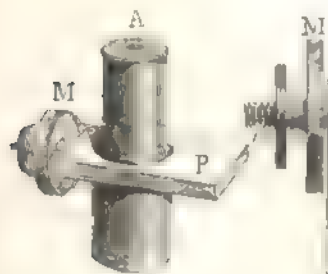


Рис. 144.

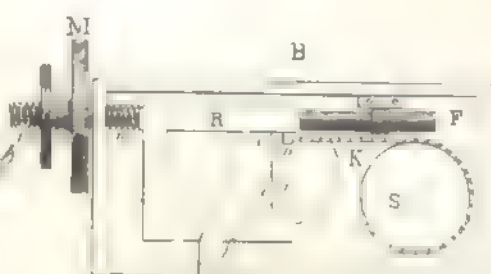
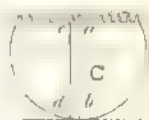


Рис. 145.

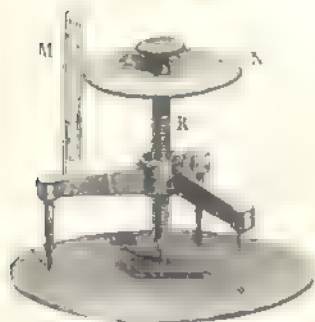


въ полѣ зрѣнія трубы и было расположено перпендикулярно къ нити *cd*. Вращая головку *M*, доводить нить *cd* сперва до одного, а затѣмъ до другого конца изображенія измѣряемой длинны, разность отсчетовъ дастъ намъ число оборотовъ винта, соответствующее длинѣ изображенія предмета. Чтобы узнать истинную длину линіи, слѣдуетъ среднѣмъ т. наз. значеніе одного оборота винта, зависящее между прочимъ отъ разстоянія предмета отъ зрительной трубы, т. е. истинную длину предмета, изображеніе котораго имѣетъ длину, равную перемѣщенію нити *cd* при одномъ оборотѣ винта. Для опредѣленія этой величины слѣдуетъ помѣстить точный масштабъ на мѣсто измѣряемаго предмета или параллельно ему, такъ чтобы изображенія по крайней мѣрѣ двухъ его черточекъ были видны въ полѣ зрѣнія и чтобы они были параллельны нити *cd*, которую заставляютъ соприкоснуться сперва съ одной, а затѣмъ съ остальными видными черточками. Зная истинное значеніе дѣленія масштаба и опредѣливъ число оборотовъ винта, соответствующаго перемѣщенію нити *cd* на одно его дѣленіе, мы уже легко получимъ ту длину на масштабѣ, которая соответствуетъ одному обороту винта.

На стр. 263 было упомянуто о компараторахъ, служащихъ для сравненія двухъ эталоновъ длины. Теперь не трудно будетъ понять идею

ихъ устройства. Компараторъ Brunner'a, которымъ пользуются въ Международномъ бюро мѣръ и вѣсовъ, имѣетъ слѣдующее устройство. Два микроскопа, снабженныхъ окулярными микрометрами, установлены вертикально на разстоянии примѣрно одного метра другъ отъ друга. Каждый изъ нихъ прикрѣпленъ сбоку къ отдѣльному, весьма крѣпкому и неогнивому столу со стороны, обращенной къ другому столу. Подъ микроскопами

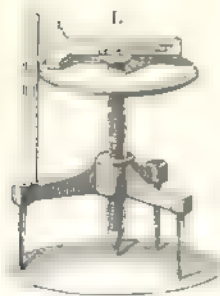
Рис. 146.



находится длинный ящикъ, въ который рядомъ помѣщаются сравниваемые эталоны и который можетъ быть передвигаемъ по направлению, перпендикулярному къ его длине, т. е. къ вертикальной плоскости, проходящей черезъ оси микроскоповъ. Сначала подводятъ одинъ эталонъ, подъ микроскопы и наводятъ пересѣченія нитей на ковычныя черточки, затѣмъ передвигаютъ ящикъ, подводятъ другой эталонъ подъ микроскопы и передвигаютъ нити двухъ окулярныхъ микрометровъ до совпаденія пересѣченій нитей съ его ковычными черточками. Алгебраическая разность перемѣщенъ и, произведенныхъ въ двухъ микрометрахъ и считаемихъ положительными въ одну и ту же сторону, опредѣляетъ искомую разность длинъ двухъ эталоновъ.

Въ Берлинѣ комиссія мѣръ и вѣсовъ (Kaiserl. Normal-Messungs-Commission) пользуется компараторомъ Repsold'a, подробное описаніе этого прибора данъ Pinsky (Instr. 15 p. 314, 153, 1895 г.). Видомъ и устройствомъ окулярнаго микрометра предположи въ Д. Дьяконовъ (Ж. Ф. Х. О., 18 стр. 120, 1886 г.).

Рис. 147.



§ 5. Сферометръ. Этотъ приборъ служитъ для

измѣренія толщины пластинокъ, а также для изслѣдованія неровностей на плоской поверхности и для измѣренія радиуса сферическихъ поверхностей, напр. оптическихъ стеколъ. Простой сферометръ, изображенный на рис. 146, состоитъ изъ треножника, въ серединѣ котораго находится гайка микрометричнаго винта *R*, снабженная головкой *X*. На окружности головки имѣется дѣленіе обыкновенно окружность раздѣлена на 500 частей. При полномъ оборотѣ винта онъ перемѣщается на 1 мм. Шкала *M* служитъ для счета полныхъ оборотовъ. Опуская головку винта, стараются установить его въ положеніи, при которомъ, внянше сто острѣе какъ разъ касается поверхности пластинки, на которую поставленъ приборъ. Дѣлается это ощупью когда остріе винта находится выше пластинки, то при легкихъ передвиженіяхъ прибора рукою, держащей головку *N*, онъ весь съѣздитъ по поверхности, если же остріе винта слишкомъ выдвинуто, то весь приборъ легко вращается около винта, какъ около оси, или даже качается около острія вследствие того, что одна изъ трехъ ножекъ оказывается нѣсколько приподнятою. Полезно ставить

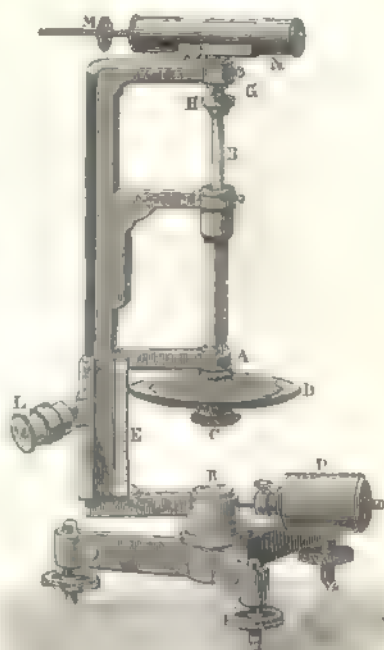
сферометръ на резонаторный ящикъ камертона; тогда мелкія качанія прибора около средняго винта легче замѣчаются. Слѣдуетъ научиться улавливать моментъ соприкосновенія винта съ плоскостью. Для опредѣленія толщины какого либо предмета доводятъ винтъ сперва до прикосновенія съ плоскостью, на которой сферометръ установленъ, и дѣлають отчетъ на шкалѣ *M* и на головкѣ *N* въ точкѣ, противъ которой находится вертикальное ребро шкалы *M*. Затѣмъ поднимають винтъ, кладутъ подъ него измѣряемое тѣло, опускають винтъ до соприкосновенія съ поверхностью этого тѣла и дѣлають второй отчетъ. Разность двухъ отчетовъ опредѣляетъ искомую толщину предмета.

Точность измѣреній сферометромъ зависитъ отъ точности, съ которою отмѣчается моментъ, когда остріе винта касается поверхности, находящейся подъ нимъ. На рис. 147 изображенъ сферометръ Реггеаух, въ которомъ моментъ соприкосновенія опредѣляется не ощупью, но отмѣчается самимъ приборомъ. Черезъ пробурываемую ось винта проходитъ штифтъ, нижній его конецъ нѣсколько выходитъ наружу, верхній упирается въ систему двухъ чувствительныхъ рычаговъ *L*. Штифтъ держится внутри винта вслѣдствіе легкаго тренія обѣ стѣнки канала. Когда винтъ опускается, то вмѣстѣ съ нимъ опускается штифтъ и остріе второго рычага остается неподвижнымъ. Но какъ только нижній конецъ штифта коснется поверхности тѣла, онъ останавливается и затѣмъ остріе рычага начинаетъ двигаться по маленькой шкалѣ при малѣйшемъ качаніи винта дабы въ ту же сторону.

Сферометромъ пользуются для опредѣленія радиуса *R* сферической поверхности, ограничивающей выпуклую или вогнутую оптическую линзу. Для этого опредѣляютъ высоту *h* мениска, радиусъ *r* сферичности котораго равенъ радиусу окружности, проходящей черезъ остріе трехъ ножекъ сферометра. Тогда $R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2}$. Для указанной цѣли болѣе удобны сферометры,

устройство которыхъ составляетъ тонкостѣнный круглый цилиндръ, радиусъ *B* котораго извѣстенъ (см. Czapski, Instr. 7, 1887, p. 297). Abbe построилъ сферометръ для опредѣленія радиуса *R* кривизны стекла, въ которомъ стекло сверху закладывается на горизонтальный круглый край тонкостѣннаго цилиндра, вертикальный стержень, перемѣщающійся вдоль оси этого цилиндра снизу приводится до поверхности стекла (см. Pulfrich, Instr. 12, p. 312, 1892).

Рис. 148.



На рис. 148 изображен весьма чувствительный сферометр Вильда. Головка *D* микрометричного винта, расположена против шкалы *E*, отчетывается при помощи микроскопа *L*. Винт оканчивается наверху маленькою площадкою *H* на которую кладется тѣло, толщину котораго требуется измерить. Через кольцо, находящееся надъ *H*, оно должно проходить штифтикъ, нижній конецъ котораго имѣетъ форму клина; верхній закрученный конецъ упирается въ чувствительный уровень, съоснодно вращающійся около оси находящейся нѣсколько вышѣ отъ штифтика. Отсчеты производятся сперва безъ измѣняемаго тѣла, а потомъ, когда это тѣло находится на площадкѣ *H*, въ тѣ моменты, когда штифтикъ принять уровень въ горизонтальное положеніе, т.-е. когда пузырекъ уровня находится въ среднемъ положеніи.

Рис. 149.



Весьма чувствительный сферометръ построен Common. см. Nature (английскій) 48 р. 396. 1893 г.

§ 6. Катетометръ. Этотъ малый приборъ служить для измерения вертикальнаго разстоянія двухъ точекъ. Отличаются катетометры съ одною и съ двумя трубами. На рис. 149 изображенъ катетометръ съ одною трубою, а на рис. 150 труба добавленная къ ней части изъ бѣльшого масштаба. Устройство прибора слѣдующее. На чугунномъ основаніи, стоящемъ на трехъ винтовыхъ ножкахъ *CDE*, укрепленъ желѣзный крутой столбъ, который находится внутри столба, изображеннаго на рисункѣ. При помощи двухъ уровней *B* желѣзный столбъ устанавливается приблизительно вертикально. На него надѣтъ мѣдный цилиндръ, упирающійся внизу на расширенную часть столба; сверху онъ оканчивается конусомъ, черезъ который проходитъ винтъ *R*, упирающійся въ углубленіе, выточенное въ верхнемъ основаніи желѣзнаго цилиндра. Это даетъ возможность вращать мѣдный цилиндръ вокругъ желѣзнаго столба для закрѣпленія его въ определенномъ положеніи; стоять винтъ, не изображенный на рисункѣ. На мѣдномъ цилиндрѣ находятся двѣ латейки *AA* и *SS* (рис. 150); на одной изъ нихъ начерчены цѣленія, обыкновенно миллиметры. Подвижная часть, съ которою связана зрительная труба *GF*, состоитъ изъ двухъ колецъ *PX* и *O*, обхватывающихъ мѣдный цилиндръ. Они могутъ быть перекинуты къ произвольному мѣсту цилиндра и закрѣплены на немъ. Если закрѣпить только

одну латейку, то можно будетъ измерять разстояніе между двумя точками, если же закрѣпить и другую, то можно будетъ измерять разстояніе между двумя точками, если же закрѣпить и третью, то можно будетъ измерять разстояніе между тремя точками.

кольцо *O*. то вращаемъ головки *M* микрометричнаго винта, проходящаго черезъ гайку *N* (въ видѣ *O* онъ только вращается). можно произвести медленное опусканіе или подниманіе кольца *PN*, а измѣтъ съ нимъ и трубы *GK*. Вращеніе той трубы около оси *P* производится винтомъ *L*, проходящимъ черезъ гайку, расположенную на концѣ выступа *K*. Уровень *IN* расположенъ подъ зрительною трубою; въ окулярѣ трубы натянута перекрестная нить.

Прежде чѣмъ пользоваться катетометромъ, слѣдуетъ произвести правильную его установку. Ограничиваемся перечнемъ условій, которыми эта установка должна удовлетворить и весьма краткимъ указаніемъ на то, какъ выполнить эти условія.

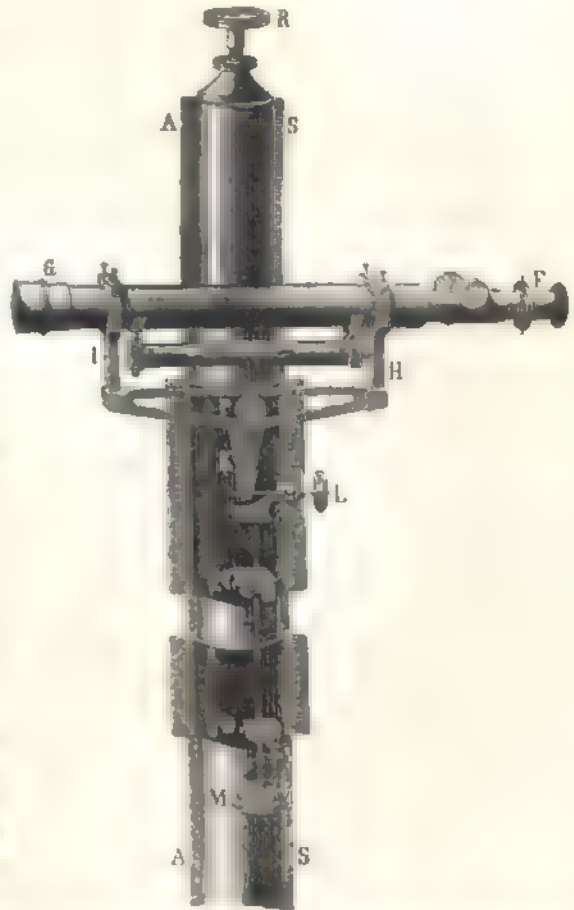
1. Оптическая ось трубы, проходящая черезъ точку пересѣченія нитей, должна совпадать съ его геометрической осью. Это будетъ достигнуто, когда нити будутъ установлены такъ, чтобы изображеніе какой либо точки предмета, наблюдаемой черезъ трубу, не сходило съ пересѣченія нитей при вращеніи трубы около ее оси.

2. Ось уровня должна быть параллельна оси трубы, т.-е. пузырекъ долженъ занимать среднее положеніе, когда ось трубы горизонтальна. Для этого дѣйствуютъ винтомъ *L* и винтомъ, находящимся при уровнѣ со стороны *I*. до тѣхъ поръ, пока при перекладываніи трубы вмѣстѣ съ уровнемъ такъ, чтобы окуляръ и объективъ смѣнялись своими положеніями, пузырекъ не останется въ среднемъ положеніи.

3. Ось катетометра должна быть строго вертикальна и слѣд. перпендикулярна къ оси трубы и уровня. Это достигается вращеніемъ винта *I* и винтовыхъ ножекъ *CDE* (рис. 149) до тѣхъ поръ, пока при четырехъ положеніяхъ мѣднаго цилиндра, получающаго поворачиваніемъ его на 90°, пузырекъ уровня не останется въ своемъ среднемъ положеніи.

Чтобы измѣрить вертикальное расстояние двухъ точекъ, т.-е. опредѣ-

Рис. 150.



нить, на сколько одна изъ двухъ точекъ, которыя могутъ и не лежать одной вертикальной линіи, выше другой, устанавливаютъ зрительную трубу на такой высотѣ, чтобъ сперва изображеніе первой точки совпадало съ точкою пересѣченія нитей. Затѣмъ дѣлаютъ отчетъ на шкалѣ катетометра, пользуясь нониусомъ, соединеннымъ съ кольцомъ РУ. То же самое повторяютъ послѣ того, какъ изображеніе второй точки было приведено въ совпаденіе съ точкою пересѣченія нитей: при этомъ приходится поднять или опустить трубу и кромѣ того мѣдный цилиндръ повернуть около вертикальной оси, если обѣ точки не находятся на одной вертикальной линіи. Разность полученныхъ двухъ отчетовъ и дастъ намъ искомое вертикальное разстояніе точекъ.

Существуютъ катетометры съ двумя трубками, снабженными каждаго окулярнымъ микрометромъ, въ которомъ подвижная нить должна быть горизонтальна.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Измѣреніе угловъ.

§ 1. Верньеръ. Для измѣренія угловъ служатъ вообще приборы, снабженные кругами съ дѣлениями, нанесенными кругового дѣйствительнаго масштаба (стр. 259). Приборы устроены такъ, чтобы искомый уголъ могъ быть измѣренъ угломъ между двумя радиусами этого круга и чтобы онъ опредѣлился разностью двухъ отчетовъ, произведенныхъ на дѣленіяхъ круга. Для отчета служатъ черта, находящаяся рядомъ съ дѣлениями на другой пластинкѣ. Возможны два случая. 1) кругъ неподвиженъ, а пластинка съ чертою вращается около центра круга; ея перемѣщеніе вдоль окружности круга опредѣляетъ измѣряемый уголъ; 2) пластинка съ чертою неподвижна, и вращается весь кругъ съ дѣлениями. Иногда пластинка замѣняется цѣлымъ кругомъ, охватывающимъ кругъ съ дѣлениями или находящимся внутри его, если дѣленія нанесены на плоской поверхности кольца. Въ этомъ случаѣ вмѣсто одной черточки употребляютъ двѣ, расположенныя на концахъ диаметра круга или четыре, находящіяся на угловомъ разстояніи въ 90° другъ отъ друга. Этимъ уменьшается погрѣбность наблюденій, могущая произойти отъ неправильной центрировки круговъ.

Для достиженія большей точности измѣренія, а именно для отчета десятихъ долей дѣленія, служатъ вспомогательные масштабы, аналогичныя нониусамъ (стр. 264), ихъ называютъ верньерами. Они отличаются отъ нониусовъ во-первыхъ тѣмъ, что дѣленія нанесены по дугѣ круга, а не по прямой, и во-вторыхъ тѣмъ, что число дѣленій, вообще говоря, не равно 10.

Дѣло въ томъ, что круговыя дѣленія устраиваются чрезвычайно разнообразно, цѣлые градусы дѣлятся напр. на 2, 3, 4, 6, 12 равныхъ частей. Поэтому и значеніе одного дѣленія верньера для отчета, т. е. разность угла его дѣленія и дѣленія основной шкалы, могутъ быть

весьма различны. Чтобы въ каждомъ данномъ случаѣ разобраться, слѣдуетъ сперва посмотреть, чему равно одно дѣленіе шкалы (положимъ p'') и затѣмъ, какое число ($n - 1$) дѣлений шкалы равно n дѣлениямъ верньера. Въ такомъ случаѣ при отчетѣ каждое дѣленіе верньера соответствуетъ условной величинѣ $\alpha = \left(\frac{p''}{n}\right)''$. Вотъ нѣсколько примѣровъ:

1. Дѣленія шкалы суть полуградусы ($30'$); верньеръ содержитъ 30 дѣлений, которые равны 29 дѣлениямъ шкалы. При отчетѣ, т.-е. опредѣленіи того мѣста, гдѣ находится нулевая черта верньера, непосредственно отчитываются полуградусы. Каждое изъ дѣлений верньера отъ нулевого до

Рис. 151



того, которое совпадаетъ съ однимъ изъ дѣлений шкалы, соответствуетъ при отчетѣ величинѣ $\alpha = 1'$.

2. Градусы раздѣлены на три части (по $20'$) и 20 дѣлений верньера равны 19 дѣлениямъ шкалы; и здѣсь $\alpha = 1'$.

3. Градусы раздѣлены на четыре части (по $15'$) и 45 дѣлений верньера равны 44 дѣлениямъ шкалы; $\alpha = \frac{1}{3}'' = 20''$. Въ этомъ случаѣ каждая третья черта верньера дѣлается длиннѣе другихъ: она соответствуетъ минутамъ.

4. Градусы раздѣлены на 12 частей, по $5'$ каждая; 60 дѣлений верньера равны 59 дѣлениямъ шкалы; $\alpha = 5''$. На верньерѣ выделяется каждая четвертая черта.

§ 2. Уровень. Правильно устроенный уровень, вертикальное продольное сѣченіе котораго представляется съ внутренней стороны дугою круга большого радиуса, можетъ служить какъ угломерный приборъ, если разна всегда опредѣлено угловое значеніе (т. наз. цѣна) одного дѣленія, т.-е. уголъ на который должна быть наклонена ось уровня, чтобы пузырекъ (его край) перемѣстился на одно дѣленіе. Для опредѣленія этой величины служитъ приборъ, изображенный на рис. 151. Чугунная плита, имѣющая форму буквы *T*, стоитъ на трехъ винтовыхъ ножкахъ. Полоса *A*, на которую кладется изслѣдуемый уровень *T*, вращается около оси *C*, черезъ другой ея конецъ проходитъ микрометричный винтъ *V*, полные обороты котораго отчитываются

Рис. 152.



ваются на рядомъ стоящей шкалѣ, а дробь по дѣленіямъ начертаннымъ на его головкѣ. Зная величину a винтового хода и разстояніе l отъ точки опоры винта до оси C , мы получаемъ уголъ φ , на который наклонится ось уровня, если винтъ повернуть на n оборотовъ, по формулѣ

$$\sin \varphi = \frac{na}{l}.$$

или, въ секундахъ

$$\varphi'' = \frac{na}{l \sin 1''} \dots \dots \dots (1)$$

Такимъ образомъ можно опредѣлить угловое значеніе одного дѣленія и изслѣдовать самый уровень, т.-е. опредѣлить, соответствуютъ ли всѣ его

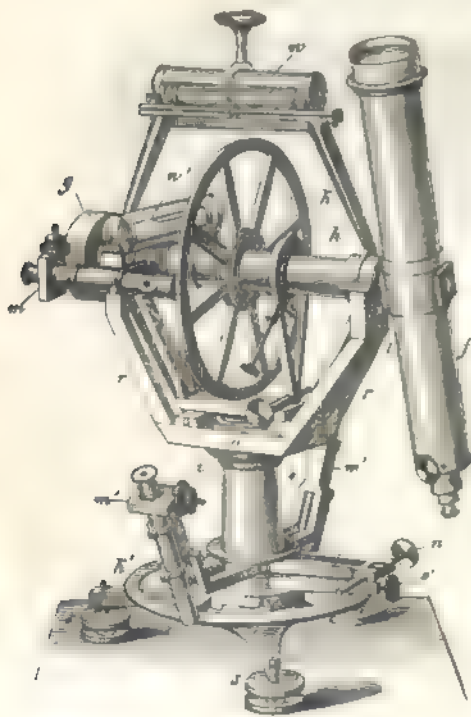
дѣленія, какъ въ одну, такъ и въ другую сторону отъ середины, одинаковымъ наклонамъ. Затѣмъ уровень уже можетъ служить какъ угломерный снарядъ, ибо по перемѣщенію пузырька можно будетъ судить о наклонѣ его оси, а слѣд. и той плоскости, на которой онъ установленъ.

Разъ угловое значеніе одного дѣленія уровня извѣстно, можно имъ пользоваться и для измѣренія малыхъ линейныхъ величинъ, напр. выпуклостей или вообще неровностей на плоскости. Положимъ, что перемѣщеніе пузырька указываетъ на наклонъ φ'' его оси и что разстояніе двухъ точекъ A и B (рис. 152) его основанія равно l ; тогда формула $x = l \varphi \sin 1''$ дастъ намъ линейную мѣру возвышенія одной изъ точекъ A или B надъ другой.

§ 3. Теодолитъ. Этотъ приборъ, служащій для измѣренія угловъ, расположенныхъ въ гори-

зонтальной или въ вертикальной плоскости, т.-е. разности двухъ азимутовъ или двухъ высотъ, изображенъ на рис. 153. Онъ состоитъ изъ слѣдующихъ частей: Зрительная труба f вращается около горизонтальной оси h , проходящей черезъ центръ вертикальнаго круга k (кру высотъ). Вся эта система вращается около вертикальной оси прибора, проходящей черезъ центръ горизонтальнаго круга k' (азимутальный кругъ). На кругѣ k отчитываютъ разности высотъ, на кругѣ k' разности азимутовъ и въ помощи микроскоповъ m и m' . Противовѣсъ q имѣетъ цѣлью перенести центръ

Рис. 153.



тяжести прибора на его ось. Эта ось устанавливается вертикально при помощи трех винтовых ножек z и уровней κ и κ' . Въ некоторых приборах особая труба, прикрепленная къ нижней части, даетъ возможность убѣдиться въ неподвижности прибора во время измѣренія.

Къ приборамъ, служащимъ для измѣренія угловъ, принадлежитъ и секстантъ, который мы, однако, здѣсь не будемъ описывать.

§ 4. Способъ зеркала и шкалы. Этотъ способъ, служащий для измѣренія небольшихъ угловъ, на которые повертываются (обыкновенно около вертикальной, рѣдко около горизонтальной оси) подвижныя части въ нѣкоторыхъ приборахъ, былъ предложенъ Roggendorffомъ въ 1826 году. Онъ применяется навр. для измѣренія отклоненій магнитовъ горизонтально подвѣшенныхъ на тонкихъ нитяхъ также металлическихъ стрѣлокъ въ нѣкоторыхъ электрометрахъ и т. д.

Способом зеркала и шкалы можно пользоваться и двояко — субъективно и объективно.

У насъ наиболѣе часто пользуются субъектив-
нымъ методомъ, который болѣе извѣстенъ подъ на-
званіемъ способа трубы и шкалы. Онъ раз-
дѣляется рисункомъ 154, въ которомъ показано рас-
дѣленіе частей, если смотреть сверху. Къ тѣлу NS
(напр., магниту), вращающемуся около вертикальной
оси, проходящей черезъ точку R , прикрѣплено зер-
кальце P ; AB зрительная труба; MR горизонтальная
шкала (черточки вертикальны), установленная выше
или ниже трубы такимъ образомъ, чтобы нормаль къ
зеркалу проходила посерединѣ между трубою и шка-
лою. Наблюдатель видитъ сперва въ трубу дѣленіе O .
Когда тѣло NS повернется на уголъ α въ положеніе
 NS' и съ нимъ зеркальце въ положеніе P' , то въ
окуляръ трубы попадетъ отраженный отъ P' лучъ $O'R$
второй, падая на него, составивъ съ нормалью
 RO' къ зеркальцу уголъ $O'RO'$, равный углу $O'RO$
т.е. равный α . Наблюдателю покажется, что шкала ушла въ сторону, въ
средній полъ зрѣнія онъ увидитъ вмѣсто дѣленія O дѣленіе O' . Непосред-
ственно отчитывается длина $s = OO'$ по дѣлениямъ шкалы. Зная расстояние d
отъ шкалы до зеркальца, которое должно быть взято отъ 2 до 4 метровъ,
получаемъ искомый уголъ поворота α по формулѣ

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{s}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

тним способом можно заметить и измерить весьма малые вращения т.н. деформованного зеркала. При $d=4$ метрам можно еще заметить вращение $\alpha=2''$; ему будет соответствовать $s=0,1$ мм., величина вполне заметная, если труба в достаточной степени увеличивается.

Рис. 154



116

$$K - \frac{150^\circ}{2} = 28^\circ.648 = 1718'.88 = 103132''.8.$$

При точных измерениях следует вводить поправки, вызванные не строгой перпендикулярностью шкалы к прямой, соединяющей начальную точку счета делений с серединою зеркальца, или боковым отклонением лучей в стеклынных пластинках, помещаемых перед зеркальцем, напр. когда весь прибор окружен металлическими или иными стенками для предохранения подвижных частей от движений воздуха (см. Wood, Wied. Ann. 56 p. 171 интересные методы наблюдения крутильных качаний).

В. В. Термантов (Ж. Ф. Х. О. 22 р. 261, 1890) изложил точность вышеизложенного объективного метода определения М.З.В.В.

§ 3. Измерение двугранных углов. Гониометры. Для измерения двугранных углов, составленных из плоских поверхностей призм и пирамид, употребляют гониометры.

Рис. 156.

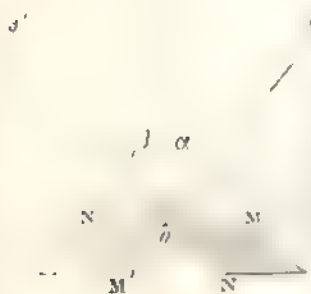
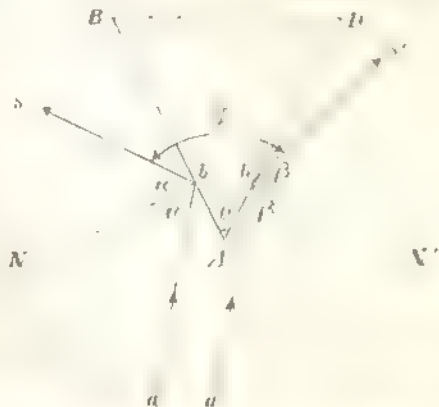


Рис. 157.



стекла, каменной соли и т. д. или других кристаллов, вообще прозрачными, правильно отражающими свет, служат различные приборы, называемые тонометрами.

Существует целый ряд топографических методов, основанных на законе отражения лучей от плоских поверхностей. Здесь мы рассмотрим только два из них.

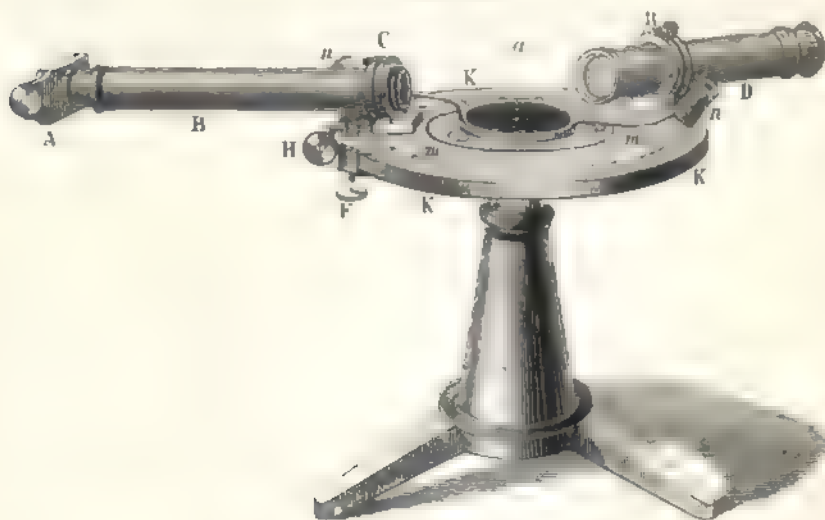
Способ 1 выясняется рисунком 156. Пусть MON линейный угол двугранного угла, ребро которого в O перпендикулярно к плоскости рисунка. В плоскости, перпендикулярной к ребру, устанавливают зрительную трубу, направленную от s к O и источник света, напр. узкую, «вещную» щель, параллельную ребру O . Трубу и щель устанавливают так, чтоб луч sO , идущий от щели отразившись от стороны OM близ ребра O , пошел по направлению Os оси трубы. Изображение щели должно совпадать с нитью окуляра, установленной параллельно ребру O и щели. Затем поворачивают т.б., которому принадлежит измеряемый

уголъ, около ребра O до тѣхъ поръ, пока изображеніе щели вновь не появится и не совпадетъ съ нитью окуляра. Оно теперь образуется лучами, отразившимися отъ другой стороны ON двуграннаго угла принявшаго положеніе ON' . Такъ какъ MO и ON' должны лежать въ одной плоскости, то ясно, что измѣряемый уголь $A = \angle MON$ и уголь $\varphi = \angle NON'$, на который мы повернули тѣло, связаны простымъ равенствомъ

$$A = 180^\circ - \varphi. \quad (5)$$

Способъ 2 заключается въ слѣдующемъ. Тѣло, двугранный уголь A (рис. 157) котораго желаютъ измѣрить, устанавливаютъ неподвижно; въ

Рис. 158.



плоскости, перпендикулярной къ ребру угла, вращается зрительная труба ось которой направлена къ точкѣ O , лежащей внутри тѣла, вблизи ребра угла A . На это ребро направляютъ пучекъ параллельныхъ лучей ab , $a'b'$, которые отражаются частью отъ одной, частью отъ другой стороны угла. Далѣе отыскиваютъ такія два направленія оси зрительной трубы, при которыхъ она совпадаетъ сперва съ отраженнымъ лучемъ bs , а затѣмъ съ отраженнымъ лучемъ bs' и измѣряютъ уголь $\varphi = \angle sOs'$, на который при этомъ приходится повернуть трубу около центра O . Докажемъ, что въ этомъ случаѣ искомый уголь $A = \frac{1}{2} \varphi$. Обозначимъ черезъ $\alpha = \angle abN - \angle NbB$ и черезъ $\beta = \angle a'b'N' - \angle N'b'D$ углы паденія и отраженія двухъ рассмотрѣнныхъ лучей.

Изъ чертежа видно, что

$$\angle abN + \angle a'b'N' + \angle NbB + \angle N'b'D + \angle A = 360^\circ, \text{ т.-е.}$$

$$\alpha + \beta + 180^\circ + A = 360^\circ \text{ или } \alpha + \beta + A = 180^\circ \text{ и } 2\alpha + 2\beta + 2A = 360^\circ.$$

Съ другой стороны очевидно

$$2\alpha + 2\beta + \varphi = 360^\circ.$$

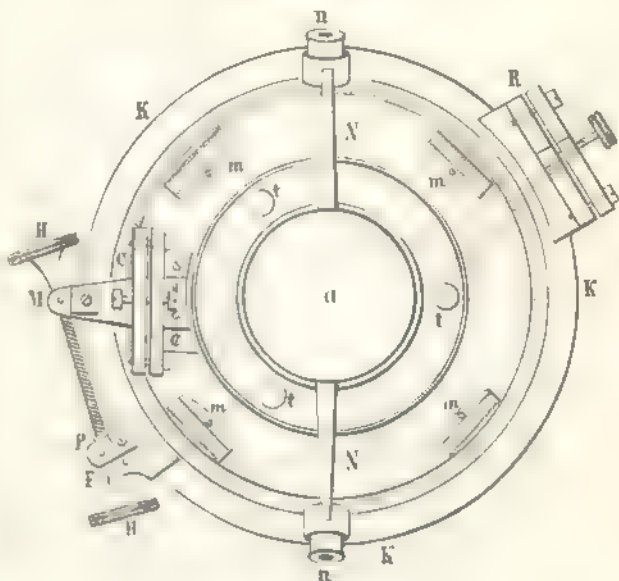
Сравнивая это равенство съ предыдущимъ, мы видимъ, что $\varphi = 2A$. т. е.

$$A = \frac{1}{2} \varphi. \quad (7)$$

Параллельный пучекъ лучей можно получить искусственно, какъ будетъ показано ниже, но можно также искать трубою изображенія въ сторонахъ угла какой-либо весьма отдаленной точки (миры), отъ которой идутъ лучи ab и $a'b'$.

Приборы, служащіе для измѣренія двугранныхъ угловъ, называются гониометрами. На рис. 158 изображенъ гониометръ Steinheil'a, при помощи котораго можно измѣрять двугранные углы призмъ по второму изъ только что описанныхъ двухъ способовъ; на рис. 159 изображенъ тотъ же приборъ сверху безъ трубокъ B и D . Его главнѣйшія части суть: плоское кольцо KK съ

Рис. 159.



тѣленіями, къ которому прикрѣплено кольцо R , держащее ввинченную въ него зрительную трубку D ; внутренний кругъ, снабженный четырьмя нониусами mm и кольцомъ C , въ которое ввинченъ т. наз. коллиматоръ B . Этотъ кругъ неподвиженъ; кругъ KK вмѣстѣ съ трубою D можетъ вращаться около оси прибора, причемъ углы поворота могутъ быть измѣрены помощью нониусовъ m .

Коллиматоръ состоитъ изъ трубы B , имѣющей обыкновенный (ахроматическій) объективъ; вмѣсто окуляра находится въ фокусѣ объектива особая часть A , въ которой имѣется вертикальная щель; вращая винтъ, головка котораго видна на рисункѣ, можно расширять или суживать эту щель.

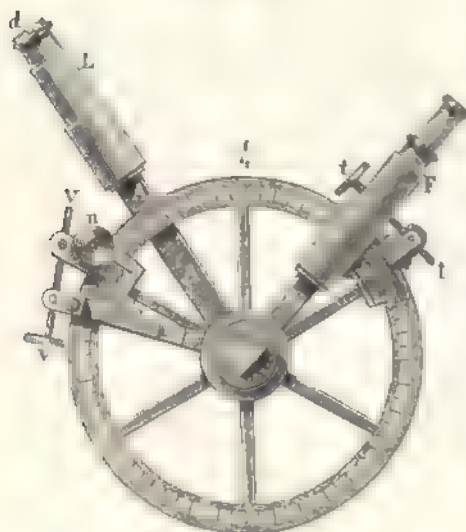
Если за щелью поставить яркій источникъ свѣта, то лучи, исходящіе изъ щели, пройдя объективъ C , идутъ далѣе параллельно. Отразившись отъ одной изъ сторонъ измѣряемаго угла, они попадаютъ въ трубку D .

установленную на бесконечность (такъ, чтобы ясно видеть былъ весьма отдаленный предметъ, напр. звезда), и даютъ изображеніе щели въ фокальной плоскости объектива, гдѣ находятся нити, съ одною изъ которыхъ, вертикальною, заставляютъ совпасть край этого изображенія при каждой установкѣ.

Призму, двугранный уголъ которой желаютъ измѣрить, устанавливаютъ на столикѣ *a* такъ, чтобы ребро ея находилось близъ середины и чтобы вертикальная плоскость, проходящая черезъ ось коллиматора, приблизительно (на глазъ) дѣлила пополамъ измѣряемый уголъ *A*. Сдѣлавъ двѣ установки трубы и опредѣливъ разность φ отсчетовъ, получаютъ уголъ *A* по формулѣ (7).

Если желаютъ пользоваться первымъ методомъ, то необходимо имѣть гониометръ, средний столикъ котораго отдѣльно бы вращался, причемъ уголъ

Рис. 160.



вращенія можно было бы измѣрить. На рис. 160 показано простое устройство верхней горизонтальной части гониометра Babinet, устанавливаемой на вертикальной ножкѣ. Кругъ съ дѣленіями неподвиженъ; коллиматоръ *L* со щелью *d* прикрѣпленъ къ стержню *АА*, который вращается около оси прибора и можетъ быть закрѣпленъ въ любомъ, удобномъ для наблюденія, положеніи. Зрительная труба *F* придѣлана къ стержню *В*, который также можетъ вращаться около оси и закрѣпляется въ произвольномъ положеніи, послѣ чего малые его перемѣщенія вызываются вращеніемъ винта *t*, проходящаго черезъ гайку, связанную съ трубою. Нониусъ *m* служить для отчета положенія трубы. Наконецъ, средний столикъ,

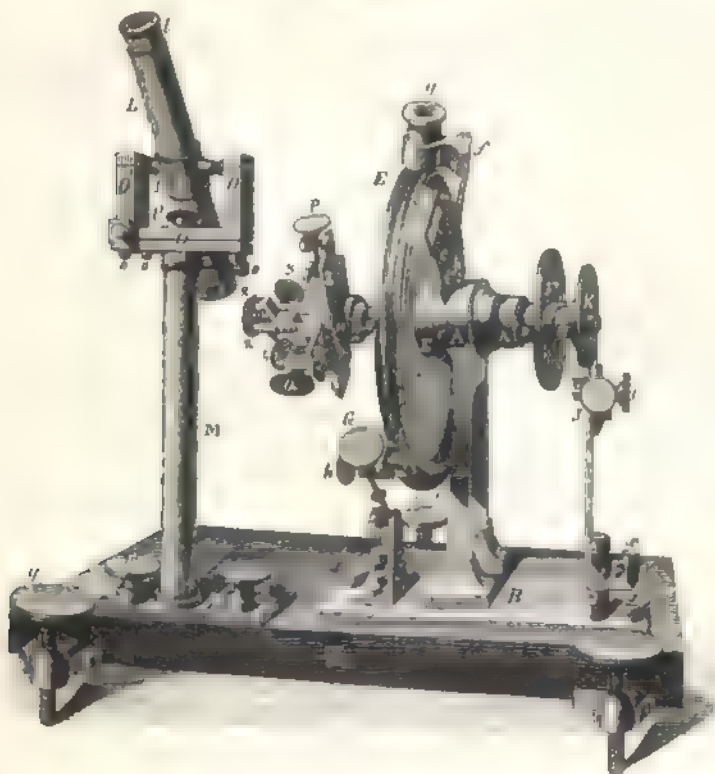
на которомъ устанавливается тѣло *М*, одинъ изъ двугранныхъ угловъ котораго желаютъ измѣрить, также свободно вращается около оси прибора. Съ нимъ связаны полоска *С*, винтъ *n*, служащій для закрѣпленія, винтъ *VV*, при вращеніи котораго получаютъ затѣмъ медленные вращенія столика, и наконецъ нониусъ *p*.

Легко понять, какимъ образомъ можно пользоваться этимъ гониометромъ для измѣренія угла по любому изъ приведенныхъ двухъ способовъ. Для этого стоитъ только взглянуть на схематическіе рисунки 156 и 157.

Для измѣренія двугранныхъ угловъ кристалловъ служатъ гониометры, имѣющие иногда весьма сложное устройство. На рис. 161 изображенъ гониометръ Mitscherlich'a, въ которомъ измѣреніе дѣлается по первому способу (стр. 277), т.-е. вращеніемъ самого кристалла, при неподвижной трубѣ. Его устройство слѣдующее. Крѣпкая стойка *АА* поддер-

живается ось DD съ кругомъ EE , на которомъ нанесены дѣленія; вращеніе круга производится головкою F . Закжимный винтъ h служитъ для закрѣпленія круга, а микрометричный винтъ G для того, чтобы послѣ закрѣпленія сообщить ему еще медленное вращеніе. Для отчета дѣленій служить нониусъ i и микроскопъ q . Внутри оси DD проходитъ другая ось HH , для поворачиванія и закрѣпленія которой служатъ головка K и зажимный винтъ l , а для медленнаго ея вращенія — микрометричный

Рис. 161.



винтъ J . Къ оси H приделана пластинка, параллельно которой перемѣщается другая при вращеніи головки P , перпендикулярно къ ней перемѣщается при вращеніи головки винта Q пластинка R , къ которой приделана рамка u . Винты P и Q даютъ такимъ образомъ, возможность смѣщать рамку u параллельно самой себѣ въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ направленіяхъ. Внутри рамки u находится маленькая полушаровидная подставка на которую воскомъ наклеивается изслѣдуемый образецъ и притомъ такъ, чтобы ребро измѣряемаго угла приблизительно расположено въ продолженіи горизонтальной оси вращенія прибора. Точная установка достигается винтами 2, 3, 4, P и Q , изъ которыхъ первыми тремя можно взмѣнять положеніе подставки съ кри-

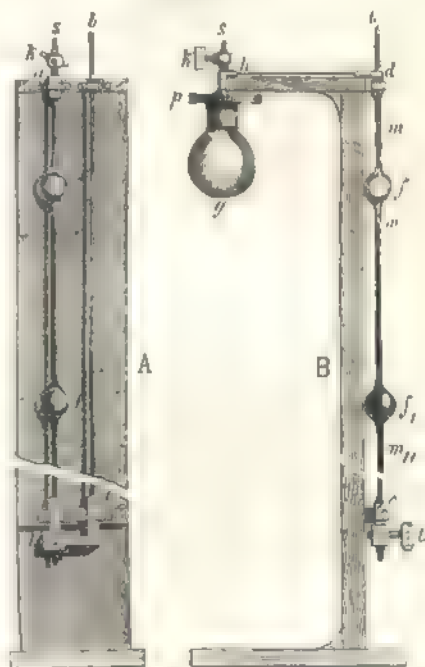
случаѣ можно предположить, что ртуть занимаетъ объемъ, ограниченный сверху горизонтальной плоскостью, лежащей выше круга касанія поверхности ртути и стекла на величину, равную $\frac{2}{3}$ высоты мениска.

Для изслѣдованія внутренней емкости тонкихъ трубокъ кладутъ ихъ горизонтально и перемищаютъ въ нихъ столбикъ ртути. Въ строго цилиндрическихъ трубкахъ длина столбика вездѣ одинаковая; въ неправильныхъ трубкахъ эта длина мѣняется. Перемищая столбикъ последовательно въ такіе положенія, чтобы его начало приходилось каждый разъ въ той точкѣ въ которой въ предыдущемъ положеніи находился его конецъ можно раздѣлить емкость трубки на равныя части и притомъ равныя объему взятой ртути.

Болѣе подробное изслѣдованіе емкости отдѣльныхъ частей трубки, опредѣляемыхъ нанесенными на нее дѣлениями, называется калибровкой. Употребляемые при этомъ приемы мы рассмотримъ въ Т. III. въ главѣ, посвященной вопросу о приготовленіи термометровъ.

§ 2. Волюхометръ Реньо. Волюхометрами называются приборы, служащіе для опредѣленія объема тѣлъ, въ особенности имѣющихъ неправильную форму, кучки кристалловъ, порошковъ и т. под. На рис. 162 изображенъ волюхометръ Реньо спереди (А) и сбоку (В). Къ деревянной вертикальной доскѣ прикрѣплены двѣ параллельныя стеклянныя трубки bd и cd (буква d на чертежѣ стрѣбается два раза), въ которыя заливается ртуть. Кранъ l имѣетъ два взаимно перпендикулярныхъ канала вида \perp ; это даетъ возможность по желанію соединить обѣ трубки только между собою (положеніе канала \perp) или выпускать ртуть изъ одной лѣвой (положеніе \neg), или изъ одной правой (\neg), или, наконецъ, изъ обѣихъ трубокъ (\neg). Лѣвая трубка имѣетъ шаровидное расширеніе f , выше и ниже котораго проведены двѣ трубы m и m_1 . Другое, нижнее расширеніе разсматривать не будемъ. Эта лѣвая трубка имѣетъ наверху горизонтальное продолженіе dh (рис. В), идущее въ короткую вертикальную трубку, снабженную наверху краемъ k и отверстіемъ s , а внизу круглою пластинкою p , къ которой плотно прилепляется еще такая же пластинка, такъ что p на чертежѣ представить совокупность двухъ сложенныхъ вмѣстѣ пластинокъ. Къ нижней стинкѣ придѣлана короткая широкая трубка и шаровидный сосудъ g ; это помѣщаютъ тѣло, объемъ котораго желаютъ опредѣлить.

Рис. 162.



смотря потому, будетъ ли уровень ртути находится при чертѣ m или m_1 . Вмѣсто уравненій (5) и (7) имѣемъ теперь

$$\begin{aligned}(V - x)H' &= (V + v - x)(H' - h'), \\ (V + v - x)H' &= (V - x)(H' + h').\end{aligned}$$

Эти уравненія даютъ два значенія для искомага объема x , изъ которыхъ опять беремъ среднее.

Существуетъ множество видоизмѣненій волюмометра: особый интересъ представляетъ приборъ, построенный В. В. Термантовымъ для практическихъ упражненій студентовъ. Въ немъ шаръ g замѣненъ широкимъ стаканомъ, а правая трубка bd цилиндрическимъ сосудомъ, соединеннымъ съ лѣвой трубкой de при помощи длинной каучуковой трубки. Приливаніе и выпусканіе ртути замѣняется весьма удобнымъ подниманіемъ и спусканіемъ цилиндрическаго сосуда при помощи шнурка, перекинутого черезъ неподвижный блокъ и намотаннаго на горизонтальный валикъ, вращаемый при помощи рукоятки.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Измѣреніе силъ и массъ.

§ 1. Общія замѣчанія объ измѣреніи силъ и массъ. На основаніи формулы $f = mg$, см. (5) стр. 67, связывающей силу f , массу m , на которую она дѣйствуетъ, и ускореніе g , которое эта масса приобретаетъ подъ влияніемъ силы f , мы могли бы измѣрять массы, наблюдая ихъ ускоренія, когда дѣйствовать на нихъ извѣстная намъ или, проще, какая-либо постоянная сила, или измѣрять силу, которая потребна, чтобы массамъ придать извѣстное намъ или, проще, какое-либо постоянное ускореніе. Точно также мы могли бы измѣрять силы тѣми ускореніями, которыя онѣ придаютъ даннымъ массамъ или тѣми массами, въ движеніи которыхъ онѣ вызываютъ данныя ускоренія. Всѣ подобные способы (исключая одного, см. ниже), однако, неудобныя исполненію въ виду трудности сгѣдить за ускореніемъ во время движенія и потому они замѣняются другими.

Силы измѣряются не только ускореніями, которыя онѣ вызываютъ въ тѣлахъ свободныхъ, но и тѣми давленіями, которыя обнаруживаются при ихъ дѣйствіи на тѣла несвободныя. Эти давленія вызываютъ измѣненія формы тѣлъ и появленіе въ нихъ упругихъ противодействующихъ силъ, которыми дѣйствующими силы уравновѣшиваются. По величинѣ этихъ измѣненій формы можно судить о величинѣ дѣйствующей силы. На этомъ основано устройство динамометровъ и крутильныхъ однонитныхъ вѣсовъ, которыя будутъ разсмотрѣны ниже.

Далѣе можно измѣрять силы другими внѣшними силами, которыми онѣ уравновѣшиваются, напр. силою тяжести. Такой случай мы

имѣемъ въ двунптныхъ крутильныхъ вѣсахъ, въ различныхъ магнитныхъ и электрическихъ приборахъ; этимъ же способомъ пользуются часто при измѣреніи давленія газовъ, поверхностнаго натяженія жидкостей, упругихъ силъ, развивающихся при измѣненіи формы тѣла и т. д.

Важнѣйшій способъ измѣренія силы, притомъ постоянной по величинѣ, и по направленію, по тому движенію, которое она вызываетъ, заключается въ томъ, что заставляютъ въ которое тѣло совершать подъ влияніемъ измѣряемой силы колебательныя движенія около положенія равновѣсія, опредѣляемого направленіемъ этой силы. Время колебанія даетъ, какъ мы увидимъ, возможность найти мѣру силы.

Мгновенныя силы опредѣляются, какъ мы видѣли (стр. 74) поимамъ импульсомъ силы за малый промежутокъ времени ихъ дѣйствія, мы видѣли далѣе (стр. 74), что этотъ импульсъ равенъ количеству движенія mv , приобретенному тѣломъ. Поэтому мѣрою мгновенной силы служить начальная скорость v тѣла, находящагося сначала въ покое, въ моментъ прекращенія дѣйствія на него силы. Такимъ способомъ измѣряются тѣ мгновенныя силы, которые появляются при воспламененіи взрывчатыхъ веществъ, при ударѣ, при возникновеніи мгновенныхъ индукціонныхъ токовъ и т. д.

Вѣсъ тѣла, какъ частный случай силы, можетъ быть измѣряемъ однимъ изъ вышеупомянутыхъ способовъ. Принимая за единицу вѣса вѣсъ какаго либо тѣла въ томъ мѣстѣ, гдѣ производится измѣреніе, можно опредѣнить вѣсъ другого тѣла, уравнивая его подобраннѣмъ числомъ единицъ вѣса (разновѣсокъ) на рычагѣ первого или второго рода отношеніе плечъ котораго извѣстно. Приборы, для этого примѣняемые, называются вѣсами (обыкновенные, безмѣтъ, римскіе, десятичные и т. д.). Но слѣдуетъ твердо помнить, что на вѣсахъ получается вѣсъ тѣла только при вышеоказанномъ условіи. Для каждой широты и для каждой высоты надъ уровнемъ моря должны бы быть свои разновѣски, если за единицу вѣса принять динъ или граммъ, т.-е. вѣсъ въ Парижѣ такого тѣла, масса котораго граммъ, или должны быть извѣстны соотвѣтствующія поправки, дающія возможность опредѣлить истинный въ данномъ мѣстѣ вѣсъ разновѣски, вѣсъ которой въ Парижѣ равенъ граммъ.

Мы уже упоминали (стр. 67), что разновѣски суть прежде всего эталоны массы и что поэтому взвѣшиваніе есть манипуляція опредѣленія массы тѣла путемъ сравненія его вѣса съ вѣсомъ тѣла, масса котораго единица.

Такъ какъ масса тѣла въ данномъ мѣстѣ пропорциональна вѣсу, то мы и получаемъ вѣрное численное значеніе массы, гдѣ бы мы ни произвели взвѣшиваніе, если только разновѣски суть правильные эталоны массы. Численное же значеніе вѣса тогда только возможно получить путемъ взвѣшиванія, когда вѣсъ эталонный извѣстенъ для того мѣста, гдѣ производится взвѣшиваніе.

§ 2. Разновѣски. какъ сказано, суть эталоны массы. Въ Международномъ бюро мѣръ и вѣсовъ (стр. 262) были изготовлены образцовые эталоны килограмма изъ того же сплава (90 Pt и 10 Ir), какъ и эталоны метра.

По жребію Россія получила въ 1891 г. два килограмма: № 26, хранящійся при Академіи Наукъ и № 12, находящійся въ Главной Палатѣ Мѣръ и Вѣсовъ. Ихъ объемы (при 0°) и истинныя массы суть:

№ 26: объемъ 46.410 куб. см.; масса 1 килогр. — 0.0032 мгр.

№ 12: объемъ 46.407 куб. см.; масса 1 килогр. — 0.0080 мгр.

Точность опредѣленія массы равна ± 0.002 мгр. Тѣми же числами, какъ и масса, выражается очевидно и вѣсъ этихъ эталоновъ въ безвоздушномъ пространствѣ въ Парижѣ.

По принятой терминологіи мы будемъ говорить о взвѣшиваніи, о разновѣсахъ и т. д., хотя дѣло касается не столько вѣса, сколько массы тѣлъ.

При взвѣшиваніи употребляются разновѣски, расположенныя въ надлежащемъ порядкѣ въ цилиндрическихъ или иной формы углубленныхъ выверленныхъ въ деревинномъ брускѣ. Весьма крупныя разновѣски дѣлаются изъ желѣза или чугуна, среднія по величинѣ изъ латной мѣди, которую полезно позолотить; малыя изъ платины, а самыя малыя иногда изъ алюминія. Особенно точныя разновѣски дѣлаются изъ горнаго хрустала или изъ упомянутаго сплава Pt и Ir. По величинѣ онѣ обыкновенно распределяются въ порядкѣ чиселъ

1 — 1 — 1 — 2—5 — 10 — 10—20 — 50—100—100 — 200—500—1000 и т. д.,

изъ которыхъ можно посредствомъ комбинацій составить всѣ промежуточные числа. Самая малая единица должна повторяться три раза, 10^{-3} , 100 и т. д. кратныя по два раза. Иногда изъбытокъ указанного ряда употребляется такой:

1—2—2—5—10—20—20—50—100—200—200—500—1000—2000—и т. д.

Д. И. Менделѣевъ (Временникъ Гл. Палаты Мѣръ и Вѣсовъ, часть 2 стр. 162) предложилъ недавно (1895) новую систему разновѣсокъ, а именно:

1 — 2—3 — 4 — 10 — 20 — 50 — 40 — 100 — 200 — 300 — 400 — 1000 и т. д.,

представляющую много преимуществъ.

Низущіеся въ продажѣ серіи разновѣсокъ не могутъ считаться вполне точными. Прежде, чѣмъ ими пользоваться, необходимо ихъ прокалибровать, т. е. опредѣлить истинное отношеніе ихъ массъ къ массѣ эталона, или, по крайней мѣрѣ, другъ къ другу. Способы такого калиброванія мы не будемъ разсматривать.

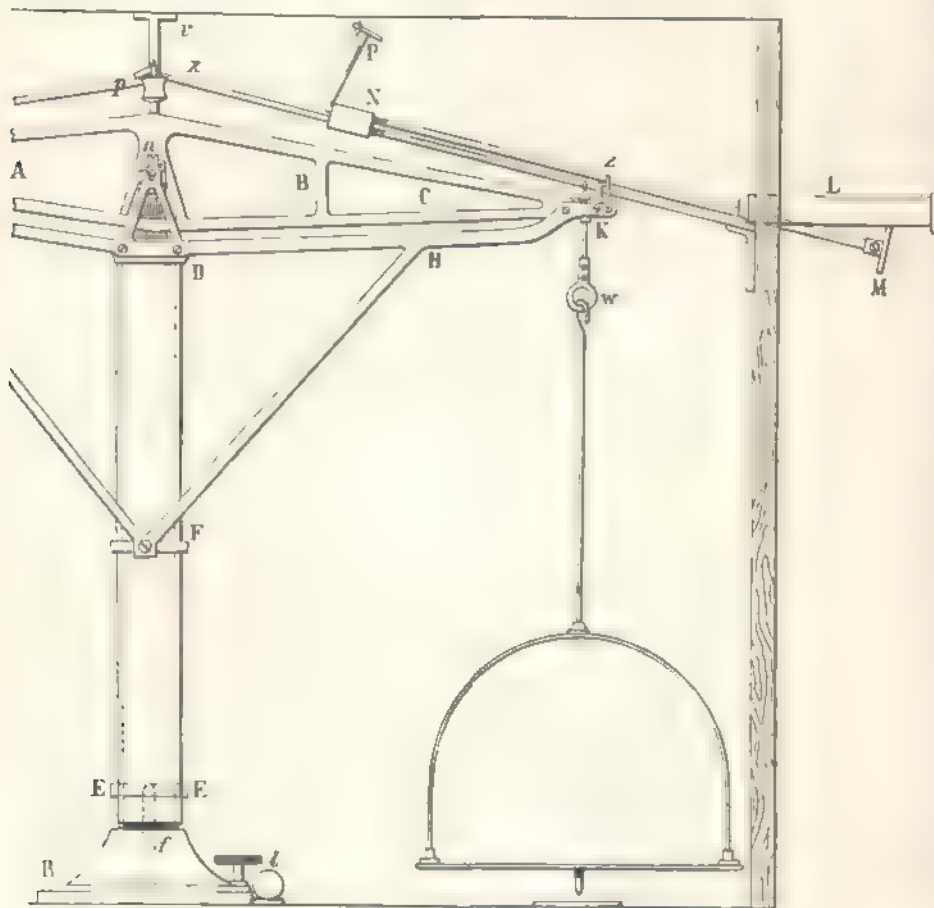
Теоретическій килограммъ долженъ былъ, первоначально, равняться массѣ одного литра чистой воды при 4° Ц. Изслѣдованія Д. И. Менделѣева (Временникъ Гл. Палаты Мѣръ и Вѣсовъ, часть 2, стр. 143. Proc. Royal Soc. of London, 59 p. 143, 1896) показали, что вѣроятнѣйшій вѣсъ одного г. вѣс. дец. чистой воды при 4° Ц. въ пустотѣ равенъ

999.847 гр.

Masé de Lepinay находитъ большее число, а именно 999.959 гр. R. 22 p. 595, 1896; J. de phys. (3) 5 p. 477, 1896).

§ 3. Устройство вѣсовъ. Главная часть вѣсовъ — это коромысло, представляющее равноплечій рычагъ. Черезъ его середину проходитъ треугольная призма, обращенная внизъ однимъ ребромъ, служащимъ линіей опоры рычага. На двухъ концахъ коромысла находятся еще двѣ призмы, обращенныя однимъ изъ реберъ вверхъ; на эти ребра упираются крючки или пластинки, къ которымъ привѣшены чашки вѣсовъ. Ребра

Рис. 163.



трехъ призмъ должны лежать въ одной горизонтальной плоскости, когда вѣсы находятся въ покоѣ, и должны быть параллельны между собою. Длинная вертикальная стрѣлка, приѣланная однимъ концомъ къ коромыслу, даетъ возможность наблюдать его качанія; для этого за другимъ концомъ стрѣлки устанавливается шкала. Въ серединѣ шкалы или, лучше, на одномъ изъ концовъ находится нулевое дѣленіе. Въмѣсто стрѣлки можно пользоваться небольшою вертикальною шкалою, приѣланною къ одному изъ концовъ

коромысла, качания котораго въ этомъ случаѣ разсматриваются въ микроскопъ, направленный на эту шкалу.

Чтобы ребра призмъ не притуплялись отъ непрерывнаго давленія коромысла или подвѣса чашекъ, устроена особая подвижная рама, которую опускаютъ внизъ, когда желаютъ производить взвѣшивание и поднимаютъ вверхъ послѣ его окончанія. Эта рама поднимаетъ коромысло, а также подвѣсы чашекъ, такъ что ребра призмъ перестаютъ подвергаться давленію.

Вѣсы помѣщаются въ стеклянныхъ ящикахъ-шкапахъ, снабженныхъ дверцами. Для удобнѣйшаго наложенія разновѣсокъ на чашки, а также, какъ мы увидимъ, на самое коромысло существуютъ крайне разнообразныя приспособленія. Во время взвѣшивания слѣдуетъ тщательно предохранять вѣсы отъ малѣйшихъ потоковъ воздуха, а также отъ неравномернаго нагреванія обоихъ плечъ коромысла (напр. тѣломъ наблюдателя).

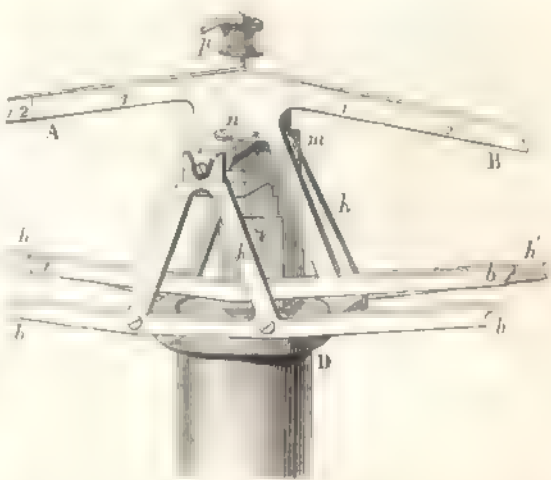
Разсмотримъ ближе устройство вѣсовъ, для которыхъ рисунки и описаніе заимствуемъ изъ курса физики Θ . Θ . Петрушевскаго. На рис. 163 представленъ общій видъ вѣсовъ съ опущеніемъ лѣвой части; на рис. 164 и 165 показаны въ большемъ масштабѣ

лѣвая часть вѣсовъ и оконечность коромысла съ подвѣсомъ чашки. Коромысло ABC вырѣзанное, для уменьшенія его вѣса. Черезъ средний вырѣзъ проходитъ подставка m , на ней находится кварцевая пластинка, на которую опирается ребро призмы n .

На рис. 165 видна оправка g которой призмы g съ три призмы сдѣланы изъ кварца. На ребро боковой призмы накладывается горизонтальная кварцевая пластинка, нахожденная въ оправкѣ ss , къ которой помощью h и кольца g прикрѣплена чашка (рис. 163).

Для аретирования вѣсовъ, т.-е. освобожденія ребръ призмъ отъ соприкосновенія съ двумя пластинками, которыя выдвигаются на крайнія призмы въ пластинкою, на которую опирается средняя призма, служитъ рамка $DHKE$ (рис. 163), части khh и $kh'h'$ которой видны на рис. 164 и часть K съ верхними штифтиками q на рис. 165. Рамка прикрѣплена къ трубкѣ DFE , хватающей средній столбъ всего прибора и снабженной внизу полукольцомъ EE , которое опирается на штифтъ f . Если вращать головку винта, находящуюся снаружи шкалика вѣсовъ, то штифтъ f поднимается, а вмѣстѣ съ нимъ поднимается трубка EFD и соединенная съ нею рамка. Часть kh (рис. 164) поднимаетъ коромысло, а штифтики q (рис. 165) пластинку ss .

Рис. 164.



Къ концу одного изъ плечъ коромысла придѣлана вертикальная шкала z (рис. 163 и 165), которая служитъ для насчитыванія малыхъ качаній коромысла при помощи микроскопа L .

Для измѣненія вѣса, дѣйствующаго на чашку съ прями на величину, меньшую вѣса самой малой гирьки, т.-е. обыкновенно сантиграмма, кладутъ послѣднюю не на чашку вѣсовъ, но ближе къ точкѣ опоры коромысла. Для этого приготавливаютъ самую гирьку въ видѣ проволоочки, имѣющей

Рис. 165.



круглую петлю, см. надѣво отъ буквы P на рис. 163; каждое плечо коромысла раздѣлено на 10 или 100 частей (рис. 164) и на коромысло непосредственно насаживается проволоочная гирька при помощи стержня $MZNP$, который гильзой N связанъ со стерженькомъ z , прикрѣпленнымъ къ крышкѣ шкалика въ v ; передвигая и вращая головку M , можно опустить проволоочную гирьку на желаемое дѣленіе коромысла. Если вѣсъ гирьки 1 мгр.

и если она опущена на 4-е дѣленіе, то слѣдуетъ прибавить на вѣсы такое же, какое обнаружилось бы отъ наложенія 0.4 мгр. на соответствующую чашку вѣсовъ.

Для измѣненія положенія центра тяжести коромысла въ вертикальномъ направленіи служатъ грузикъ p (рис. 164), который можно поднимать и опускать, а для измѣненія этого положенія въ горизонтальномъ направленіи — металлическая коромысла (фигурка), вращающаяся около той же вертикальной оси, на которую посредствомъ гайки насаженъ грузикъ p .

Мы ограничимся описаніемъ вѣсовъ стараго образца, такъ какъ по нимъ легко познакомиться съ главными частями этого сбалансированнаго прибора. Нипотъ употребляется почти только короткоплечіе вѣсы, по причинѣ, о которой будетъ сказано ниже.

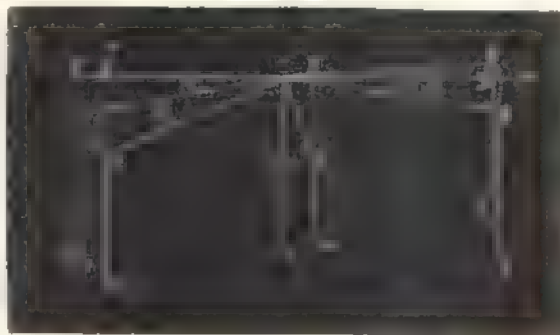
§ 4. Устойчивость, чувствительность и вѣрность вѣсовъ. Для устойчивости вѣсовъ необходимо, чтобы центръ тяжести одного коромысла падалъ вѣсколько ниже его точки опоры, т.-е. ребра средней призмы. Чашки вѣсовъ съ ихъ нагрузкою тогда только имѣли бы прямое влияние на устойчивость, еслибы они составили съ коромысломъ одно неразлучное цѣлое. Чувствительностью вѣсовъ называется ихъ способность обнаруживать замѣтное отклоненіе коромысла при маломъ перегрузкѣ p , приложенной къ одной изъ чашекъ вѣсовъ, на которыхъ уже могутъ пахо-

даться одинаковыя «нагрузки» P . Обозначая угол отклонения коромысла через β , мы за мѣру чувствительности ω примемъ величину

$$\omega = \frac{1}{l} \cdot \dots \dots \dots (1)$$

Для опредѣленія величины ω обращаемся къ рис. 166. Пусть NCM горизонтальная линия; AC и BC плечи коромысла, о которыхъ мы ради общности допустимъ, что они при равной нагрузкѣ чашекъ не сдвигаются съ горизонтальной линіей; черезъ

Рис. 166.



точки A , C и B проходятъ ребра призмъ. Къ A и B приложены силы, равныя нагрузкѣ чашекъ. Пусть $\angle ACN = \angle BCM = \alpha$; D центр тяжести коромысла, къ которому приложена сила Q , равная вѣсу коромысла. Длину плечъ обозначимъ черезъ $l = AC = BC$. Разстояніе центра тяжести отъ точки опоры черезъ $\delta = DC$. Положимъ на правую чашку грузъ P , а на лѣвую $P+p$.

т.е. p перегрузка. Плечи коромысла примутъ положеніе $A'C'B'$, центр тяжести перейдетъ въ D' ; пусть $\angle D'C'D' = \angle A'C'A' = \angle B'C'B' = \beta$.

Условіе равновѣсія коромысла въ новомъ положеніи подъ вліяніемъ силъ P , $P+p$ и Q будетъ

$$(P+p) \cdot A''C = P \cdot B''C + Q \cdot D'C$$

или

$$(P+p)l \cos(\beta + \alpha) = Pl \cos(\beta - \alpha) + Q\delta \sin \beta.$$

Раскрывъ $\cos(\beta + \alpha)$ и $\cos(\beta - \alpha)$ и раздѣливъ все уравненіе на $\cos \alpha$, получаемъ

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{pl \cos \alpha}{(2P+p)l \sin \alpha + Q\delta} \dots \dots \dots (2)$$

Для малыхъ угловъ β можно тангенсъ замѣнить дугою и тогда (1) даетъ

$$\omega = \frac{l \cos \alpha}{(2P+p)l \sin \alpha + Q\delta} \dots \dots \dots (3)$$

Еслибы ребра трехъ призмъ находились на одной прямой, т.е. еслибы мы имѣли $\alpha = 0$, то мы получили бы слѣдующую простую формулу

$$\omega = \frac{l}{Q\delta} \dots \dots \dots (4)$$

Это послѣднее выраженіе показываетъ, что чувствительность вѣсовъ пропорциональна длинѣ плечъ коромысла и обратно пропорциональна вѣсу

коромысла и разстоянію его центра тяжести отъ точки опоры. Отсюда слѣдуетъ, что для увеличенія чувствительности вѣсовъ слѣдуетъ коромысло дѣлать по возможности легче и длиннѣе, а центръ тяжести помѣщать какъ можно ближе къ точкѣ опоры.

Въ идеальномъ случаѣ, которому соответствуетъ формула (4), чувствительность вовсе не зависитъ отъ нагрузки P вѣсовъ. Вѣсѣ же общаѣ формула (3) показываетъ, что при увеличеніи нагрузки чувствительность вѣсовъ уменьшается, если уголъ α положительный, т.е. если точка опоры лежитъ выше точекъ привѣса чашекъ и что она увеличивается, если α отрицательное, т.е. ребра крайнихъ призмъ расположены выше ребра средняго. Весьма важно замѣтить, что уголъ α зависитъ отъ нагрузки P , вызывающей гнущіе коромысла, т.е. увеличение угла α . Если при $P=0$ уголъ α положительный, то чувствительность ω съ увеличеніемъ нагрузки P по двумъ причинамъ должна уменьшаться; если же начальное α отрицательное, то съ увеличеніемъ P уголъ α сперва сдѣлается равнымъ нулю а потомъ положительнымъ. Въ этомъ случаѣ чувствительность ω вѣсовъ съ увеличеніемъ нагрузки P сперва увеличивается, а затѣмъ уже начинаетъ уменьшаться, что дѣйствительно и наблюдается. Въ этомъ и заключается причина, почему въ настоящее время пользуются только короткоплечными вѣсами, въ которыхъ весьма уменьшена возможность гнущихъ коромысла.

Вѣрность вѣсовъ заключается въ ихъ способности дать истинный вѣсъ взвѣшиваемаго тѣла. Для того, чтобы вѣсы были вѣрны, должно быть удовлетворено одно главнѣйшее условіе, плечи коромысла должны имѣть неизмѣнную длину, а для этого необходимо, чтобы ребра трехъ призмъ были вполнѣ параллельны, ибо въ случаѣ ихъ непараллельности могутъ мѣняться разстоянія точекъ приложения силъ (нагрузокъ) отъ точки опоры, т.е. длина плечъ.

К. Брауэръ въ С.-Петербургѣ построилъ специальный приборъ для изслѣдованія параллельности ребръ трехъ призмъ, этотъ приборъ былъ описанъ В. В. Германтовымъ (Ж. Ф. Х. О. 9 стр. 326. 1877).

Къ указанному условію присоединяются еще условія равенства плечъ и равенства вѣса чашекъ. Мы увидимъ ниже, почему эти условія не играютъ первостепенной роли, какъ можно было бы ожидать, и какимъ образомъ можно при взвѣшиваніяхъ достигнуть того, что неточное выполненіе этихъ условій не будетъ имѣть вліянія на это результать.

Вѣрность и чувствительность требуютъ чтобы ребра призмъ были по возможности близки къ прямымъ и чтобы качанія на этихъ ребрахъ происходили съ возможно малымъ треніемъ.

§ 5. Наблюденіе качаній коромысла. Взвѣшиваніе сводится къ уравновѣшиванію тѣла разновѣсками которыя должны привести коромысло вѣсовъ къ тому же положенію, которое оно занимаетъ безъ нагрузки. Оказывается однако что при опусканіи аретира вѣсы всегда начинаютъ качаться, что эти качанія продолжаются весьма долгое время и что нѣтъ никакой возможности ожидать полнаго успокоенія коромысла. Поэтому наблюдаютъ качанія коромысла на шкалѣ (см. выше) и по его колебаніямъ вычисляютъ то дѣленіе шкалы которое соответствовало-бы ея покою,

т.-е. противъ котораго остановилось бы острое стрѣлки или которое пришлось бы противъ горизонтальной нити окуляра микроскопа (*L* рис. 163 и 165). Замѣтимъ, что при сильныхъ качаніяхъ коромысла слѣдуетъ его успокоить, приближая мягкія кисточки къ чашкамъ и что при наблюдении остающихся малыхъ качаній чашки должны только опускаться и подниматься, но отнюдь не качаться въ сторону около точекъ приѣзда, ибо при такихъ качаніяхъ развивается центробѣжная сила, перемѣщающая положеніе искомой точки. Для опредѣленія этой точки накладываютъ на шкалы три послѣдовательныхъ полуразмаха коромысла, обозначимъ соответствующіе дѣленія шкалы черезъ a , b и c , причемъ a и c суть крайнія точки съ одной, b крайняя точка съ другой стороны размаха. Берутъ среднее $\frac{a+c}{2}$ двухъ отчетовъ съ одной стороны и затѣмъ среднее между этимъ среднимъ и отчетомъ b съ другой стороны. Полученное число и дасть искомое дѣленіе n шкалы, соответствующее положенію равновѣсія. Итакъ

$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{a+c}{2} + b \right) = \frac{1}{4} (a + 2b + c) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Когда наблюдаютъ четыре остановки a , b , c и d (a и c съ одной, b и d съ другой стороны) то положеніе n вычислится по формулѣ

$$n = \frac{1}{8} (a + 3b + 3c + d). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

которымъ получается если найти среднее изъ двухъ положеній покоя, вычисляемыхъ по формулѣ (5) изъ остановокъ a , b , c и b , c , d :

$$n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} (a + 2b + c) + \frac{1}{4} (b + 2c + d) \right] = \frac{1}{8} (a + 3b + 3c + d).$$

Передъ взвѣшиваніемъ слѣдуетъ тѣмъ же способомъ опредѣлить дѣленіе n , шкалы, которому соответствуетъ положеніе равновѣсія коромысла при пустыхъ чашкахъ.

Для примѣра положимъ, что при пустыхъ чашкахъ точки поворота суть

на лѣво или вверхъ

направо или внизъ

10,6

8,3

10,4

Среднее 10,5

$$n_0 = \frac{10,5 + 8,3}{2} = 9,4.$$

Итакъ равновѣсію соответствуетъ дѣленіе $n_0 = 9,4$. Если посреди шкалы находится нулевое дѣленіе то отчетамъ слѣдуетъ приписывать знакъ.

При взвѣшиваніи опять наблюдаются качанія. При этомъ требуется опредѣлить ту сумму разностей, при которой положеніе равновѣсія опредѣлится дѣленіемъ n_0 . Обыкновенно въ которое количество разностей дать положеніе равновѣсія, лежащее съ одной стороны отъ n_0 , а прибавка самой этой разности переносить это положеніе на другую сторону отъ n . Тогда

изъ простой пропорціи получается та доля самой малой разновѣски при которой положеніе равновѣсія опредѣляется дѣленіемъ n . Приведемъ примѣръ полагая, какъ найдено выше, $n = 9.4$. Нагрузка 43,765 гр. даетъ

на лѣво или вверхъ	на право или внизъ
9.7	
9.5	7.2
Среднее 9,6	

Положеніе равновѣсія $n_1 = \frac{9,6 + 7,2}{2} = 8.4$.

Нагрузка 43,766 гр. даетъ

на лѣво или вверхъ	на право или внизъ
10.9	
10.7	8.8
Среднее 10,8	

Положеніе равновѣсія $n_2 = \frac{10,8 + 8,8}{2} = 9,8$.

Итакъ отъ прибавки 1 мгр. положеніе равновѣсія передвинулось на $9,8 - 8,4 = 1,4$ дѣленія. Некая прибавка x къ меньшей нагрузкѣ должна передвинуть это положеніе на $n - 8,4 = 9,4 - 8,4 = 1,0$ дѣленіе.

Отсюда $x = \frac{1,0}{1,4} = 0.71$ и слѣдовательно искомая сумма разновѣсокъ 43,7657 гр.; послѣднюю цифру (7) отбрасываемъ.

Р. Сигге построилъ апериодическіе вѣсы, въ которыхъ качанія коромысла вызываютъ небольшія скачкія и разрыванія воздуха находящагося подъ чашками въ особѣхъ сосудахъ. Вслѣдствіе этого амплитуды качанія коромысла весьма быстро уменьшаются.

Подробности о точнѣйшихъ способахъ взвѣшиванія устроивъ вѣсы и т. д. можно найти въ работахъ Д. И. Менделѣева (Ж. Ф. Х. О. 1893, Отд. Химич., стр. 509).

§ 6. Способы взвѣшиванія Замѣтимъ что не слѣдуетъ до разновѣсокъ прикасаться пальцами; нѣтъ слѣдуетъ брать металлическими когтями или иными щипчиками или вилками. Накладываніе разновѣсокъ на чашки и сниманіе нѣтъ слѣдуетъ производить только, когда вѣсы аретированы.

Существуетъ три способа взвѣшиванія, исключаютъ вліяніе неравенства плечъ коромысла или вѣса чашекъ.

1. Способъ Gauss'a двойного взвѣшиванія. Тѣло кладутъ сперва на одну чашку, потомъ на другую и опредѣляютъ тѣ два груза p_1 и p_2 , которыми оно уравновѣшивается. Обозначивъ длину плеча, на которомъ сперва дѣйствовалъ некой вѣсъ p тѣла черезъ l_1 , а длину другого плеча черезъ l_2 , имѣемъ

$$\left. \begin{aligned} p &= p_1 l_2 \\ p &= p_2 l_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Перемноживъ, получаемъ $p^2 = p_1 p_2$, т.-е.

$$p = \sqrt{p_1 p_2} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

такъ какъ при малой разности между p_1 и p_2 геометрическое среднее можно считать равнымъ среднему арифметическому (см. стр. 243).

Раздѣливъ уравненія (7) другъ на друга, находимъ отношеніе $\frac{l_1}{l_2}$ плечъ которое обозначимъ черезъ λ ,

$$\lambda = \frac{p_1}{p_2}$$

Если $\frac{p_1}{p} = 1 + \alpha$ гдѣ α малая величина, то

$$\lambda = \frac{p_1}{p_2} = \sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Итакъ способъ двойного взвѣшиванія даетъ между прочимъ и отношеніе плечъ коромысла.

II. Способъ Borda или способъ тарирования. Тѣло, положенное на одну изъ чашекъ вѣсовъ сперва уравновѣшиваютъ пескомъ, шипками, дробью и т. под. Затѣмъ снимаютъ тѣло и кладутъ на его мѣсто разновѣски, уравновѣшивающія песокъ опилки или дробь. Ясно, что вѣсъ тѣла опредѣлится этими разновѣсками, независимо отъ равенства или неравенства плечъ коромысла.

III. Способъ Менделѣева постоянной нагрузки или постоянной чувствительности. Мы видели (стр. 292), что чувствительность вѣсовъ зависитъ отъ нѣхъ нагрузки.

Чтобы рядъ взвѣшиваній производить при постоянной чувствительности вѣсовъ поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Положимъ что вѣсы назначены для наибольшей нагрузки въ 1 килогр. на каждую чашку. Тогда кладутъ на одну чашку гирю въ 1 килогр., а на другую полную, для разновѣсокъ, составляющую вмѣстѣ 1 килогр. Небольшой гирькой, висѣвшею съ надлежащей стороны, приводятъ положеніе равновѣсія къ равнѣю шкалы, если коромысло вѣсовъ оказывается слишкомъ наклоненнымъ. Взвѣшиваемое тѣло кладутъ на чашку съ разновѣсками и снимаютъ изъ нѣхъ столько, чтобы возстановить равновѣсіе. Снятыя разновѣски опредѣляютъ вѣсъ тѣла.

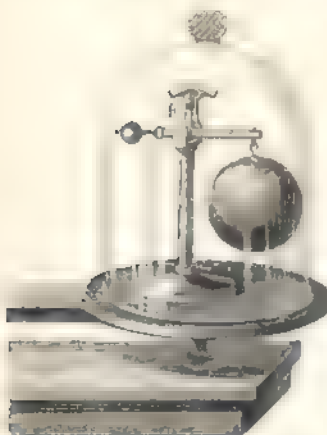
§ 7. Поправка на потерю вѣса тѣлъ въ воздухѣ. На основаніи закона Архимеда всякое тѣло въ воздухѣ теряетъ (какъ принято выражаться) въ вѣсѣ столько, сколько вѣситъ вытѣсненный имъ объемъ воздуха. Такъ какъ плотность воздуха приблизительно $\frac{1}{770}$, то ясно, что тѣло, плотность котораго единица, теряетъ около 0.13% своего вѣса причину громадную, если ее сравнить съ тою степенью точности, которая при взвѣшиваніи можетъ быть достигнута и которая доходитъ до одной сотой, где одно изъ наиболѣе плотныхъ тѣлъ платина, теряетъ на воздухѣ

0.006", своего вѣса. При взвѣшиваніи килограмма изъ платины это составляетъ 60 мгр., т.-е. въ 600 разъ превосходитъ наименьшую, еще заметную на вѣсахъ величину (0.1 мгр.).

Извѣстнымъ приборомъ, бароскопомъ, который изображенъ на рис. 167, легко обнаружить кажущееся пріобрѣтеніе вѣса при переходѣ тѣла изъ воздуха въ пустоту и показать что это пріобрѣтеніе тѣмъ больше, чѣмъ больше объемъ тѣла. Маленькій металлическій и большой деревянный шарикъ взаимно уравновѣшиваются въ воздухѣ, подъ колоколомъ воздушнаго насоса второй оказывается тяжелѣе, слѣд. при переходѣ изъ пустоты въ воздухъ онъ потерялъ больше вѣса, чѣмъ первый.

Потери вѣса мѣняются вмѣстѣ съ плотностью воздуха, т.-е. съ барометрическимъ давленіемъ, съ температурою воздуха и его составомъ. вѣсма

Рис. 167.



переменнымъ относительно содержащихся въ немъ водяныхъ паровъ; отсюда слѣдуетъ что и «кажущійся вѣсъ» тѣла величина мѣняющаяся; поэтому при всякомъ точномъ взвѣшиваніи предполагается, что опредѣленно подержать т. наз. «истинный вѣсъ», т.-е. вѣсъ тѣла въ пустотѣ. Вычисленіе истиннаго вѣса на основаніи наблюдаемаго и называется «введеніемъ поправки на потерю вѣса въ воздухѣ».

Съ измѣненіемъ состоянія воздуха мѣняется и кажущійся вѣсъ гирь, а потому мы разъ напередъ будемъ предполагать, что наименованное гирь (съ поправками, найденными при калиброваніи) относится къ ихъ вѣсу въ пустотѣ.

Необходимость введенія поправки исчезаетъ, когда взвѣшиваніе производится въ пустотѣ, что дѣйствительно иногда и дѣлается (впервые

Regnault въ 1860 г., нынѣ Д. И. Менделѣевымъ въ Гл. Палатѣ мѣръ и вѣсовъ и др.), а также, когда взвѣшиваемое тѣло и разновѣски состоятъ изъ одинаковаго матеріала. Важнѣйшая величина, которую необходимо знать для введенія разсматриваемой поправки, это вѣсъ куб. сантиметра сухого воздуха при 0° и давленіи въ 760^{мм}, т.-е. при давленіи, равномъ давленію ртутнаго столба высотой въ 760^{мм} при 0°, на уровнѣ моря и на широтѣ 45°. Обозначимъ этотъ вѣсъ черезъ p_0 .

Онъ различенъ на различныхъ широтахъ и очевидно, что онъ пропорціоналенъ ускоренію g силы тяжести. По изслѣдованіямъ Менделѣева

$$p_0 = 1.31844g \text{ мгр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ g выражено въ ^{метр.}_{сек.}. Принимая для Петербурга $g = 9.8188$, получаемъ для этого города

$$p_0 = 1.29455 \text{ мгр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Главная Палата мѣръ и вѣсовъ обозначаетъ вѣсъ литра сухого воздуха при нормальныхъ условіяхъ знакомъ $e_0 = 1000 p_0$.

Положимъ что взвѣшиваніе производится при температурѣ t° , барометрическомъ давленіи H и что упругость водяныхъ паровъ, содержащихся въ воздухѣ, есть h . Въ этомъ случаѣ вѣсъ p куб. см. воздуха равенъ

$$p = p_0 \frac{H-h}{760(1+\alpha t)} + p_0 \delta \frac{h}{760(1+\alpha t)},$$

гдѣ $\alpha = 0,00367$ коэффициентъ расширенія газовъ и δ плотность паровъ воды относительно воздуха, которую можно принять равною $\frac{5}{8}$. Упростивъ, имѣемъ

$$p = p_0 \frac{H - \frac{5}{8} h}{760(1 + \alpha t)} \text{ мгр. (12)}$$

Формулою (12) пользуются лишь въ исключительныхъ случаяхъ. При обыкновенныхъ условіяхъ взвѣшиванія, при комнатной температурѣ, можно принять, когда не требуется крайняя точность,

$$p = 1,2 \text{ мгр.} = 0,0012 \text{ гр. (13)}$$

Пусть P искомый, истинный вѣсъ тѣла, V его объемъ, D его плотность, Q истинный вѣсъ разновѣсокъ, который намъ извѣстенъ (см. выше стр. 296), v ихъ объемъ и d ихъ плотность. Потеря вѣса тѣла равна $pV = p \frac{P}{D}$, потеря вѣса разновѣсокъ $p_v = p \frac{Q}{d}$. Въ воздухѣ вѣсы указываютъ равенство вѣсовъ тѣла и разновѣсокъ, слѣд.

$$P - p \frac{P}{D} = Q - p \frac{Q}{d} \text{ или } P \left(1 - \frac{p}{D}\right) = Q \left(1 - \frac{p}{d}\right),$$

откуда искомый истинный вѣсъ тѣла

$$P = Q \frac{1 - \frac{p}{d}}{1 - \frac{p}{D}}.$$

Въ виду малости поправокъ можно положить (см. стр. 243)

$$P = Q \left(1 - \frac{p}{d}\right) \left(1 + \frac{p}{D}\right) = Q \left(1 + \frac{p}{D} - \frac{p}{d}\right),$$

или

$$P = Q + Qp \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right) (14)$$

Вставляя значеніе (13), получаемъ

$$P = Q + 0,0012Q \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right) \text{ гр. (15)}$$

или

$$P = Q + 1,2Q \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right) \text{ мгр. (16)}$$

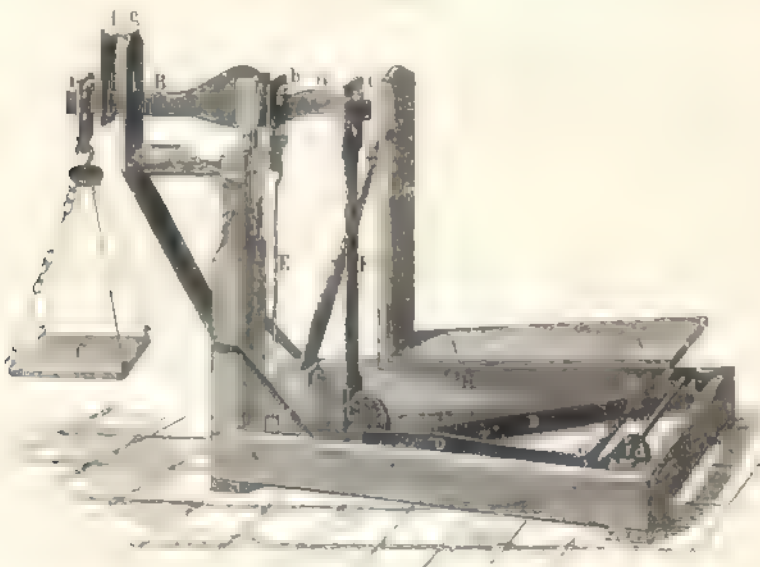
Второй членъ въ (16) дастъ искомую поправку въ миллиграммахъ, въ немъ Q выражено въ граммахъ.

Когда взвѣшиваніе производится при помощи латинныхъ разновѣсокъ, то $\delta = 8,4$. Напишемъ (16) въ видѣ

$$\text{тогда} \quad \left. \begin{aligned} P &= Q + kQ \\ k &= 1,2 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{8,4} \right) \text{ мгр.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Существуютъ таблички, дающія значеніе множителя k для различныхъ плотностей D взвѣшиваемого тѣла, а также таблички поправокъ для

Рис. 168



случаи, когда взвѣшиваніе производится при помощи латинныхъ разновѣсокъ, для которыхъ $\delta = 22$ и слѣд. $k = 1,2 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{22} \right)$ мгр.

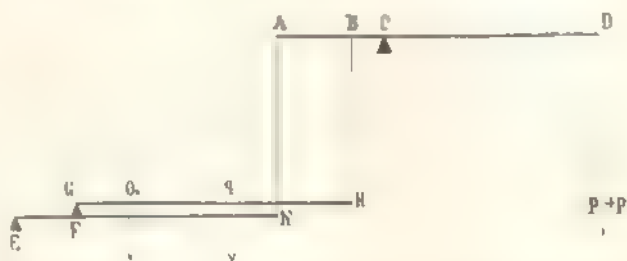
Изъ всѣхъ измѣреній взвѣшиваніе можетъ быть произведено съ наибольшою точностью, достигающей при надлежащемъ устройствѣ вѣсовъ, а главное навыкъ и осматрительности наблюдателя до $\frac{1}{10}$ измѣряемой величины, т.-е. до 0,1 мгр., когда взвѣшивается 1 килограммъ.

§ 8. Всѣ десятичные, вѣсы Роберваля, Вестфала и Траллеса. Разсмотримъ нѣкоторые приборы, служащіе для взвѣшиванія по по конструкции существенно отличающіеся отъ описанныхъ выше равноплечихъ вѣсовъ.

1. Вѣсы десятичные: они изображены въ нѣсколько разобранномъ видѣ на рис. 168. Взвѣшиваемый грузъ кладется на платформу AA , гири на доску C ; платформа и доска связаны такою системою рычаговъ, что

при равновѣсїи истинный вѣсъ тѣла въ 10 разъ болѣе вѣса гирь. на какое бы мѣсто платформы AD не помѣстить тѣло. На схематическомъ рисункѣ 169 GH платформа, съ одной стороны опирающаяся на точку (линию) F рычага второго рода EK , съ другой привѣшенная къ точкѣ B рычага первого рода AD , къ которому въ A привѣшенъ конецъ K рычага AK и въ D доска для гирь. Пусть Q опредѣляетъ мѣсто и вѣсъ тѣла, положеннаго на платформу, и P вѣсъ гирь, служащихъ для его уравновѣшиванія. Докажемъ, что $Q = 10P$, если соблюдены слѣдующія два условія

Рис. 169.



$$\left. \begin{aligned} CD &= 10BC \\ \frac{EF}{EK} &= \frac{BC}{AC} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Грузъ Q давитъ на G и F съ силою Q_{GH}^{QH} ; часть $\frac{EF}{EK}$ этой силы дѣйствуетъ на K и на A и даетъ на рычагѣ AD моментъ $M_1 = Q_{GH}^{QH} \cdot \frac{EF}{EK} \cdot AC = Q \cdot \frac{QH}{GH} BC$, см. (18). Тотъ же грузъ Q давитъ на H и B съ силою Q_{GH}^{GQ} и даетъ моментъ $M_2 = Q_{GH}^{GQ} BC$. Сумма моментовъ $M_1 + M_2 = Q_{GH}^{QH} BC + Q_{GH}^{GQ} BC = Q_{GH}^{BC} (QH + GQ) = Q_{GH}^{BC} GH = Q \cdot BC$ должна равняться моменту гирь P , т.-е.

$$Q \cdot BC = P \cdot CD.$$

откуда, см. (18),

$$Q = 10P.$$

Если вѣсъ платформы q и вѣсъ доски p , то мы имѣемъ $(Q + q) = 10(P + p)$; но такъ какъ вѣсы находятся въ равновѣсїи безъ нагрузки, то $q = 10p$, откуда опять $Q = 10P$.

Существуютъ вѣсы, въ которыхъ $CD = 100BC$, для нихъ $Q = 100P$.

II. Вѣсы Роберваля употребляются для взвѣшиваній, не требующихъ особенно большой точности. Ихъ внѣшнїй видъ вѣдемъ извѣстнъ; внутреннее устройство показано на схематическомъ рис. 170. Два стержня AB и CD одинаковой длины вращаются около неподвижныхъ точекъ E и F . Равновѣсные стержни AC и BD соединены съ ними четырьмя шарнирами; на нихъ продолженія насажены чашки ab и cd . Когда

вся система качается около точек E и F , то прямоугольникъ $ABDC$ принимаетъ форму параллелограмма, причемъ стороны AC и BD , не переставая быть параллельными неподвижной линіи EF , остаются вертикальными, вследствие чего чашки остаются горизонтальными. На какое мѣсто чашекъ мы ни положили бы тѣло M , весь котораго P , его дѣйствіе на всю систему рычаговъ будетъ такое же, какъ еслибы сила P имѣла точку приложения въ центрѣ O чашки, т.-е. непосредственно дѣйствовала бы на стержень BD . Дѣйствительно: приложимъ къ O еще дѣѣ силы P (см. рис. 170) сила P , направленная вверхъ, и весь P тѣла составятъ пару силъ, стремящуюся вращать чашку. Дѣйствіе этой пары уничтожается сопротивленіемъ точекъ E и F , пытающихся чашку перевертывать иначе, какъ параллельно самой себѣ. Остается сила OP , направленная внизъ. Изъ ска-

Рис. 170

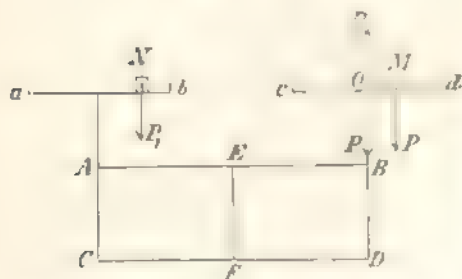


Рис. 171.



заннаго ясно, что грузы M и X находятся въ равновѣсїи, когда ихъ весь P и P_1 равны между собою, гдѣ бы они ни лежали на чашкахъ.

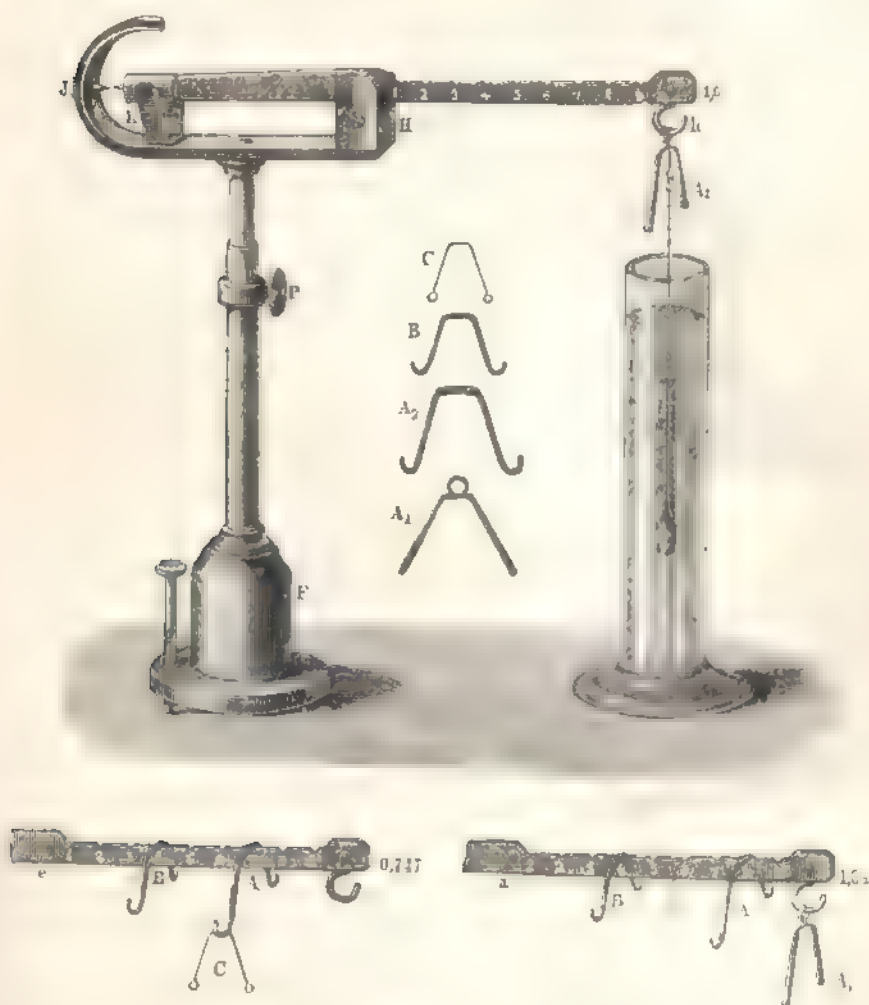
Докажемъ инымъ путемъ, что при равновѣсїи $P = P_1$. Положимъ, что грузы P и P_1 , расположенные, какъ показано на рис. 170, несимметрично, находятся въ равновѣсїи. Если наклонить весь налѣво, то правый грузъ P поднимется на некоторую высоту h , а лѣвый P_1 опустится на h . Работа силы тяжести будетъ $P_1h - Ph$; эта работа должна равняться нулю, когда подъ вліяніемъ силы тяжести вся система находится въ равновѣсїи. $P_1h - Ph = 0$ даетъ $P = P_1$.

На рис. 171 показано устройство болѣе сложныхъ вѣсовъ, причемъ изображена лишь лѣвая ихъ половина; точки опоры находятся въ e и g ; въ d , e , f , k , m , a и b находятся шарниры. И здѣсь стержень kl , поддерживающій чашку, остается вертикальнымъ, когда ac качается около e , а потому чашки перевертываются параллельно самимъ себѣ.

III. Вѣсы Westphal'я, иногда называемые одноплечими, хотя это названіе не точно, назначены для опредѣленія удѣльнаго вѣса жидкостей, а потому мы къ нимъ еще разъ возвратимся (см. Отдѣлъ пятый, гл. II § 5); теперь ограничимся описаніемъ этихъ вѣсовъ, изображенныхъ на рис. 172. Рычагъ KHh качается, какъ коромысло вѣсовъ на ребрѣ призмы около H . Плечо Kh раздѣлено на 10 частей; надъ дѣленнями сдѣланы маленькія зарубки, которыя, какъ и крючекъ h , служатъ для удобнѣйшаго привѣшиванія разновѣсокъ, изображенныхъ въ A_1 , A_2 , B и C . Они выбраны

такъ, что A_1 и A_2 имѣть одинаковый вѣсъ, вѣсъ B равенъ 0,1 и вѣсъ $C = 0,01$ вѣса A_1 и A_2 , который примемъ за единицу. Легко понять, что нагрузка, изображенная внизу слѣва, соответствуетъ 0,747, а нагрузка справа 1,846 ед. вѣса. Цилиндрикъ K служить противовѣсомъ; положеніе

Рис. 172.

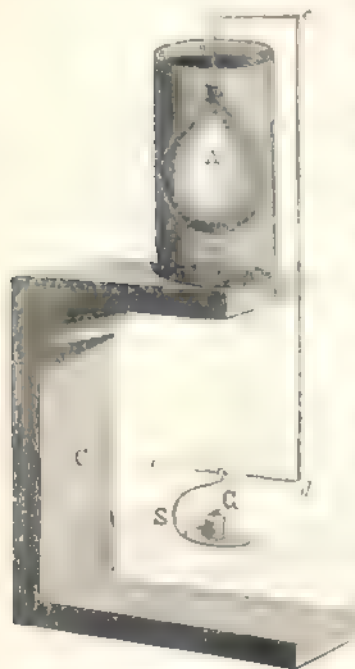


равновѣсія определяется тѣмъ, что остріе, прикрѣпленное къ K , должно сходиться противъ острія J . Отпустивъ винтъ P , можно поднять или опустить систему JHK . Одна винтовая ножка служитъ для установки нивира. Мы увидимъ далѣе, какъ подправить разновѣски для удобнаго опредѣленія плотности жидкостей. Но эти вѣсы могутъ служить и для опредѣленія вѣса тѣлъ, получаемого однако въ единицахъ, равныхъ вѣсу A_1 и A_2 .

Для этого определим нагрузку, приходящую вѣсѣ въ равновѣсѣе, когда тѣло не привѣшено къ крючку *h*, а потомъ, когда оно къ нему прикреплено. Разность нагрузокъ и определитъ искомый вѣсъ тѣла. Для большаго удобства иногда увеличиваютъ число гирекъ, имѣющихся при вѣсахъ.

IV. Вѣсы *Tralles*'а представляютъ интересный примѣръ применения принципа Архимеда къ взвѣшиванию тѣлъ. Они изображены на рис. 173. Къ полному тѣлу *A*, погруженному въ сосудъ *B* съ водою, прикреплена изогнутая проволока, на которой въ *m* проведена черта; вдоль горизонтальной части *de* передвигается чашка *S*, что даетъ возможность привести ось полного тѣла въ вертикальное положеніе. На чашку *S* кладутъ сперва столько гирь, чтобы проволока опустилась до черты *m*, затѣмъ кладутъ на чашку взвѣшиваемое тѣло и снимаютъ столько гирь, чтобы вода опять доходила до черты *m*. Этими гирями определяется вѣсъ тѣла.

Рис. 173.



§ 9. Динамометры. Динамометрами называются приборы, служащие для измерения силы; эти силы, действуя непосредственно на приборъ, вызываютъ въ немъ опредѣленные измѣненія формы, чему противодѣйствуютъ упругія силы, стремящіяся возстановить эту форму. Дальнѣйшее измѣненіе формы прекращается, когда внѣшняя измѣряемая сила уравновѣшивается внутренними упругими силами, растущими съ увеличеніемъ измѣненія формы; последнее, такимъ образомъ, можетъ служить мѣрою приложенной силы.

Для калиброванія динамометра заставляютъ на него дѣйствовать рядъ силъ известной величины, проще всего рядъ тяжестей, напр. 1, 2, 3 и т. д. грамма или килограмма, смотря по роду и назначенію динамометра, и отмѣчаютъ вызванными ими измѣ-

ненія формы. Понятно, что динамометръ, разъ онъ калиброванъ, можетъ служить также и для опредѣленія вѣса тѣлъ, замѣняя вѣсы съ которыми онъ, однако, по степени точности показаній сравниться не можетъ.

Обыкновенные, вѣсъ известные, пружинные вѣсы, могутъ служить простымъ примѣромъ динамометра.

Существуетъ множество разнообразныхъ динамометровъ, въ которыхъ имѣются дугообразно согнутыя пружины. На рис. 174 изображенъ одинъ изъ этихъ динамометровъ, измѣряемую силу заставляютъ сдѣлывать приборъ, т.-е. приближать обѣ половины пружины, изъ которыхъ одна *ADC*, какъ видно на рисунокъ, дѣйствуетъ на плечо ломаннаго рычага; другое плечо котораго составляетъ стрѣлка съ остриемъ, перемѣщающимся вдоль дугообразной шкалы *EF*. Одна половина пружины должна

быть закреплена неподвижно. Можно также закрепить приборъ въ C и заставить силу действовать въ A по направлению продолжения прямой CA . Удаление точекъ A и C другъ отъ друга вызоветъ взаимное приближеніе D и B и слѣд. движеніе стрѣлки. На дугѣ EF начертаны двѣ шкалы, соответствующія двумъ способамъ примѣненія прибора.

Большую точностью отличается динамометръ Poncelet и Morin'a, изображенный на рис. 175. Двѣ стальные полоски AA' и $A'A'$ соединены между собою шарнирами C , C' , C'' и C''' , около которыхъ концы ихъ могутъ вращаться при изгибании. Пластинка AA' закреплена неподвижно; къ другой прицѣпленъ крючокъ, служащій для удобнѣйшаго приложенія силы (груза, тѣлѣ монеты и т. д.) и карандашъ B , проводящій по бумагѣ черту, длина которой и служить мѣрою приложенной силы, ибо, какъ оказывается, въ этомъ приборѣ сила и вызваннаго ею перемѣщеніе точки B съ высочайшею точностію другъ друга про-

Рис. 174.

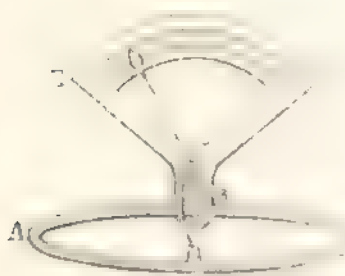


Рис. 175.



порциональны. Необходимо только разъ навсегда опредѣлить законъ длины черты, соответствующей силѣ напр. въ 100 килогр., что очевидно легко сдѣлать. Лекционный динамометръ построилъ Н. А. Греховъ (Ж. Ф. Х. О 17 стр. 69, 1885).

§ 10. Одновитные крутильные вѣсы или унифиляръ. Этотъ важный приборъ служитъ для измѣренія притягательныхъ или отталкивательныхъ силъ, обнаруживающихся въ различныхъ случаяхъ между тѣлами (всѣмрѣное тяготѣніе, притяженія и отталкиванія между магнитами или электризованными тѣлами). На рис. 176 изображенъ одинъ изъ многихъ различныхъ видовъ унифиляръ иногда впрочемъ не представляющаго особаго прибора, но входящаго какъ часть въ составъ другихъ болѣе сложныхъ инструментовъ.

Существенная часть унифиляръ — это горизонтальное, обыкновенно стержневидное тѣло, висѣющее на тонкой нити, прикрѣпленной надъ его центромъ тяжести. Нить можетъ быть металлическая (алюминій, серебро, платина), стеклянная или коконовая. Въ послѣднее время стали готовить нити кварцевыя (предложены Вузомъ въ Англии). Горизонтальное тѣло можетъ быть весьма различное, смотря по тому для какихъ измѣреній назначенъ унифиляръ: это можетъ быть легкий стерженецъ, снабженный

на одномъ или на обоихъ концахъ шариками, магнитъ, плоская продолговатая пластинка и т. д. Это тѣло помѣщается въ унифиляръ внутри круглаго или четырехугольнаго стекляннаго ящика а нить внутри вертикальной трубки *В*, поставленной надъ круглымъ отверстиемъ, вырѣзаннымъ посреди крышки ящика. Въ этой крышкѣ имѣется обыкновенно сбоку еще второе отверстие, служащее для ввода во внутрь ящика другаго тѣла (магнита, наэлектризованнаго шарика), отталкивательное дѣйствие котораго на горизонтальное тѣло требуется измѣрить.

Верхній конецъ нити прикрѣпленъ къ центру крышки вертикальной трубки. Эта крышка вращается, причемъ уголъ вращения можетъ быть

Рис. 176.



измѣренъ; кромѣ того обыкновенно существуетъ приспособленіе для подниманія или опусканія всей нити. На рис. 177 изображена верхняя часть трубки одного изъ унифиляръ. Нить прикрѣплена къ стержню *g* который можетъ быть приподнять, опустить, повернуть и закрѣпить въ надлежащемъ положеніи при помощи зажимнаго винта, который виденъ на рисункѣ. Верхняя часть трубки окружена мѣдной оправкой къ неподвижной части которой прикрѣпленъ указатель *d*. Край подвижной части состоитъ изъ двухъ частей: верхняя половина раздѣлена на градусы, нижняя снабжена зубцами, которые захватываются безконечнымъ винтомъ пригоднымъ изданъ по вращенію при помощи длиннаго стержня *r* и особаго сочлененія *p* избыточно подъ названіемъ шарнира Гюка. Если желаютъ повернуть подвижную часть сразу на большой уголъ, то отодвигаютъ безконечный винтъ отъ зубчатого колеса, пользуясь ручкой *m*, дѣйствующей на особый эксцентрикъ. Тогда посред-

ствомъ четырехъ стержней *s*, *s*, *s* можно повернуть крышку трубки на желаемый уголъ.

Нижняя горизонтальная часть унифиляра вращается по время измѣреній около нити, къ которой она прилѣплена, причемъ существуетъ возможность измѣрить уголъ поворота этой части. Въ некоторыхъ приборахъ лента съ градусными дѣленіями наклеена снаружи на стеклянный ящикъ, или на стеклянную крышкѣ этого ящика начертанъ кругъ съ дѣленіями. Визируя сбоку или сверху, можно сдѣлать грубое опредѣленіе угла поворота подвижной части. Въ точныхъ приборахъ подвижная часть прибора снабжена зеркальцемъ и уголъ поворота опредѣляется по способу зеркала и шкалы (стр. 275).

Когда нить и нижній стержень (не магнитъ) вполне предоставлены самимъ собою, то стержень принимаетъ нѣкоторое опредѣленное положеніе

покою, соответствующее нормальному состоянию, при котором нить вполне раскручена. Если один из концов нити повернуть на некоторый угол φ , то она уже будет находиться в ненормальном состоянии, она будет закручена; в ней разовьются внутренние упругие силы, стремящиеся восстановить нормальное состояние, т. е. повернуть нити, свободный конец, а след. и тѣло, которое висит на этомъ концѣ. На этотъ конецъ и на это тѣло будетъ след. действовать некоторая пара силъ, моментъ которой мы обозначимъ черезъ M . Чѣмъ больше уголъ кручения φ , тѣмъ больше и моментъ M пары. Оказывается, что для очень тонкихъ

Р'мс. 177.

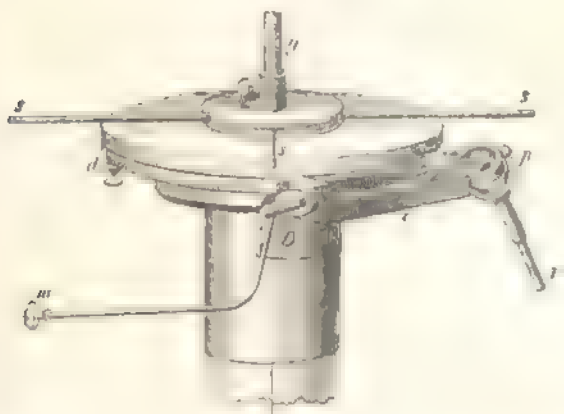
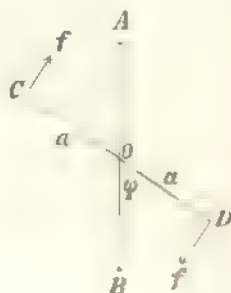


Рис. 178.



проволочек момент M пропорционален U^2 и что эта пропорциональность строго справедливо вплоть до $U = 0,5$ в. в. в. только тогда, когда U не превышает 0,5 в. в. в.

Мы можем слѣд. положить

$$M = C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

УГ C' равно численному значению момента пары сил, развивающейся при вращении свободного конца нити на 100° , равный единице (стр. 36).

Чтобы удержать свободный конец нити въ закрученномъ на уголъ φ положеннн, необходимо приложить къ нему пару силъ, моментъ которой очевидно долженъ равняться раскручивающему моменту M упругихъ силъ. Отсюда слѣдуетъ, что формула (19) опредѣляетъ собою и моментъ M пары вѣшнихъ силъ, которую необходимо приложить къ свободному концу нити чтобы удержать нить въ закрученномъ на уголъ φ состояннн; (численно равно моменту пары, вызывающей уголъ крученнн, равный единицѣ).

Численное значение коэффициента C можно определить из наблюдения времени T качания горизонтального стержня, повернутого в сторону и затем предоставленного самому себе. Положим, что AB (рис. 178) положение стержня когда нить, прикрепленная в O и перпендикулярная к плоскости рисунка вонзѣ, раскручена. Когда

стержень повернуть на угол φ и занимает положение CD , то на него действует пара сил, момент которой $M = C\varphi$. Эту пару сил можно замѣнить произвольною парой ff , при условии, чтобы

$$2fa = M.$$

гдѣ $a = CO = OD$. Сравнивая это равенство съ (19), получаемъ

$$f = \frac{C}{2a} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

гдѣ справа можно поставить знак $(-)$, чтобы указать, что f направлено въ сторону уменьшающихся φ . Итакъ, на половину OD стержня действуетъ сила f , пропорциональная углу φ . Сравнивая этотъ случай со случаемъ весьма малыхъ колебаний физическаго маятника, мы видимъ, что оба случая съ механической стороны тождественны. Мы для маятника имѣемъ вообще $f = P \sin \varphi$, гдѣ P его вѣсъ; только для весьма малыхъ φ можно принять формулу

$$f = P\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

(вѣрнѣе $f = -P\varphi$), которая приводитъ къ закону изохронности колебаний. Въ нашемъ случаѣ f пропорционально φ и при большихъ углахъ, а потому колебания унифильтра представляютъ замѣчательный примѣръ изохронности: при малыхъ и при весьма большихъ размахахъ время T колебания одно и то же, если только нить настолько тонка, что и для крайняго положенія формула (19) остается вѣрною.

Для времени T качанія физическаго маятника мы имѣли формулу

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

гдѣ K моментъ инерціи маятника относительно оси вращения, P его вѣсъ и a расстояние точки приложенія силы P (центра тяжести) отъ оси вращения, см. (41) стр. 219.

Обозначая теперь черезъ K моментъ инерціи всего стержня AB относительно оси вращения (оси нити) и приложивъ (22) къ половинѣ OD стержня, мы должны въ (22) вмѣсто K положить $\frac{1}{2} K$. Сила $P = \frac{f}{\varphi} = \frac{C}{2a}$, см. (21) и (20).

Теперь (22) даетъ

$$T = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2} K}{\frac{C}{2a}}} = \pi \sqrt{\frac{K}{C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Послѣдняя формула даетъ

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

пропорціонально коэффициенту C , ибо чѣмъ меньше моментъ пары силъ, вызывающей данное кручение, тѣмъ чувствительнѣе приборъ. Не входя въ подробности, къ которымъ мы еще возвратимся, скажемъ, что чувствительность унифиляра тѣмъ больше, чѣмъ нить длиннѣе, чѣмъ она тоньше и чѣмъ ея матеріалъ меньше противится кручению. Болѣе точные законы разсмотримъ впоследствии.

§ 11. Двунитные крутильные вѣсы или бифиляръ. Этотъ приборъ отличается отъ унифиляра только тѣмъ, что горизонтальный стержень AB (рис. 181) виситъ на двухъ нитяхъ CE и DF , о которыхъ мы, ради общности, предположимъ, что онѣ не параллельны.

Условіе равновѣсія заключается въ томъ, что AB должно находиться въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точки E и F , или иначе,

Рис. 181.

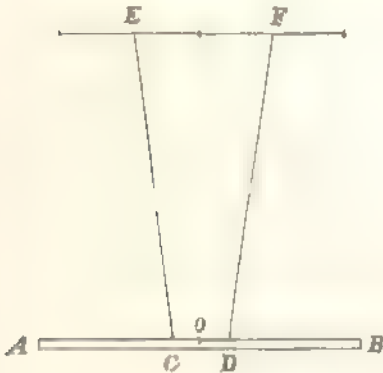
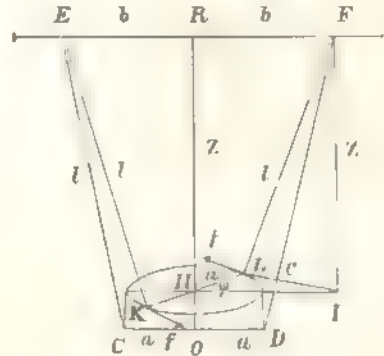


Рис. 182.



что AB параллельно EF . Если мы повернемъ AB на некоторый уголъ φ , который по аналогіи назовемъ угломъ крученія, около середины O , то точки D и C придвинутся, ибо всѣ точки горизонтальнаго круга, діаметръ котораго CD , отстоятъ отъ F дальнѣе, чѣмъ C и D . Итакъ, при закручиваніи бифиляра стержень AB понижается, чему препятствуетъ вѣсъ P стержня. Закручивающая пара, моментъ которой обозначимъ черезъ M , уравнивается слѣдовательно вѣсомъ P . Выявляемъ небольшое закручиваніе нитей и вѣсомъ нитей мы можемъ пренебречь.

Найдемъ условіе равновѣсія стержня AB , повернутаго парой M на уголъ φ . На рис. 182 изображена въ большемъ масштабѣ средняя часть CD стержня въ положеніи нормальномъ; пусть $CO = OD = a$, $ER = RF = b$, OH вертикальная линия; длина нитей $CE = DF = l$.

Подъ вліяніемъ пары силъ стержень принять положеніе KL , повернувшись на уголъ $\angle HIL = \varphi$ и придвинувшись на высоту OH . Проведемъ черезъ F вертикальную линию FI и соединимъ точки I и L ; пусть $EH = FI = z$ и $LI = c$; очевидно $HI = b$ и потому

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi.$$

Далѣе $\overline{FI}^2 = \overline{FL}^2 - LI^2$, т.-е. $z^2 = l^2 - c^2$, слѣд.

$$z^2 = l^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Вѣдущую пару M мы представим себѣ замѣненной двумя силами, приложенными къ L и K , перпендикулярно къ KL , причемъ $2af = M$. Стержень въ положеніи KL находится въ равновѣсіи. Чтобы найти сію пару между M и φ , положимъ, что стержень поворачивается далѣе на весьма малый уголъ $\Delta\varphi$ и при этомъ поднимается выше точки H на весьма малую величину, которую обозначимъ черезъ $-\Delta z$, такъ какъ величина z уменьшается.

Пара силъ произведетъ при этомъ маломъ вращеніи работу, равную $M\Delta\varphi$ (стр. 93), которая должна равняться работѣ поднятія груза P на высоту Δz . Отсюда слѣдуетъ, что

$$M\Delta\varphi = -P\Delta z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Равенство (30) даетъ

$$z\Delta z = -ab \sin \varphi \cdot \Delta\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Для незнакомыхъ съ дифференціальнымъ исчисленіемъ замѣтимъ, что (30) даетъ

$$(z + \Delta z)^2 = l^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos(\varphi + \Delta\varphi).$$

Пренебрегая величиной $(\Delta z)^2$ и полагая $\cos \Delta\varphi = 1$ и $\sin \Delta\varphi = \Delta\varphi$, получаемъ

$$z^2 + 2z\Delta z = l^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos \varphi - 2ab \sin \varphi \cdot \Delta\varphi.$$

Вычитая отсюда (30), получаемъ (32), изъ котораго опредѣлимъ Δz ; подставимъ эту величину въ (31) и сократимъ на $\Delta\varphi$. Получается

$$M = \frac{ab}{z} P \sin \varphi.$$

Поднятіе OH всегда весьма малое и потому въ послѣдней формулѣ можно вмѣсто z подставить l , тогда получается

$$M = \frac{ab}{l} P \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

а въ случаѣ параллельныхъ нитей ($b = a$)

$$M = \frac{a^2}{l} P \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Обозначивъ постоянный множитель, стоящій передъ $\sin \varphi$ и характерный для данного биффира, черезъ C , имѣемъ

$$M = C \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Сравнивая эту формулу съ (19) $M = C\varphi$ для унифиляра мы видим, что моментъ закручивающей пары для унифиляра пропорционаленъ углу кручения, а для бифиляра пропорционаленъ синусу этого угла. Далѣе оказывается, что коэффициентъ пропорциональности опредѣляется длиною и взаимнымъ расположениемъ нитей и вѣсомъ стержня.

Чувствительность бифиляра тѣмъ больше, чѣмъ меньше C , слѣд. она пропорциональна длинѣ l нитей, обратно пропорциональна произведенію разстояній нитей на нѣхъ концахъ, или квадрату разстоянія нитей, если онѣ параллельны, и наконецъ обратно пропорциональна вѣсу горизонтальнаго стержня.

Формула (35) показываетъ, что M растетъ вмѣстѣ съ φ до $\varphi = 90^\circ$. Далѣе закручивать бифиляръ и нельзя а то стержень, находясь въ неустойчивомъ равновѣсіи, можетъ повернуться до $\varphi = 180^\circ$, причемъ нити коснутся другъ друга и приборъ перестанетъ быть бифилярномъ.

Бифиляръ подобно унифиляру (рис. 176 стр. 304) помещается внутри стекляннаго ящика, а нить внутри трубки крышка которой вращается. Придавая буквамъ α , β и ε прежнее значеніе имѣемъ опять, см. (25) $\varepsilon = \alpha + \beta$.

Если на стержень бифиляра дѣйствуетъ одна сила F (см. рис. 179), перпендикулярная къ нему и имѣющая точку приложенія на разстояніи a отъ середины стержня (это не то a , которое входитъ въ (32) и (34)), то вмѣсто (26) имѣемъ теперь

$$F = \frac{C}{a} \sin \varphi (36)$$

Если же сила F имѣетъ направленіе прямой, соединяющей начальное и новое положенія точки стержня, находящейся на разстояніи a отъ его центра, то вмѣсто (27) имѣемъ теперь

$$F = \frac{C \sin \varphi}{a \cos \frac{\alpha}{2}} (37)$$

Для отношенія двухъ силъ получаемъ, аналогично (28):

$$\frac{F}{F'} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi'}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha'}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} (38)$$

Уголъ вращенія α можетъ быть измѣренъ, какъ и въ унифилярѣ, при помощи шкалы на стѣнкѣ или на крышкѣ ящика, или по способу шкалы и зеркала, прикрѣпленнаго ко стержню.

Коэффициентъ C формулы (35) и для бифиляра можетъ быть найденъ на основаніи наблюденія времени качанія T бифиляра.

Если стержень бифиляра отклонить и затѣмъ предоставить самому себѣ, то онъ будетъ качаться, причемъ въ каждый данный моментъ онъ будетъ находиться подъ влияніемъ пары силъ, моментъ которой $M = C \sin \varphi$.

Замѣняя эту пару мысленно двумя силами f (рис. 178 стр. 305), причемъ $2fu = M$, мы получаемъ

$$f = \frac{C}{2a} \sin \alpha \dots \dots \dots (39)$$

Для маятника мы имѣли $f = P \sin \alpha$, а потому законъ колебаній библигра тождественъ съ закономъ колебаній маятника. Отсюда слѣдуетъ, что, въ отличіе отъ унифибра, колебанія библигра изохронны только при весьма малыхъ размахахъ. Вставляя въ формулу (22), какъ и прежде, вмѣсто K величину $\frac{K}{2}$ и вмѣсто P дробь $\frac{C}{2a}$ см (39) получаемъ опять

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{C}} \dots \dots \dots (40)$$

и

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \dots \dots \dots (41)$$

гдѣ K моментъ инерціи всего стержня относительно его оси вращенія и T время качанія при весьма малыхъ амплитудахъ.

Если кромѣ вѣса P , вызывающаго раскручивающій моментъ $C \sin \varphi$ на стержень дѣйствуетъ еще пара силъ, стремящаяся вознѣтитъ стержень изъ его начальнаго положенія, и если моментъ этой пары M' , то условіе равновѣсія библигра будетъ соответственно (29),

$$Facos \frac{\alpha}{2} = C \sin \varphi + M' \dots \dots \dots (42)$$

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Измѣреніе времени.

§ 1. Общія замѣчанія объ измѣреніи времени. Измѣреніе времени бываетъ двоякое: или требуется опредѣлить «истинное время», моментъ, когда нѣкоторое явленіе происходитъ или величину промежутка времени, протекающаго между двумя моментами. Строго говоря, мы и въ первомъ случаѣ опредѣляемъ нѣкоторый промежутокъ времени, а именно тотъ, который истекъ отъ момента, отъ котораго мы, не по нашему выбору и произволу, а по установленному и общепринятому, считаемъ начало счета времени (годъ, мѣсяць, число, и далѣе часъ, минута и секунда, считаемыя отъ послѣдней низшей кульминаціи средняго солнца) и до момента, «истинное время» котораго требуется опредѣлить. Однако условія, которымъ должны удовлетворить приборы въ этихъ двухъ случаяхъ измѣренія времени, различны. При измѣреніяхъ пераго рода мы должны имѣть часы, которые весьма точно показываютъ истинное время, или для

которых поправка, приходящая на ихъ неточныя показанія къ этому истинному времени, хорошо извѣстна. При измѣреніяхъ второго рода необходимо имѣть вѣрный счетчикъ времени; самое же время, которое онъ показываетъ, можетъ быть и невѣрно. Измѣренія перваго рода въ физикѣ встрѣчаются сравнительно рѣдко — они играютъ главную роль въ измѣреніяхъ астрономическихъ. Въ метеорологіи истинное время также отмѣчается, но обыкновенно для этого достаточно бываетъ того приближеннаго опредѣленія, которое дѣлается обыкновенными «вѣрно плущими» часами. Лишь изрѣдка, напр. при наблюденіи магнитныхъ бурь, землетрясеній и т. под., необходимо звать истинное время съ болѣею точностью.

За единицу времени принимаемъ секунду, одну 86400-ую долю среднихъ солнечныхъ сутокъ. Звѣздный сутки содержатъ 86164.091 сек. Для измѣренія времени мы должны имѣть приборъ, въ которомъ совершается бы какое либо периодическое движеніе, причемъ продолжительность періода должна составлять ровно секунду или простое ее кратное или подраздѣленіе. Примеры такихъ приборовъ представляютъ часы стѣнные съ маятникомъ, карманные часы пружинные, которые хранятся въ горизонтальномъ положеніи въ ящикахъ и по размѣрамъ не могутъ быть названы карманными и т. д. Часы, идущіе весьма правильно, т.-е. для которыхъ въ высокой степени соблюдено условие равенства періодовъ, называются хронометрами.

Часы бываютъ пружинные и съ гирей (оставляемъ въ сторонѣ часы солнечныя, песочныя и т. под.). Часы требуютъ завода и слѣдуетъ принять за правило заводить пружинные часы черезъ одинаковые промежутки времени, напр. ежедневно въ одно и то же время.

Часы, служащіе для измѣренія времени при физическихъ изслѣдованіяхъ, должны явственно отсчитывать секунды или полусекунды. Взглянувъ на часы и записавъ годъ, мѣсяць, день, часъ и минуту, наблюдатель по слуху отсчитываетъ про себя секунды, сосредоточивая свое вниманіе на слабианіи момента когда прозвонить сперва одно, а потомъ второе изъ двухъ ящиковъ, между которыми требуется измѣрить промежутокъ времени. При некоторомъ навыкѣ можно опредѣлить и сотыя доли секунды, если наблюдаемое явленіе, достаточно мгновенное, замѣчается между двумя ударами прибора, иногда называемаго въ этомъ случаѣ счетчикомъ.

Существуютъ весьма удобные счетчики особаго рода, служащіе для опредѣленія промежутка времени между моментами *A* и *B* возникновенія двухъ явленій или продолжительности одного явленія (тогда *A* его начало, *B* его конецъ). Это карманные часы съ боковымъ стрѣлкою, дѣлающею въ одну минуту полный кругъ, раздѣленной на 300 частей (по 0.2 сек.). При нажатіи на особую пуговку стрѣлка становится на нулевое дѣленіе, при второмъ нажатіи (въ моментъ *A*) стрѣлка начинаетъ двигаться, и при третьемъ нажатіи (въ моментъ *B*) она останавливается. Пройденная ею дуга опредѣляетъ искомую величину промежутка времени. При волеомъ нажатіи стрѣлка перескакиваетъ опять на нулевое дѣленіе. Существуютъ и еще сложныя счетчики съ двумя перескакивающими стрѣлками, весьма удобныя въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

Къ счетчикамъ можно отнести и рѣшъ известный метрономъ, изрѣдка и когда не требуется большой точности, применяемый и при физическихъ изслѣдованіяхъ.

Стѣнные часы употребляются при физическихъ изслѣдованіяхъ чаще всего съ секунднымъ маятникомъ, т.-е. такимъ время одного колебанія котораго равно одной секундѣ. Движеніе маятника поддерживается вращеніемъ поднятой или или свертнутой пружины или небольшоими толчками, передаваемыми отъ другого секунднаго маятника, причемъ для передачи толчковъ пользуются электрическими токами. Такие часы называются электрическими.

Рис. 183



Получить вполнѣ правильныи ходъ маятника задача весьма трудная. Между прочимъ Larrmann (Journ. de phys. 1896 г. 42) далъ весьма остроумный способъ электрической передачи маятнику импульсовъ, не вызывающихъ никакихъ пертурбацій въ его движеніяхъ.

Температура имѣетъ большое влияние на ходъ часовъ такъ напр. съ возвышеніемъ температуры увеличивается длина маятника, вследствие чего возростаеь время качанія (часы отстаютъ). Для уничтоженія влияния температуры (компенсированіи) даютъ маятнику такое устройство, чтобы при измѣненіи температуры центръ качанія (стр. 218) оставался на мѣстѣ. Такой маятникъ называется уравнительнымъ или компенсационнымъ. На рис. 183 изображена одна изъ наиболее часто применяемыхъ конструкцій къ верхней пружинѣ κ прикрѣплена горизонтальная перекладина, къ концамъ которой привинчены два стальныхъ стержня, соединенныхъ внизу второю перекладиной къ которой привинчены два латунныхъ стержня. Третья горизонтальная пластинка соединяетъ ихъ верхніе концы и поддерживаетъ два стальныхъ стержня, съ которыми тѣмъ же способомъ внизу соединены два стержня латунныхъ.

Последняя перекладина, соединяющая верхніе концы этихъ стержней, поддерживаетъ стальной средней стержень къ которому прикрѣплена чечевица L . При возростаніи температуры чечевица опускается вследствие удлиненья трехъ параллельныхъ стальныхъ стержней и поднимается вследствие увеличенія длины двухъ паръ латунныхъ стержней. Коэффициенты теплнотого удлиненья для латуни однако въ 1.74 разъ больше, чѣмъ для стали. Подобравъ надлежащимъ образомъ длины стержней, можно достигнуть почти полной неподвижности центра качанія а слѣд. и времени колебанія при измѣненіяхъ температуры.

На рис. 184 и 185 изображены два другихъ уравнительныхъ маятника. Первый состоитъ изъ стальной полоски, къ которой прикрѣпленъ стеклянный цилиндръ, содержащій ртуть, для которой тепловое расширеніе больше чѣмъ для стекла, вследствие чего уровень ртути при повышеніи температуры поднимается, чѣмъ и компенсируется удлиненье стального стержня.

Къ маятнику, изображенному на рис. 185, прикрѣплена горизон-

тавная полоска ab , къ концамъ которой прикрѣплены шарики c ; эта полоска состоитъ изъ двухъ спаянныхъ между собою полосокъ изъ различныхъ металловъ, причемъ нижняя состоитъ изъ металла, сильно расширяющагося при нагреваніи, чѣмъ металлъ, изъ котораго сдѣлана полоска верхняя. При повышеніи температуры полоска ab вследствие этого искривляется такъ, что шарики c приближаются къ верху, что и служитъ компенсирующей удлинению самого маятника.

Рис. 184.

Величина атмосфернаго давленія имѣетъ нѣкоторое, хотя и весьма малое вліяніе на время качанія маятника (см. Tisserand C. R. 122, p. 646, 1896).

§ 2. Хронографы. Хронографами называются приборы, служащіе для записыванія (отмѣтки) моментовъ, когда имѣютъ мѣсто тѣ или другія явленія, и дающіе возможность опредѣлить промежутки времени между этими моментами.

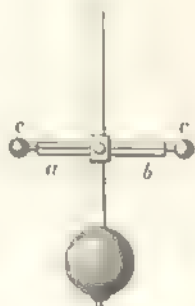
Отмѣчаніе производится обыкновенно или на бумажной лентѣ, имѣющей продольное движеніе, подобно лентѣ въ телеграфномъ приборѣ Морзе, или на поверхности цилиндра вращающагося около своей оси, имѣя при этомъ обыкновенно еще и поступательное движеніе по направленію этой оси. Движенія ленты и цилиндра рѣгулируются часовыми механизмами; въ нѣкоторыхъ случаяхъ вращеніе цилиндра производится отъ руки.

Значки на лентѣ дѣлаются иглою, карандашомъ или цвѣтными чернилами, или электрической искрой отъ индукціонной катушки Румкорфа, перекакивающей отъ остраго на металлическую полоску, лежащую подъ лентою, она оставляетъ на бумагѣ слѣды вида прокола. Движенія иглы, карандаша и т. д. вызываются притяженіями маленькаго электромагнита, черезъ который въ опредѣленные моменты посылается токъ; искра получается вследствие мгновеннаго разрыва первичнаго (индуктирующаго) тока въ этотъ же моментъ. Замыканіе или размыканіе тока производится самымъ наблюдателемъ въ надлежащій моментъ или автоматически, когда напр. пуля или ядро, вылетая изъ ружья или пушки, разрываетъ проволоку, по которой идетъ токъ.

Поверхность цилиндра, обыкновенно металлическую, слѣдуетъ покрыть тонкимъ слоемъ сажи (закоптить) или, сперва сетка покрывъ слоемъ жира или вазелина, обсыпать порошкомъ плауноватаго сѣмени. Значки на этой поверхности ставятся остриемъ или электрической искрой. Иногда покрываютъ цилиндръ листомъ бумаги, на которомъ тѣмъ или другимъ способомъ получаютъ значки, и который можно сохранить, снявъ его съ цилиндра. Когда цилиндръ имѣетъ только вращательное движеніе, то чертящій приборъ долженъ имѣть поступательное движеніе параллельно его оси, дабы значки, соответствующіе отдѣльнымъ оборотамъ цилиндра, не перепутывались и располагались по винтовой



Рис. 185



линии. Если же чертящій приборъ неподвиженъ, то ось цилиндра должна имѣть винтовую наръзку и проходить черезъ гайку, вследствие чего цилиндръ, вращаясь, будетъ имѣть поступательное движеніе, а значки будутъ располагаться по винтовой линіи. Наконецъ существуютъ хронографы съ неподвижнымъ цилиндромъ, вокругъ котораго вращается чертящее остріе. Черченіе остріемъ можетъ быть различное.

1) Штифтъ находится на небольшомъ разстояніи отъ поверхности цилиндра и только въ отмѣчаемые моменты на мгновенье до нея прикасается тогда получаютъ отдѣльныя точки или весьма коротенькія черточки, разстояніе которыхъ другъ отъ друга служатъ мѣрою опредѣляемаго промежутка

Рис. 186



времени, который можетъ также измѣряться длиною непрерывной черты, если въ началѣ этого времени заставить остріе коснуться поверхности цилиндра, а въ концѣ отъ нея удалиться.

2) Остріе касается поверхности цилиндра и въ опредѣленные моменты или въ теченіе нѣкотораго времени отъ нея удаляется; тогда черточки въ чертѣ служатъ для опредѣленія измѣряемаго времени.

3) Остріе касается поверхности цилиндра и въ опредѣленные моменты или въ теченіе измѣряемаго времени нѣсколько перемѣщается въ сторону. Тогда на цилиндрѣ получается линія врозь AB или CD (рис. 186), измѣряемый промежутокъ времени опредѣляется разстояніями ab или cd .

На бумажной лентѣ или на поверхности цилиндра хронографа мы тѣмъ или другимъ способомъ помѣщаемъ значки, разстояніе между которыми опредѣляетъ собою измѣряемый промежутокъ времени. Чтобы однако сдѣлать это опредѣленіе, необходимо знать,

какое разстояніе значковъ соотвѣтствуетъ единицѣ времени, т.-е. секундѣ. Для этого существуютъ слѣдующіе способы:

1) Скорость вращенія цилиндра извѣстна; положимъ, что радиусъ его основанія R и число оборотовъ въ секунду n . Въ такомъ случаѣ одной секундѣ соотвѣтствуетъ длина $2\pi nR$ (если пренебречь наклономъ винтовой линіи).

2) Имѣются часы съ секунднымъ маятникомъ, который при каждомъ качаніи на одно минованіе замыкаетъ или размыкаетъ токъ особой батареей, дѣйствующей на второе остріе, поставленное рядомъ съ первымъ и отмѣчающее на лентѣ или на цилиндрѣ однимъ изъ вышеописанныхъ способовъ моменты, отстоящіе другъ отъ друга на одну секунду. На рис. 186 четыре черточки между E и F представляютъ секундные значки, e и f значки, соотвѣтствующие какимъ-либо двумъ отмѣченнымъ моментамъ, промежутокъ между которыми оказывается равнымъ $2.7 = 0.2 + 2.5$ сек.

3) На вращающемся цилиндрѣ получаютъ единообразную линію отъ острія, прикѣпленнаго къ звучащему камертону, число колебаній котораго извѣстно. На рис. 187 изображенъ цилиндръ съ винтовой

осью и передъ нимъ камертонъ *K*: острая на рисункѣ не видна. При вращеніи цилиндра остріе начертало бы волнистую кривую, изображенную на рис. 188, еслибы цилиндръ имѣлъ только вращательное движеніе. Если же цилиндръ имѣетъ и поступательное движеніе, то волнистая кривая распо-

Рис. 187.

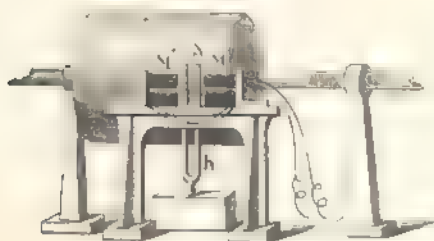


Рис. 188.



лагается вдоль винтовой линіи, какъ показано на рис. 189. Весьма полезно до и послѣ получения волнистой кривой вращать цилиндръ при неподвижномъ камертонѣ такъ, чтобы остріе начертало просто винтовую линію, дѣлящую волновую линію на двѣ симметричныя части.

Чтобы заставить камертонъ *K* (рис. 187) звучать помѣщаютъ его между двумя электромагнитами *M* и *M'*, черезъ обмотку которыхъ посылаютъ въ секунду *n* кратковременныхъ токовъ, гдѣ *n* есть число колебаній камертона въ секунду. Для этого служатъ камертонъ-прерыватель изображенный на рис. 190, также производящій *n* колебаній въ секунду. Къ его концамъ прикрѣплены два штифта *K* и *O*; изъ нихъ *K* нѣсколько погружается въ ртуть, находящуюся въ лѣвомъ стаканѣ, между тѣмъ какъ *O* не доходитъ до поверхности ртути въ правомъ стаканѣ. Распределение проводовъ и электромагнитовъ видно на чертежѣ. Въ боковое отѣвленіе обозначенное пунктиромъ, введены электромагниты, находящіеся съ двухъ сторонъ отъ камертона *K* (рис. 187). Когда цѣпь батареи *E* (рис. 190) замыкается, токъ проходитъ по пути указанному стрѣлками и электромагниты притягиваютъ ножки камертона. Тогда штифтъ *K* выходитъ изъ ртути, а штифтъ *O* опускается въ ртуть; влѣдствіе этого главная цѣпь размыкается, а боковая цѣпь замыкается: въ пишущій приборъ (рис. 187) устремляется токъ. Но влѣдствіе прерыва главнаго тока электромагниты *M* и *M'* (рис. 190) теряютъ свою силу, ножки камертона возвращаются въ положеніе, изображенное на рисункѣ. *K* входитъ въ ртуть, *O* выходитъ изъ ртути, главная цѣпь опять замыкается, побочная размыкается, электромагниты вновь притягиваютъ ножки камертона и т. д. Въ результатѣ

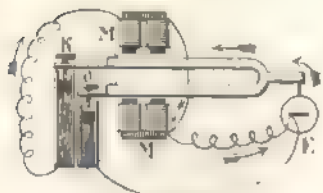
Рис. 189.



камертонъ рис. 190 начинаетъ звучать. Дѣлая въ секунду n колебаній и замыкая при этомъ и разьбоковую цѣпь, такъ что въ электромагнитахъ рисунка 187 появляется n токовъ въ секунду и ножки камертона K подвергаются n притягиваньямъ, что и заставляетъ его звучать.

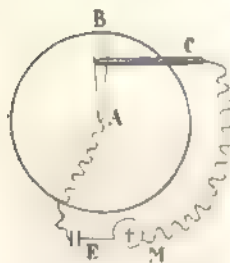
Интересный способъ измѣренія малыхъ промежутковъ времени придумалъ Рондлетъ. Главная часть его прибора изображена на рис. 191; онъ

Рис. 190.



состоитъ изъ стекляннаго круга B , быстро вращающагося около металлической оси A , съ которою соединенъ секторъ AB , наклеенный на поверхность круга и состоящий изъ листового олова. Пружина C касается поверхности стекла. Токъ элемента E проходитъ черезъ гальванометръ M , пружину C , секторъ AB и ось A каждый разъ, когда при вращеніи круга B пружина C касается сектора AB . Продолжительность τ этого ка-

Рис. 191.



сания зависитъ отъ скорости вращенія круга и отъ ширины сектора. Отклоненіе φ стрѣлки гальванометра зависитъ отъ продолжительности τ дѣйствія тока. Зная τ , которое легко вычислить по скорости вращенія круга и ширинѣ сектора, и наблюдая отклоненія φ , можно составить табличку, относящуюся къ определенной силѣ i тока. Чтобы измѣрить продолжительность t какого либо явленія, распознать опытъ такъ, чтобы въ моментъ начала явленія замыкался, а въ моментъ его окончанія размыкался токъ той же силы i . По отклоненію стрѣлки можно, пользуясь предварительно составленной табличкой, опредѣлить продолжительность t изучаемаго явленія.

Разсмотрѣнными здѣсь способами могутъ быть измѣрены весьма малые промежутки времени и притомъ съ большою точностью. Если напр. окружность цилиндра равна 1 метру, если онъ дѣлаетъ 4 оборота въ секунду, и положеніе значковъ, напр. слѣдовъ электрическихъ искръ, можетъ быть опредѣлено съ точностью до 0.2 мм., то измѣряемые промежутки времени опредѣлятся съ точностью до $\frac{1}{1000}$ сек.

При рѣшеніи специальныхъ вопросовъ, встрѣчающихся въ ученіяхъ о свѣтѣ, звукѣ, электричествѣ и т. д., употребляются особые приборы, служащіе для измѣренія малыхъ промежутковъ времени; мы ихъ разсмотримъ вмѣстѣ съ этими вопросами.

§ 3. Опредѣленіе времени качанія маятника. Мы имѣли для времени T качанія физическаго маятника формулу

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

см. (42) стр. 219, гдѣ K моментъ инерціи маятника относительно оси

стр. 87—89. Если M масса маятника, то K вообще представится въ видѣ $M\phi^2$, вставляя это и $P = Mg$ въ (2), получаемъ

$$T = \pi \sqrt{\frac{\phi}{g}} \quad (7)$$

Положимъ напр., что маятникъ состоитъ изъ весьма тонкой нити, массой которой можно пренебречь, и сплошного шара, радиусъ котораго R (обозначая черезъ l расстояние отъ точки приѣма до центра шара, имѣемъ на основаніи формулы (34) стр. 89 и (3) стр. 209, что

$$K = \frac{2}{5} MR^2 + Ml^2; \text{ отсюда } \phi = \frac{1}{l^2 + \frac{2}{5} R^2} R^2.$$

Принимая центръ тяжести маятника въ центрѣ шара имѣемъ $a = l$. Формула (7) даетъ въ этомъ случаѣ

$$T = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{5l}}{g}} \quad (8)$$

Для опытнаго опредѣленія величины K поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Опредѣляютъ сперва время T_0 качанія маятника т.-е. величину

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad (9)$$

Затѣмъ прикрѣпляютъ къ нему дополнительное тѣло (оно можетъ состоять и изъ нѣсколькихъ отдѣльных частей), центръ тяжести котораго совпадаетъ бы съ осью вращения, и моментъ инерціи K_1 котораго относительно этой оси вращения былъ бы извѣстенъ. Такимъ тѣломъ можетъ напр. служить кольцо, центръ котораго лежитъ на оси вращения, а стороны параллельны плоскости качанія см. (36) стр. 87. Новое время качанія T_1 получится, если вставить въ (9) $K + K_1$ вмѣсто K и $(P + P_1)a'$ вмѣсто Pa , гдѣ P_1 вѣсъ дополнительнаго тѣла; a' расстояние новаго центра тяжести маятника отъ оси вращения. Однако формула (27) стр. 80 даетъ $(P + P_1)a' = Pa + P_1 \cdot 0$, ибо расстояние центра тяжести дополнительнаго тѣла отъ оси вращения есть нуль. Получаемъ

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{K + K_1}{Pa}} \quad (10)$$

(9) и (10) даютъ

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{K + K_1}{K} = 1 + \frac{K_1}{K}, \quad \frac{K_1}{K} = \frac{T_1^2}{T_0^2} - 1,$$

и наконецъ

$$K = K_1 \frac{T_1^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (11)$$

§ 5. Сравненіе времени качанія двухъ маятниковъ: методъ совпаденій. Предполагается что время T качанія одного изъ двухъ маят-

никовъ известно и что время T_1 качанія другого мало отличается отъ T . Два маятника, времена качаній которыхъ желаютъ сравнить, помѣщаютъ одинъ за другимъ такъ, чтобы они качались въ параллельныхъ другъ другу плоскостяхъ. Черезъ трубу, ось которой перпендикулярна къ этимъ плоскостямъ и проходитъ черезъ положенія равновѣсія маятниковъ, наблюдаютъ ихъ качанія. Положимъ, что въ нѣкоторый моментъ оба маятника одновременно и въ одинаковомъ направленіи проходятъ черезъ положенія равновѣсія.

Если T_1 не равно T , то маятники затѣмъ разойдутся; слѣдуетъ замѣтить, который изъ нихъ идетъ быстрее. Черезъ нѣкоторое время, когда одинъ маятникъ сдѣлаетъ n' колебаній, они опять одновременно пройдутъ черезъ середину, приближаясь къ ней съ противоположныхъ сторонъ. Въ этотъ моментъ другой маятникъ сдѣлаетъ $n' + 1$ или $n' - 1$ колебаніе. Однако эту встрѣчу маятниковъ не удобно наблюдать и потому опредѣлить число n колебаній, которое совершаетъ первый маятникъ до того момента, когда маятники опять вмѣстѣ, т.е. въ одномъ направленіи проходятъ черезъ положеніе равновѣсія. Въ этотъ моментъ второй маятникъ совершитъ $n + 2$ или $n - 2$ колебанія. Равенство $nT = (n \pm 2)T_1$ даетъ искомое отношеніе

$$\frac{T_1}{T} = \frac{n}{n \pm 2} \dots \dots \dots (12)$$

Точность метода увеличивается, если выждать $m^{\text{тѣ}}$ совпаденій и сосчитать соответствующее число N колебаній перваго маятника, въ этотъ моментъ второй маятникъ оканчиваетъ $N \pm 2m^{\text{тѣ}}$ колебаніе, и мы имѣемъ

$$\frac{T_1}{T} = \frac{N}{N \pm 2m} \dots \dots \dots (13)$$

Если первый маятникъ секундный ($T = 1$), то (12) или (13) даютъ время T_1 колебаній второго маятника

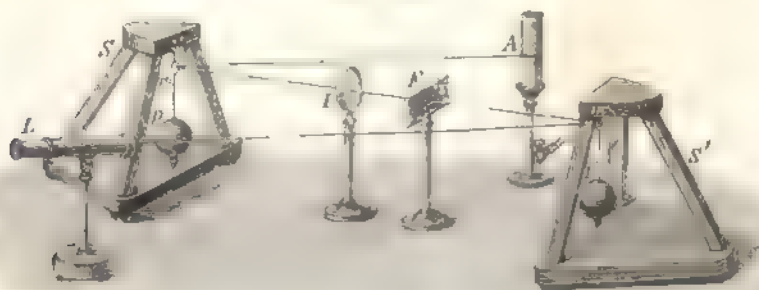
$$T_1 = \frac{n}{n \pm 2} \text{ сек. или } T_1 = \frac{N}{N \pm 2m} \text{ сек.} \dots \dots \dots (14)$$

Существуютъ различныя приспособленія, облегчающія наблюденіе моментовъ совпаденій, т.е. совместнаго прохожденія обоихъ маятниковъ; они зависятъ отъ вида маятниковъ, и мы объ этомъ скажемъ въ § 3 слѣдующей главы (стр. 328).

§ 6. Стробоскопическій методъ Lippmann'a сравненія временъ качанія двухъ маятниковъ (J. de phys. (2) 6, p. 266, 1887). На рис. 192 схематически показано распредѣленіе приборовъ. P и P' два маятника, времена колебаній которыхъ близки другъ къ другъ; они качаются въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ S и S' . Къ нимъ прикрѣплены зеркала m и m' , поверхности которыхъ перпендикулярны къ плоскостямъ качанія. Въ A находится горизонтальная свѣтящаяся щель; лучи, идущіе изъ A , отражаются отъ m и даютъ при помощи стекла L изображеніе щели въ томъ мѣстѣ, гдѣ въ пластинкѣ F находится другая горизонтальная щель.

Отсюда лучи идутъ къ m' и отражаются въ трубу L , съ помощью кот. и разсматривается щель F . Въ окулярѣ трубы L находится вертикальная микрометрическая шкала (см. стр. 265). Когда оба маятника въ покоѣ, наблюдатель видитъ яркую горизонтальную линию въ серединѣ этой шкалы. Когда только P' качается, то онъ видитъ яркую линию, качающуюся въ и вверхъ; когда только P качается, онъ видитъ линию мелькающую въ серединѣ шкалы въ тѣ моменты, когда маятникъ P проходитъ черезъ положеніе равновѣсія, ибо при другихъ его положеніяхъ изображеніе щели

Рис. 192.



не попадетъ на щель F . Такихъ появленій линии будетъ два при каждомъ полномъ (туда и обратно) качаніи P . Когда, наконецъ, оба маятника качаются, и времена ихъ качаній одинаковы, то наблюдатель видитъ двѣ свѣтлыя линии, появляющіяся попеременно, когда P проходитъ черезъ положеніе равновѣсія, и расположенныя симметрично выше и ниже серединѣ шкалы, смотря по случайной разности фазъ качаній маятниковъ. Если времена качаній не вполне одинаковы, то положеніе этихъ двухъ линий постоянно мѣняется и настаетъ моментъ, когда онѣ обѣ сливаются въ одну въ серединѣ шкалы. Въ этотъ моментъ колебанія «совпадаютъ», т. е. оба маятника одновременно проходятъ черезъ положеніе равновѣсія. Остаеся сосчитать число n линий, которыя появятся до слѣдующаго такою совпаденія; тогда время n качаній маятника P равно времени $n \pm 1$ качаній маятника P' .

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Измѣреніе напряженія силы тяжести.

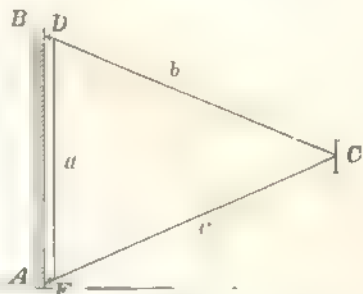
§ 1. Направленіе силы тяжести. Законъ всемірнаго тяготѣнія учитъ, что силу тяжести въ данной точкѣ можно разсматривать какъ равнодѣйствующую силѣ притяженія, какъ бы исходящихъ отъ всѣхъ частей земнаго шара. Появляющаяся при вращеніи земли центробѣжная сила нѣсколько уклоняетъ въ сторону направленіе силы, дѣйствующей на

тѣла у поверхности земли. Это отклоненіе равно нулю на полюсахъ и на экваторѣ; оно равно $11'30''$ на широтѣ 45° . Направление равнодѣйствующей силы тяжести и центробѣжной силы называется вертикальнымъ; оно опредѣляется направлениемъ неподвижной, закрѣпленной на одномъ концѣ нити, къ другому концу которой прикрѣпленъ грузъ, или направлениемъ, перпендикулярнымъ къ горизонтальной плоскости, которая съ своей стороны можетъ быть опредѣлена уровнемъ.

Направление вертикальной линии до послѣдняго времени считалось какъ бы основнымъ, неизмѣннымъ, и къ нему относили другія направленія, измѣряя отъ него различныя углы. Высокая степень точности, до которой въ настоящее время доведены измѣренія угловъ, въ которыхъ привела къ открытію малыхъ измѣненій широты, т. е. колебаній положенія оси вращенія внутри самой земли, заставила обратиться къ вопросу, дѣйствительно ли направленіе силы тяжести а слѣд. и горизонтальной плоскости есть нѣчто совершенно неизмѣнное въ данномъ мѣстѣ на земной поверхности. Этимъ вопросомъ занимался впервые Zoellner (1871 г.), построивъ особый приборъ, горизонтальный маятникъ, дающій возможность замѣтить малѣйшія колебанія вертикальной линии. Въ 1894 г. появилось эмпирическое изслѣдованіе Rebeur-Paschwitz'a, произведенное съ усовершенствованнымъ горизонтальнымъ маятникомъ въ Вильгельмсгаденѣ, Потсдамѣ и въ Пуэрто Ортава (на островѣ Teneriff). Въ настоящее время (1895) наблюденія предполагается производить въ Страсбургѣ, въ Николаевѣ и въ Харьковѣ. Идея горизонтальнаго маятника весьма проста.

Ее можно понять изъ схематическаго рисунка 193. Къ вертикальной оси AB подвѣшенъ треугольникъ DEC , составленный изъ легкихъ трубокъ a , b и c ; способъ подвѣса таковъ, что онъ съ весьма малымъ треніемъ можетъ качаться около оси AB . Если эта ось совпадаетъ съ вертикальнымъ направлениемъ, то маятникъ DCE будетъ находиться въ безразличномъ равновѣсіи; но если ось вращенія составитъ хотя бы весьма малый уголъ съ вертикальнымъ направлениемъ, то маятникъ приметъ определенное положеніе равновѣсія, причемъ его центръ тяжести расположится въ плоскости, проходящей черезъ ось вращенія и вертикальную линию. Малѣйшія боковыя колебанія вертикальнаго направленія повлекутъ за собою измѣненія въ положеніи равновѣсія маятника, которые наблюдаются шкалой a и грубой при помощи зеркальца C . Такимъ путемъ могутъ быть замѣчены измѣненія направленія вертикальной линии въ $0''.001$. Наблюденія показали, что такіе измѣненія дѣйствительно происходятъ и что они нѣрѣдко превосходятъ возможные погрѣшности угловыхъ измѣреній и потому ими нельзя пренебречь напр. при точнѣйшихъ астрономическихъ измѣреніяхъ.

Рис. 193.



Наблюдается, между прочимъ, періодическое суточное колебаніе вертикальнаго направленія и повидимому также вліяніе луны.

§ 2. Опредѣленіе g при помощи машины Атвуда и другихъ приборовъ, служащихъ для наслѣдованія свободнаго паденія тѣлъ. Устройство машины Атвуда и способъ пользоваться ею для проверки закона

свободнаго паденія тѣлъ ($v = gt$ и $s = \frac{1}{2}gt^2$), а также основнаго закона движенія (ускоренія пропорціональны силѣмъ и обратно пропорціональны

массамъ) мы считаемъ извѣстными изъ начальнаго курса физики. Здѣсь мы покажемъ, какъ вывести точное выраженіе того ускоренія g' , съ которымъ происходитъ движеніе гири въ машинѣ Атвуда. Въ элементарныхъ курсахъ выводится извѣстная формула

$$g' = \frac{p}{2P + p} g \dots \dots \dots$$

гдѣ p вѣсъ добавочнаго груза, который прибавляютъ съ одной стороны, см. рис. 194. P вѣсъ каждой изъ двухъ гири, непосредственно прикрѣпленныхъ къ шнурку, переброшенному черезъ колесо Q , радиусъ котораго обозначимъ черезъ R . Формула (1) весьма незначительно отличается отъ формулы точной; не вводя въ нее совершенно необходимыхъ поправокъ, нельзя ни проверить законовъ движенія вообще и свободнаго паденія въ частности, ни опредѣлить величины ускоренія g , опредѣливъ съ помощью хронографа или счетчика (стр. 313) время t въ теченіе котораго гири p опускается на путь s , и вычисляя g' по формулѣ $s = \frac{1}{2}g't^2$, которая даетъ

$$g' = \frac{2s}{t^2} \dots \dots \dots (2)$$

Формула (1) неточна, ибо при ея выводѣ не приняты во вниманіе три обстоятельства:

1. Вращеніе колеса сопровождается треніемъ, которое, какъ мы увидимъ, можетъ быть разсматриваемо, какъ нѣкоторая сила f , препятствующая движенію, вызываемому слѣдовательно не вѣсомъ p , но нѣкоторою меньшею силою $p - f$.

2. Движущая сила $p - f$ приводитъ въ движеніе не только массу $2M + m$, гдѣ $M = P/g$ и $m = p/g$, но еще и массу π шнурка, вѣсъ котораго обозначимъ черезъ $\pi = \mu g$:

3. Та же сила $p - f$ приводитъ также въ ускоренное вращательное движеніе еще и колесо, вѣсъ котораго обозначимъ черезъ Q ; пусть его моментъ инерціи относительно оси вращенія есть K . Еслибы колесо было сплошное, то мы имѣли бы $Kg = \frac{1}{2}QR^2$, см. (37) стр. 87; еслибы, наоборотъ,

роть. Можно было допустить, что вся масса колеса сосредоточена около его окружности, то было бы $Kg = QR^2$.

Истинное значение величины Kg будет некоторое среднее, и мы можем положить

$$Kg = \alpha QR^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{где } \frac{1}{2} < \alpha < 1 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Чтобы вывести точное выражение для g' воспользуемся теоремою о живых силах (стр. 97). Пусть, в данный момент, v есть скорость гири и шнура; ω угловая скорость колеса; очевидно $\omega R = v$, так как точки окружности колеса должны обладать скоростью шнура. Живая сила J всей движущейся системы равна, см. (1) стр. 89 и (3) стр. 90,

$$J = \frac{1}{2} (2M + m + \mu) v^2 = \frac{1}{2} K \omega^2.$$

Равенство $\omega R = v$ дает

$$J = \frac{1}{2} \left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2} \right) v^2 \dots \dots \dots (4)$$

Предположим, что в малое время Δt гири пройдут малый путь Δs , в конце которого путь скорости будет равен $v + \Delta v$, а живая сила

$$J + \Delta J = \frac{1}{2} \left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2} \right) (v + \Delta v)^2 \dots \dots \dots (5)$$

Пренебрегая величиною $(\Delta v)^2$, т. е. полагая $(v + \Delta v)^2 = v^2 + 2v\Delta v$, и вычитая (4) из (5), получаемъ

$$\Delta J = \left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2} \right) v \Delta v = \left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2} \right) g \Delta t \dots \dots \dots (6)$$

Приращение ΔJ должно равняться работѣ движущей силы, т. е. величинѣ $(p - f) \Delta s = (p - f) v \Delta t$. Итакъ

$$\left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2} \right) g \Delta t = (p - f) v \Delta t.$$

Умноживъ обѣ стороны на g и сокративъ на $v \Delta t$, получаемъ

$$\left(2P + p + \pi + \frac{Kg}{R^2} \right) g = (p - f) g.$$

откуда если для Kg вставить его значение (3)

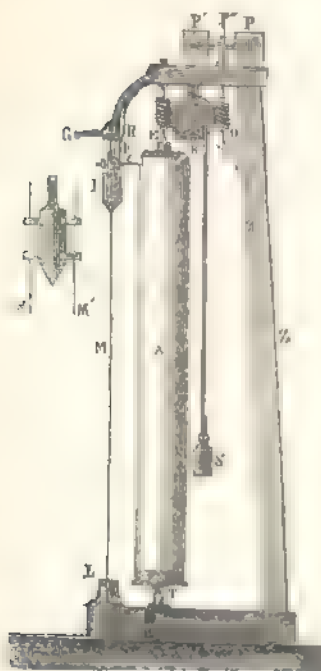
$$g' = \frac{p - f}{2P + p + \pi + \alpha Q} g \dots \dots \dots (7)$$

Здѣсь f сила тренія, π вѣсъ шнура, Q вѣсъ колеса и α дробь между $\frac{1}{2}$ и 1.

Пренебрегая величинами f , π и αQ , получаемъ (1); все три поправки убываютъ g' , какъ видно, въ одномъ и томъ же направленіи.

Для опредѣленія f отыскиваютъ такой добавочный грузъ p_0 , при которомъ вся система, получивъ толчокъ, двигалась бы равномерно, т.-е. проходила бы пути, пропорциональные времени; тогда ускореніе нуль и потому $f = p$. Величина π опредѣляется непосредственно извѣщиваніемъ.

Рис. 195.



Поправку αQ мы вычислимъ, опредѣляя ускоренія g_1 и g_2 при двухъ различныхъ нагрузкахъ P_1 , p_1 и P , p_2 и пользуясь формулой (2). Формула (7) даетъ

$$g_1 : g_2 = \frac{P_1 + p_1 + \frac{f}{\pi} + \alpha Q}{P + p_2 + \frac{f}{\pi} + \alpha Q} \quad (8)$$

Изъ этой пропорціи, въ которой все остальные величины извѣстны, можно опредѣлить αQ . Когда f , π и αQ найдены, получаемъ по наблюдаемому g' искомое g на основаніи формулы (7)

$$g = \frac{2P + p + \frac{f}{\pi} + \alpha Q}{p + f} g' \quad (9)$$

Изъ другихъ приборовъ, назначенныхъ для изученія законовъ свободнаго паденія тѣлъ и могущихъ служить для опредѣленія численнаго значенія ускоренія g , упомянемъ слѣдующее:

I. Наклонная плоскость. Когда мы достигли по возможности малаго тренія, заставивъ напр. тяжелую повозку катиться на рельсахъ по наклонной плоскости, то ускореніе g' движенія по этой плоскости будетъ съ достаточною точностью опредѣляться формулою

$$g' = \frac{h}{l} g = g \sin \alpha \quad (10)$$

гдѣ h высота, l длина наклонной плоскости, α уголъ, составляемый ею съ горизонтомъ. Опредѣливъ g' по формулѣ (2), найдемъ отсюда g .

II. Машина Morin'a. Она состоитъ изъ вертикальнаго цилиндра A (рис. 195), поверхность котораго обвертывается листомъ бумаги; помощью гири S можно дать цилиндру вращательное движеніе, которое дѣлается равномернымъ, когда гиря прошла примѣрно $\frac{2}{3}$ своего пути, такъ какъ крылья PP' , быстро вращаясь въ воздухѣ, дѣйствуютъ какъ тормазы. Рядомъ съ цилиндромъ находится грузъ I , снабженный карандашомъ c ; онъ можетъ свободно падать вдоль двухъ проволокъ M и M' . Когда вращеніе цилиндра A сдѣлается равномернымъ, заставляютъ падать гирю I , которая

карандашомъ вычерчиваетъ на бумагѣ нѣкоторую кривую. Остановивъ цилиндръ, снимаютъ бумагу и изслѣдуютъ эту кривую. Она имѣетъ видъ, показанный на рис. 196. Проведя черезъ начало O горизонтальную и вертикальную линии, которыя примемъ за оси абсциссъ и ординатъ, мы видимъ, что абсциссы суть времена t , ибо онѣ пропорциональны угламъ, на которые повернулся цилиндръ отъ момента начала паденія тѣла I , ординаты же суть пройденныя пространства s . Легко проверить законъ пропорциональных пространствъ: ординаты AB оказываются пропорциональными квадратамъ абсциссъ OA ; уравненіе кривой имѣетъ видъ $s = pt^2$ и слѣд. она парабола. Если скорость вращения цилиндра извѣстна, то не трудно опредѣлить значеніе абсциссы OA въ секундахъ и тогда $p = \frac{1}{2}g$ дастъ намъ g .

Можно проверить и законъ скоростей. Проведемъ въ B касательную BC къ параболѣ и пусть $\angle BCA = \alpha$. Изъ началъ дифференціального исчисленія извѣстно, что

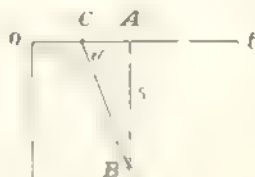
$$t \tan \alpha = \frac{ds}{dt} = v.$$

Такимъ образомъ мы можемъ опредѣлить численное значеніе скорости v и убѣдиться въ томъ, что v пропорционально абсциссамъ t . Опредѣливъ для одной и той же абсциссы OA величины $s = AB$ и $t = t \tan \alpha$, получаемъ численное значеніе ускоренія по формулѣ $g = \frac{v^2}{2s}$; единицей времени служитъ здѣсь время, измѣренное на оси t длиной, равною той единицѣ длины, которою мы измѣряемъ ординаты s (ибо только при такомъ условіи $t \tan \alpha$ равенъ производной).

III. Изъ множества другихъ приборовъ, укажемъ еще на одинъ. Главнѣйшая его часть камертонъ, къ одной изъ вѣтвей котораго прикреплена горизонтальная линишый штифтъ. Камертонъ приведенъ въ постоянное звучаніе (стр. 317), онъ расколоченъ такъ, что колебанія штифта происходятъ въ горизонтальной плоскости. Штифтъ касается поверхности вертикальной доски (рис. 197), параллельной линіи размаховъ вѣтвей камертона. Эту доску заставляютъ свободно падать, причемъ штифтъ вычерчиваетъ на поверхности доски волнистую линію: каждая волна соответствуетъ одному и тому же времени T полного колебанія камертона. Проводя горизонтальныя линіи черезъ равное число изгибовъ (на рисункѣ черезъ три), получаемъ пути s , пройденные падающею доскою въ равныя времена. Какъ обозначено на рисункѣ эти пространства пропорціональны квадратамъ времени. Зная число колебаній камертона въ секундѣ, мы можемъ опредѣлить время t въ секундахъ, и по формулѣ $g = 2s/t^2$ найти g .

§ 3. Опредѣленіе g по способу Borda измѣренія времени качанія маятника. Время колебанія маятника, по своему устройству близкаго къ

Рис. 196.

s
1

маятнику математическому, опредѣляется по методу совпаденій (глава VIII § 5, стр. 321) путемъ сравненія съ маятникомъ секунднымъ. На рис. 198 показанъ приборъ въ томъ видѣ, въ которомъ онъ теперь обыкновенно употребляется. Сзади виситъ часы съ секунднымъ маятникомъ. Передъ нимъ виситъ шарикъ на тонкой нити, прикрѣпленной къ трехгранной призмѣ, которая качается на одномъ изъ своихъ реберъ. Время качанія этого маятника опредѣляется по методу совпаденій. Для того, чтобы удобнѣе было замѣчать эти совпаденія, прикрѣплена къ секундному маятнику бумажка, на

Рис. 197.

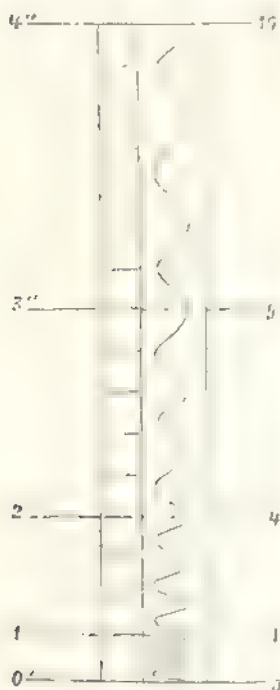
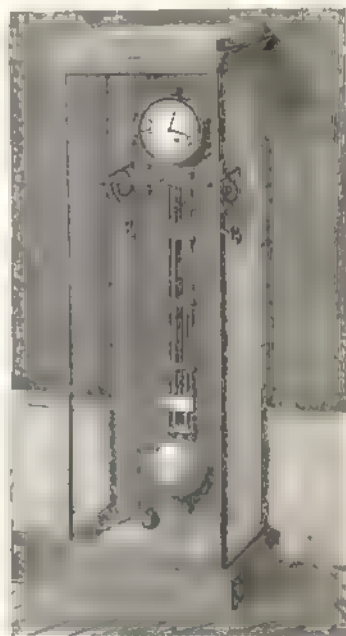


Рис. 198.



которой проведена вертикальная черта. Слабо увеличивающая труба устанавливается горизонтально такъ, чтобы ея продолженная ось пересѣкала нить и черту, когда оба маятника находятся въ равновѣсн. Такимъ путемъ легко замѣчается моментъ, когда нить, покрывая черту, вместе съ нею проходить черезъ середину поля зрѣнія трубы.

Для времени T , весьма малыхъ качаній маятника, состоящаго изъ тонкой нити и шарика, мы вывели формулу (8) стр. 320; вставляя ее въ (3) стр. 319, получаемъ для времени T качанія формулу

$$T = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{3M}}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \dots \dots (11)$$

где l расстояние от центра шара до оси вращения, R радиус шара и α средний угол полуразмаха. Эта формула дает

$$g = \frac{\pi^2}{T^2} \left(l + \frac{2R^2}{5l} \right) \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2 \dots \dots \dots (12)$$

В этом выражении все величины известны и потому оно может служить для определения g . Длина $l = R$ шарика определяется при помощи катетометра.

Необходимо, однако, ввести в формулу (12) еще некоторые поправки.

1. Мы определяли ускорение g , с которым шарик прибора (рис. 198) стал бы свободно падать; это определение сделано нами в воздухе, т. е. шарь претерпевает некоторую потерю веса (стр. 295). Пусть истинный его вес (в пустоте) P , потеря веса p ; в таком случае ускорение g вызывается силой $P - p$. Обозначив через G ускорение свободного падения в пустоте, имеем очевидно $G : g = P : P - p$. Пусть D плотность шарика, d плотность воздуха во время падения, тогда $P : p = D : d$ и след.

$$G = g \frac{D}{D - d} \dots \dots \dots (13)$$

Здесь $d = 0,0013$, $D = 21$, когда шарик сделан из платины.

2. Сопротивление воздуха движению маятника имеет весьма малое влияние; оно меняет время колебания меньше, чем на $\frac{3}{10^6}$ -ую его часть.

3. Воздух отчасти как бы увлекается шариком, движется вместе с ним. Poisson показал, что для введения соответствующей поправки следует величину d в (13) помножить на некоторый коэффициент, равный $\frac{1}{2}$, так что

$$G = g \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \frac{d}{D}} \dots \dots \dots (14)$$

4. Вязкость воздуха (отдель четвертая, глава V, § 12) также имеет некоторое влияние. Stokes вывел величину поправки.

5. Когда маятник качается, то инерция не остается в полном покое; отсюда следует, что не вся работа силы тяжести тратится на движение маятника как мы предполагали при выводе формулы (41) стр. 219. Формулу для соответствующей поправки вывел Peirce.

§ 4. Определение g по способу оборотного маятника Kater'a. Мы видели (стр. 218), что расстояние l центра качания маятника от оси вращения равно длине математического маятника, имеющего одинаковое с

Рис. 199.



Вычтя одно равенство изъ другого и сокративъ на M , находимъ

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{a_1 T_1^2}{a_1^2} - \frac{a_2 T_2^2}{a_2^2},$$

что можно представить въ такомъ видѣ

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2(a_1 + a_2)} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(a_1 - a_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Въ первомъ членѣ $a_1 + a_2 = l$, во второмъ членѣ $T_1^2 - T_2^2$ малая причина, а разность $a_1 - a_2$ въ маятникѣ Kater'a величина не малая, такъ что достаточно знать ея приблизительную величину для вычисления второго члена.

Для абсолютныхъ опредѣленій g нѣмѣ часто пользуются обратнымъ маятникомъ Repsold'a для относительныхъ — маятникомъ Stearns's'a.

§ 5. Длина секунднаго маятника. Длиною секунднаго маятника называется длина L математическаго маятника, время безконечно малыхъ колебаній котораго равно одной секундѣ. Изъ формулы (15) получаемъ, положивъ $T=1$ и $l=L$.

$$L = \frac{g}{\pi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Итакъ длина секунднаго маятника пропорциональна ускоренію g .

§ 6. Зависимость ускоренія g отъ высоты и широты мѣста. Ускореніе g принято выражать въ $C. G. S.$ единицахъ; слѣдовало бы по этому писать нѣпр. для широты 45°

$$g = 980,61 \frac{\text{сантим.}}{(\text{сек.})^2};$$

но такъ какъ секунда всегда берется за единицу времени, то и принято писать $g = 980,61$ см. Въ дальнейшемъ мы даже названія единицы длины (сантим.) прибавлять не будемъ.

Величина g мѣняется съ высотой и широтою мѣста. Пусть g и g_h относятся къ уровню моря и къ высотѣ h ; если R радиусъ земли, то

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} = \frac{1}{1 + 2\frac{h}{R}} = 1 - 2\frac{h}{R}.$$

если пренебрегать высшими степенями дроби $\frac{h}{R}$. Итакъ

$$g_h = g \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Если h выражено въ сантиметрахъ, имѣемъ

$$g_h = g(1 - 0,00000000314h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

	φ	L	g
Тифлисъ . . .	$41^{\circ} 42'$	99.327	980.32
Одесса . . .	$46^{\circ} 29'$	99.369	980.74
Кіевъ . . .	$50^{\circ} 27'$	99.404	981.08
Варшава . . .	$52^{\circ} 13'$	99.419	981.23
Москва . . .	$55^{\circ} 45'$	99.449	981.52
С.-Петербургъ .	$59^{\circ} 56'$	99.482	981.85
Архангельскъ .	$64^{\circ} 31'$	99.516	982.18.

Въ Парижѣ ($\varphi = 48^{\circ} 50'$) имѣемъ

$$L = 99,390; \quad g = 980,94.$$

Въ распредѣленіи величины силы тяжести по земной поверхности наблюдаются особаго рода аномалии или несправильности. Defforges находитъ, что на островахъ g вообще превосходитъ среднее значеніе, соответствующее данной широтѣ; посреди материковъ g меньше этого средняго значенія. Замѣательная аномалия наблюдается около Москвы.

R. v. Eotvos изслѣдовалъ распредѣленіе силы тяжести и форму поверхности S , нормальной къ ея направлению въ данномъ мѣстѣ, пользуясь приборами, чувствительность которыхъ была доведена до изумительно высокой степени. Эти приборы представляютъ одноститые кратильные вѣсы съ весьма большимъ временемъ качанія, доходящимъ до 20-ти минутъ. Качанія наблюдались въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ положеніяхъ качающагося горизонтальнаго стерженька и это, какъ показываетъ теорія, даетъ возможность вычислить величины главныхъ радиусовъ кривизны поверхности S . Другой приборъ, въ которомъ одинъ изъ грузовъ, находящихся на концахъ стерженька, расположенъ ниже другого (привѣшенъ къ стерженьку), даетъ возможность опредѣлить варіацію силы тяжести вдоль поверхности S ; въ немъ измѣряется крученіе нити при различныхъ положеніяхъ вертикальной плоскости, проходящей черезъ ось стерженька; это крученіе мѣняется при вращеніи всего прибора около вертикальной оси.

Еслибы земля представляла однородный шаръ радиуса R , то величина g' внутри земли была бы прямо пропорціональна разстоянію r точки отъ центра земли, см. стр. 190, и мы имѣли бы $g' = \frac{r}{R}g$. Но на дѣлѣ (см. слѣдующую главу) внутренне слои земли плотнѣе наружныхъ; вследствие этого g' растетъ съ удаленіемъ отъ поверхности по ввѣрь земли. Полагая, что плотность d земли есть функція r вида $d = d_0 - \alpha r^2$, гдѣ d_0 плотность въ центрѣ земли и α численный коэффициентъ, Roche вывелъ формулу

$$g' = 1.92 \frac{r}{R} \left(1 - \frac{12r^2}{25R^2} \right) g. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

По этой формулѣ g' растетъ, начиная отъ поверхности, до $r = \frac{5}{6} R$, гдѣ $g' = \frac{16}{15}g$ и уменьшается далѣе до нуля при $r = 0$. Наблюденія

Airy въ шахтѣ на глубинѣ 383 м. подтверждаютъ справедливость формулы.

Если допустить, что $d = d_0 - \alpha r$, то наибольшее $g' = 1.055g$ окажется при $r = 0.814 R$.

ЛИТЕРАТУРА.

§ 1. Горизонтальный маятникъ:

Perrot. C. R. 54 p. 728, 1862.

Zoellner. Ber. d. Kgl. sachs. Ges. d. Wiss. 1869.

Rood. Amer. J. of Sc. 9, 1875.

Chaplin. Trans. of the Seism. Soc. of Japan. 4.

Gray. Phil. Mag. Sept. 1881.

Rebour-Paschwitz. Das Horizontalpendel, Halle 1882; Gerlands Beiträge zur Geophysik 2, 1895.

Hecker. Instr. 16, p. 2, 1896.

§ 2. *Atwood. On the rectilinear motion and rotation of bodies. Cambridge, 1784.*

Morin. Memoires des savants étrangers, VI p. 641, 1838.

§ 3. *Borda. Memoire sur la mesure du pendule, 1792. (Mesure de la méridienne)*

§ 4. *Kater. Philos. Trans. 1818.*

F. W. Bessel. Länge des einfachen Secundenpendels. Ostwald, Klassiker № 7.

Н. Минербергъ. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 3, вып. 1, стр. 32, 1890 г.

§ 6. *Kharz u. Kragar-Menzel. Wied. Ann. 51 p. 559, 1894.*

Scheel und Diesselhorst. Instr. 1896 p. 2.

Defforges. C. R. 117, p. 205.

R. v. Eötvös. W. A. 59 p. 354, 1896.

Къ литературѣ о маятникѣ вообще:

Н. Е. Жуковский. Движение маятника съ трениемъ въ точкѣ привѣса. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 7, вып. 2, стр. 28, 1895.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Измѣреніе средней плотности земли.

§ 1. Измѣренія Maskelyne'a (1775 г.). Для опредѣленія средней плотности D земли были произведены многія измѣренія по весьма различнымъ способамъ; изъ нихъ раземотримъ прежде всего измѣренія Maskelyne'a произведенныя по способу, предложенному Bouguer.

Онѣ основаны на сравненіи притяженія земли съ притяженіемъ весьма большого тѣла, масса котораго извѣстна. Такимъ тѣломъ служила отдѣльно стоящая гора Shehallien въ Шотландіи, объемъ и средняя плотность которой были приблизительно извѣстны. Пусть m масса горы. $M = \frac{4}{3} \pi R^3 D$ масса земли, гдѣ R ея радиусъ. Притяженіе горы отклоняетъ направленія Z и Z' (рис. 201) вертикальныхъ линій, которыя наблюдались бы при отсутствіи горы, такъ что онѣ принимаютъ направленія Z_1 и Z_1' . Точки A и B были выбраны съ двухъ сторонъ отъ горы и притомъ на одномъ меридіанѣ; въ этомъ случаѣ отклоненія вертикалей, а также горизонтальныхъ плоскостей

(H_1 и H'_1 вместо H и H') въ A и B имѣютъ противоположныя направ-
ленія. Пусть λ разность широтъ точекъ A и B , найденная геодезическими измѣ-
реніями по ихъ раз-
стоянію и пусть AP и
 BP направленіе оси
міра. Еслибы не было
горы, то разность вы-
сотъ полюса, т.-е.
 $\angle PBN' - \angle PAN$,
равнялась бы λ . Опре-
дѣляя однако въ A
и B высоты полюса,
мы измѣряемъ углы
 PBN'_1 и PAN_1 . Ихъ
разность λ_1 оказы-
вается больше λ и
пусть $\lambda_1 = \lambda + \varepsilon$. Оказалось, что $\varepsilon = 11''.66$. Очевидно $\varepsilon = \angle N'BN'_1 + \angle N'AN_1$,
т.-е. $\frac{1}{2}\varepsilon$ есть уголъ, на который гора отклоняетъ направленіе вертикали,
если A и B находятся на одинаковомъ разстояніи r отъ горы. Если F
притяженіе массы μ маятника земного, f притяженіе горы, то очевидно

$$t_{r2} = \frac{f}{F} = \frac{\frac{m\mu}{r^2}}{\frac{M}{R^2}} = \frac{mR^2}{Mr^2} = \frac{4}{3} \pi R D r^2$$

ОТКУДА

$$D = \frac{3m}{4\pi Rr^2 \tan^2 \alpha} \quad (1)$$

Maskelyne нашель $D = 4.8$. James, повторивши эти наблюдения, нашель $D = 5.32$.

§ 2. Изявления Cavendish'a (1798 г.) были произведены при помощи «одновитных» крутильных весов (стр. 303), изображенных на рис. 202. Къ концамъ длиннаго и легкаго горизонтальнаго стержня были прикрѣплены два металлическихъ шарика m и m' , вѣсивше каждый 730 гр. Положеніе равновѣсія отсчитывалось на горизонтальныхъ шкалахъ помощью двухъ трубъ, изображенныхъ на рисункѣ. Два большихъ свинцовыхъ шаровъ (по 158 килогр. каждый) M и M' могли быть приближены съ двухъ сторонъ къ шарикамъ m и m' , такъ что притяженія этихъ послѣднихъ свинцовыми шарами складывались и повертывали вѣсы на нѣкоторый весьма малый уголъ. Вращая горизонтальный стержень, поддерживающій свинцовые шары около средней оси прибора, какъ указано линіей, можно было приблизить эти шары къ шарикамъ m , m' съ противоположныхъ сторонъ и вызвать вращеніе вѣсовъ въ другую сторону. Зная длину $2l$ стержня вѣсовъ и значеніе δ одного дѣленія шкалы, можно было, по числу n дѣленій, на которыя перемѣстилось положеніе равновѣсія шариковъ, опредѣлить уголъ φ , на

который повертываются вѣсы подъ вліяніемъ притяженія между двумя парами шаровъ. Очевидно

$$\varphi = \frac{n^2}{l} \dots \dots \dots (2)$$

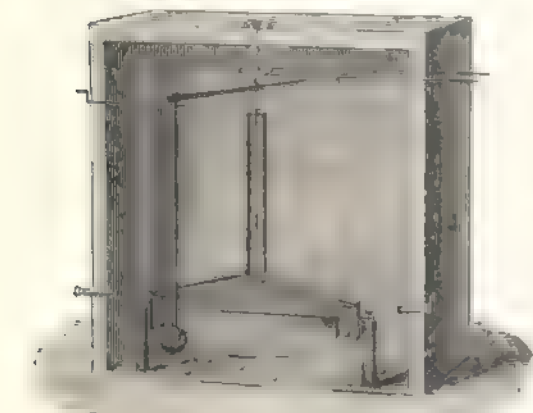
Вращеніе вѣсовъ на уголъ φ вызывается парною силой, моментъ которой равенъ $C\varphi$, см. (19) стр. 305. Обозначая черезъ F силу взаимнаго притяженія каждой пары шаровъ m и m' , имѣемъ

Рис. 202.

$$2Fl = C\varphi = C \frac{n^2}{l} \dots (3)$$

Коэффициентъ C опредѣляется измѣреніемъ времени качанія T унифиляра; мы видѣли, см. (23) стр. 306, что

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{C}} \dots (4)$$



гдѣ K моментъ инерціи стержня съ шарами m' относительно оси вращенія. Пренебрегая массою

самого стержня, можемъ положить $K = 2m'l^2$ и тогда (4) даетъ

$$C = \frac{2m'l^2\pi^2}{T^2}$$

Вставивъ это въ (3), получаемъ

$$l^2 = \frac{\pi^2 n^2 m}{F} \dots \dots \dots (5)$$

Если m' выражено въ граммахъ и T въ секундахъ, то сила притяженія F по этой формулѣ получается въ динахъ.

Пусть далѣе r расстояние центровъ шаровъ m и m' , когда между ними обнаруживается притяженіе F r радиусъ, d плотность шаровъ m , R радиусъ, D плотность, M масса земли, наконецъ l' вѣсъ шарика m . Мы имѣемъ

$$F = c \frac{mm'}{r^2}; P = m'g = \frac{Mm'}{R^2} \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ c тотъ же коэффициентъ, который въ (1) стр. 177 обозначенъ, быть черезъ C . Формулы (6) даютъ, если вставить $m = \frac{4}{3} \pi r^3 d$ и $M = \frac{4}{3} \pi R^3 D$

$$\frac{F}{P} = \frac{F}{m'g} = \frac{mR^2}{M r^2} = \frac{r^2 d}{R^2 D},$$

откуда

$$F = \frac{r^2 d g m'}{c^2 R D} \dots \dots \dots (7)$$

Приравнявъ (5) и (7), получаемъ

$$D = \frac{g T^2 r d}{\pi^2 n^2 c^2 R} \dots \dots \dots (8)$$

Cavendish производить свои измѣренія съ двумя различными нитями, для болѣе точкой было $T = 840$ сек., для болѣе тонкой $T = 420$ сек. Какъ среднее изъ 29-ти наблюдений онъ нашелъ

$$D = 5,48.$$

§ 3. Позднѣйшія измѣренія, произведенныя по способу Cavendish'a.

Весьма многие наблюдатели повторяли и повторяютъ въ настоящее время опредѣленіе величины D помощью крутильных вѣсовъ, Ketch (1837—1849 г.) первый повторилъ эти измѣренія по способу болѣе точному, чѣмъ Cavendish. Онъ нашелъ

$$D = 5,58.$$

Baily (1842 г.) нашелъ $D = 5,67$.

Съ 1870—1878 г. произвели замѣчательныя измѣренія Cornu и Baille, принимая всевозможныя предосторожности и пользуясь новѣйшими и точнѣйшими методами измѣренія. Чтобы избѣжать сотрясенія, неминуемыхъ при перемѣщеніи тяжелыхъ шаровъ изъ одного положенія въ другое, они устанавливали четыре полыхъ чугунныхъ шара (диаметръ 12 см.), симметрично по два съ двухъ сторонъ отъ мѣдныхъ шариковъ бифи-при, вѣсившихъ каждый 109 гр. Поочередно одна на крестъ расположенная пара шаровъ наполнялась ртутью, которая перекачивалась изъ одной такой пары въ другую и обратно. Cornu и Baille нашли

$$D = 5,50.$$

Весьма точныя измѣренія произвелъ Boys (1893), пользуясь для прикѣса изобрѣтенными имъ кварцевыми нитями. Притягивающіе свинцовые шары имѣли диаметръ всего въ $1\frac{1}{4}$ и $2\frac{1}{4}$ дюйма; диаметръ притягиваемыхъ золотыхъ шаровъ равнялся 0,2 и 0,25 дюйма. Опыты производились въ подвальномъ помѣщеніи лаборатории (Clarendon) въ Оксфордѣ. Boys нашелъ $D = 5,527$.

§ 4. Другіе способы опредѣленія средней плотности D земли. Airy (1866) опредѣлилъ D , сравнивая ускореніе g на поверхности земли съ ускореніемъ g' внутри земли на глубинѣ h . Принимая радиусъ земли равнымъ $r + h$ и допуская, что она состоитъ изъ шара, радиусъ котораго r и плотность D и изъ слоя, толщина котораго h и плотность d , легко видѣть, что на поверхности земли

$$g = k \cdot \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 D}{(r+h)^2} + k \cdot \frac{\frac{4}{3} \pi [(r+h)^3 - r^3] d}{(r+h)^2},$$

гдѣ k множитель пропорциональности. Пренебрегая квадратомъ дроби $\frac{h}{r}$, получаемъ

$$g = \frac{4}{3} \pi k [(r - 2h)D + 3hd].$$

$$\text{Далѣе очевидно } g' = k \frac{4}{3} \pi r^3 D = \frac{4}{3} \pi k r D.$$

Отсюда

$$D = \frac{\frac{g}{g'}}{\frac{r}{3} - \left(1 - \frac{g}{g'}\right) \frac{h}{r}}. \quad (9)$$

Определение g и g' производилось по способу Borda, причемъ часы съ секунднымъ маятникомъ стояли на поверхности земли, а другіе часы находившіеся подъ землею, были соединены электрически съ первыми такъ что тѣ и другіе имѣли вполнѣ одинаковый ходъ. Для опредѣленія D необходимо знать среднюю плотность d поверхностнаго слоя и въ этомъ заключается недостатокъ метода. Airy принялъ $d = 2.5$; далѣе при его опытахъ $\frac{r}{h} = 16000$, а для 1 $\frac{g}{g'}$ Airy нашелъ $\frac{1}{19200}$. Эти числа даютъ

$$D = 6.57.$$

Позже Haughton ввелъ поправку въ вычисленія Airy и нашелъ $D = 5.48$.

Carlini (1824) и Mendenhall (1880) наблюдали качанія маятника на вершинѣ горы (первый на Монтъ-Сени, второй на горѣ Фудзума около Токио; Carlini нашелъ $D = 4.837$, Mendenhall $D = 5.77$).

Wilsing (1885—87) наблюдалъ боковое отклоненіе весьма чувствительнаго маятника, вызванное притягивающей массой и нашелъ сперва $D = 5.594$, а послѣ введенія различныхъ улучшеній въ устройство прибора $D = 5.579 \pm 0.012$.

Jolly (1881) измѣрилъ притягательное дѣйствіе свинцовой массы (5775 кр.) на тѣло, поставленное на чашку вѣсовъ. Онъ нашелъ $D = 5.692$.

Далѣе Koenig и Richarz измѣрили D такимъ способомъ: непосредственно надъ большою свинцовою массою находились чашки вѣсовъ; другія чашки, соединенныя съ первыми при помощи стержней (длина 226 см.), проходившихъ черезъ вертикальные каналы, пробурованные въ свинцовой массѣ, находились какъ разъ подъ этою послѣдней. Тѣло клалось сперва напр. на лѣвую верхнюю чашку, а гири на правую нижнюю, потомъ тѣло на лѣвую нижнюю, а гири на правую верхнюю. Повторяя то же самое при отсутствіи свинцовой массы, чтобы исключить вліяніе измѣненія силы тяжести съ высотой, можно опредѣлить величину притяженія этой массы а отсюда и среднюю плотность D земли.

Окончательные результаты опубликовали (1896) Richarz и Krüger-Menzel. Они нашли для средней плотности D земли

$$D = 5.505 \pm 0.0009.$$

Для коэффициента C въ формулѣ Ньютона, см. (1) стр. 177, т.-е. для взаимнаго притяженія грамма и грамма, находящихся на разстояніи 1 см. другъ отъ друга, выраженнаго въ динахъ, они даютъ число

$$C = (6.685 \pm 0.011) 10^{-8}.$$

Свинцовая масса, которой они пользовались, имѣла вѣсъ свыше 100,000 кгр.

Poynting (1890) привѣшивалъ къ концамъ коромысла вѣсовъ шары, вѣсомъ каждый около 21.57 кгр. Поочередно подъ одинъ и другой изъ этихъ шаровъ помещался шаръ, вѣсъ котораго равнялся 153.41 кгр. Наблюдалось измѣненіе положенія равновѣсія вѣсовъ вследствие притяженія между шарами. Poynting получилъ $D = 5.4934$.

Berget изучалъ притяженіе водяного слоя на поверхности озера, уровень котораго можно было мѣнять на 1 метръ. Онъ нашелъ $D = 5.41$.

Сравнивая результаты различныхъ изслѣдованій, мы видимъ, что они весьма значительно отличаются другъ отъ друга. Наиболее заслуживаютъ довѣрія слѣдующія числа:

	<i>D</i>
Cornu и Baille (1878)	5.50
Boys (1893)	5.527
Poynting (1890)	5.493
Richarz и Krüger-Menzel (1896)	5.505

Придавая этимъ числамъ одинаковый вѣсъ (стр. 246), получаемъ какъ среднее

$$D = 5.51,$$

т. е. меньше числа 5.55, которое обыкновенно прежде принималось.

Плотность поверхностнаго слоя земли, какъ извѣстно, въ среднемъ не болѣе 2.3; отсюда слѣдуетъ, что внутреннія части земли обладаютъ гораздо болѣею плотностью, чѣмъ поверхностныя. Roche далъ формулу для плотности D земли на разстояніи x отъ ея центра, а именно

$$d = 10.6 \left(1 - 0.8 \frac{x^2}{R^2} \right) (10)$$

гдѣ R радиусъ земли, эта формула была упомянута на стр. 333. Въ центрѣ земли она даетъ $d_0 = 10.6$; на ея поверхности $d = 2.1$.

Здѣсь будетъ мѣсто сказать нѣсколько словъ о замѣчательныхъ приборахъ Eötvös'a, хотя повидимому, и не предназначенныхъ для опредѣленія величины D . Одинъ изъ этихъ приборовъ состоитъ изъ одновитныхъ крутильных вѣсовъ, помещенныхъ между двумя свинцовыми столбами. Время качанія стерженька оказалось равнымъ 641 сек., когда его положеніе равновѣсія совпадало съ прямой, соединяющей столбы и равнымъ 860 сек., когда положеніе равновѣсія было перпендикулярно къ этой прямой. Это дало для

коэффициента C въ формулѣ всемирнаго тяготѣнія, т.-е. для силы притяженія грамма и грамма, находящихся на разстояніи $\frac{1}{2}$ см. другъ отъ друга.

$$C = 0.65 \cdot 10^{-8}.$$

Другой приборъ (гравитационный компенсаторъ) обнаруживалъ притяженіе массы въ 300 кгр., находившейся на разстояніи 5 метровъ отъ прибора. Въ третьемъ приборѣ (гравитационный мультипликаторъ) Ботвус перемѣщалъ притягивающія массы то въ одну, то въ другую сторону отъ стерженька, такимъ образомъ ему удавалось такъ сказать раскачать стерженежъ и получить отклоненія, въ 150 разъ превышающія тѣ, которые обнаруживаются вслѣдствіе непосредственнаго притяженія тѣхъ же массъ.

ЛИТЕРАТУРА.

- Maskelyne and Hutton*. Phil. Trans. 1775 и 1778.
Cavendish. Phil. Trans. T. 83 p. 388, 1798; *Gilb. Ann.* 2
Reich. Versuche über d. mittlere Dichtigkeit der Erde Freiberg 1838; *Abhandl. d. saechs. Ges. d. Wiss.* I, 1852.
Baily. Mem. of the R. Astron. Soc. Lond. 14 (1843); *Annales chim. et phys.* (3) 5, p. 338, 1842.
Cannon et Baily. C. R. 86 p. 571, 699, 1001 (1878).
Airy. Phil. Trans. 1856.
Widsing. Berl. Sitz-Ber. 1885 p. 13; *Publ. d. Astrophys. Observ. Potsd.* № 22 VI, 2 p. 35, 1887; № 23, VI, p. 133, 1889.
Jolly. Abh. d. bayr. Acad. 2 Kl. 13 и 14; *Wied. Ann.* 14 p. 331, 1881.
Koenig und Richarz. *Wied. Ann.* 24 p. 664, 1885, *Berl. Ber.* 1884 p. 1203.
Richarz und König-Menzel. *Berl. Ber.* 1896 p. 1305.
Berget. C. R. 116 p. 1501, 1893.
Paynter. Phil. Trans. London. 182 (A), p. 565, 1891, отдѣльная книга: *The mean density of the earth*. London, 1894.
Boys. *Nature* (англ.) 50 p. 340, 366, 417, *Proc. R. Soc.* 46 p. 296; 56 p. 131; *Phil. Trans. London*, 186 p. 1, 1895.
Gaullmann. *Seances Soc. fr. d. Phys.* 1893 p. 238.
R. v. Eötvös. *W. A.* 59 p. 385, 1896.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

УЧЕНИЕ О ГАЗАХЪ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Плотность газовъ.

§ 1. Физика частичныхъ силъ. Основные свойства газовъ. Идеальный газъ. Въ настоящее время вошло въ обычай выдѣлять учения о газахъ, жидкостяхъ и твердыхъ тѣлахъ въ особый отдѣлъ физики подъ названіемъ «Физики частичныхъ силъ». Однако это названіе не вполне соответствуетъ обычному содержанию отдѣла, такъ какъ при весьма скудныхъ нашихъ свѣдѣніяхъ о роли междучастичныхъ силъ въ различныхъ физическихъ явленіяхъ, мы во многихъ случаяхъ не можемъ сказать, играютъ ли эти силы какую-либо роль въ данномъ явленіи. Подозрѣвать же участие этихъ силъ мы можемъ въ очень многихъ явленіяхъ, обыкновенно разсматриваемыхъ въ ученияхъ о теплотѣ, свѣтѣ, магнетизмѣ и даже въ учении объ электричествѣ. Въ виду такой неопредѣленности названія «Физика частичныхъ силъ», мы его и не вводимъ вовсе, но ограничиваемся выдѣленіемъ трехъ особыхъ отдѣловъ, подъ названіемъ учения о газахъ, жидкостяхъ и твердыхъ тѣлахъ.

Слѣдя примѣру многихъ новѣйшихъ курсовъ, мы начинаемъ съ тѣхъ газообразныхъ, какъ наиболее простыхъ во всѣхъ отношеніяхъ. Внутреннее строеніе газовъ, согласно современнымъ воззрѣніямъ, сравнительно очень простое, то же самое относится и къ законамъ, управляющимъ этими явленіями, которыя происходятъ въ газахъ. Характерныя свойства газовъ суть:

1. Газы противопоставляютъ весьма малое сопротивленіе всякой вѣшной причинѣ, стремящейся измѣнить ихъ форму.
2. Газы противопоставляютъ сравнительно небольшое сопротивленіе всякой вѣшной причинѣ, стремящейся уменьшить ихъ объемъ.
3. Газы, не подверженные вѣшнымъ влияніямъ (напр. силѣ тяжести), равномерно наполняютъ весь предоставленный имъ объемъ, производя на

поверхность тѣла, ограничивающаго этотъ объемъ, определенное давление, которое мы условились измѣрять въ килограммахъ на квадратный метръ поверхности, или въ миллиметрахъ ртутнаго столба (стр. 32) и называть упругостью газа.

4. Другъ къ другу всѣ газы относятся почти индифферентно, если конечно исключить случаи химическихъ взаимодействий, что значитъ, что два газа, помещенные въ произвольныхъ относительныхъ количествахъ въ одномъ сосудѣ, смѣшиваются вполнѣ какъ бы проникая другъ друга и образуя нѣчто однородное во всѣхъ частяхъ.

Рядомъ съ этими, такъ сказать въ газы бросающимися признаками газы обладаютъ еще другими свойствами, а именно:

1. Газы приблизительно слѣдуютъ закону Бойля-Мариотта: упругость данного количества газа при неизмѣнной температурѣ мѣняется обратно пропорціонально его объему.

2. Газы приблизительно слѣдуютъ закону Гей-Люссака по которому объемъ v данного количества газа при температурѣ t , и объемъ v_0 при 0 связаны равенствомъ $v = v_0 (1 + \alpha t)$, гдѣ α въ всѣхъ газахъ $\alpha = 0,00366$.

3. Газы приблизительно слѣдуютъ закону Авогадро, въ одинаковыхъ объемахъ различныхъ газовъ, находящихся при одинаковой температурѣ и одинаковомъ давленіи, заключаются одинаковое число молекулъ.

4. Газы приблизительно удовлетворяютъ условію отсутствия внутренней работы (стр. 95—96) при измѣненіи объема, или что то же самое, сдѣлание между частицами въ нихъ весьма мало.

Мы оставимъ въ сторонѣ вопросъ о томъ, насколько эти четыре свойства самостоятельны или представляютъ одно — слѣдствие другихъ.

Реально существующіе газы не удовлетворяютъ ни одному изъ послѣднихъ перечисленныхъ четырехъ свойствъ. Замѣчаются отступленія отъ этихъ законовъ и притомъ оказываются, что эти отступленія тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе газы къ состоянию сжиженія. Для стационарнаго углекислаго газа эти отступленія громады для разбѣженного воздуха они въ высшей степени ничтожны. Идя въ этомъ направленіи мысленно еще немного дальнѣе, мы получаемъ представленіе о фиктивномъ, т.-е. въ природѣ повидному не существующемъ веществѣ съ абсолютною точностью удовлетворяющемъ законамъ Бойля-Мариотта, Гей-Люссака и Авогадро, между частицами котораго не существуетъ никакого сдѣлания, такъ что внутренняя работа равна нулю. Такое вещество называется идеальнымъ или совершеннымъ газомъ.

§ 2. Плотность газовъ (и перегрѣтыхъ паровъ) и молекулярный вѣсъ.

Мы видѣли (стр. 35), что слѣдуетъ отличать двѣ плотности газовъ: плотность D относительно воды, въ широчайшихъ предѣлахъ мѣняющуюся при сжатіи и разбѣженіи газа, и плотность δ относительно воздуха, находящаяся при одинаковыхъ съ газомъ давленіи и температурѣ. Вторая величина почти постоянна для данного газа, она мѣняется лишь настолько, насколько воздухъ и разсматриваемый газъ неодинаково отступаютъ отъ законовъ Бойля-Мариотта и Гей-Люссака или законы для

краткости будем обозначать буквами В.-М. и Г.-Т. Иногда, говоря о плотностях, рассматривают способы определения этой величины для газов и для паров отдельно друг от друга, относя последние к учению о теплоте. Из начального курса физики, однако, известно, что пары всякой жидкости при температурах, значительно превышающих температуру кипения, соответствующую данному давлению, т.-е. пары, далекие от насыщения, ничем не отличаются от газов и что, наоборот, все «газы» в обыкновенном смысле слова (H , O , N , Cl , CO и т. д.) могут быть рассматриваемы, как пары некоторых жидкостей, далекие от насыщения. Поэтому, говоря о плотности газов, мы рассмотрим заодно и способы определения плотности паров таких веществ, которые при обыкновенной комнатной температуре находятся в жидком состоянии. Во всяком случае полагаем, что пары находятся далеко от насыщения.

Изъ закона Авогадро вытекаетъ, какъ очевидное слѣдствіе, что вѣсъ одной молекулы различныхъ газовъ пропорционаленъ плотности δ этого газа. При измѣреніи молекулярнаго вѣса μ принято, однако, за единицу вѣса считать вѣсъ одного атома водорода; такъ какъ молекула водорода состоитъ изъ двухъ атомовъ, то для него $\mu = 2$. Кислородъ въ 15,88 разъ тяжелѣе водорода, а потому для него $\mu = 31,76$. Вообще для произвольнаго газа, обладающаго плотностью δ относительно воздуха и слѣд. плотностью 14,442 относительно водорода, молекулярный вѣсъ μ равенъ

$$x = 2882 \quad , \quad , \quad , \quad (1)$$

Переходим к описанию процедуры определения плотности излучения пара.

§ 3. Способ **Regnault** определения δ и D . Цена этого способа заключается в следующем: стеклянный шар, емкостью которого около 10 литров, наполняется сухим газом при 0 и давлении H определяется вес P и затем при 0 газ выкачивается до весьма малого давления k ; пусть теперь вес шара p . Тогда вес H газа, наполняющего при 0 и 760 мм. объем v шара

$$\Pi = (P - p) \frac{760}{H - h} (2)$$

и отсюда плотность D

$$D = \frac{(P-p)760}{(H-p)} \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad (3)$$

Если для какого-то значения t в-же наблюдения даны значения P' , p' , H' и k' , то для него

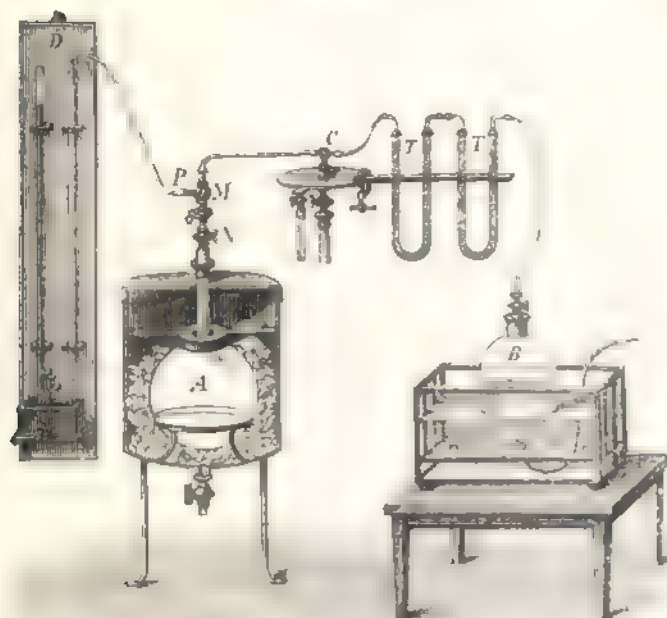
$$J) = \frac{(I' - \bar{I})}{\sqrt{H - I'}} \quad (4)$$

Наконец плотность δ испытуемого газа

$$\frac{D}{P} = \frac{P}{P} \cdot \frac{P}{P} \cdot \frac{H}{H} \cdot \frac{h}{h} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (5)$$

Regnault помѣститъ шаръ *A* (рис. 203) въ тающій ледъ и соединитъ его съ манометромъ *D* (см. ниже глава III. § 7; рядомъ на той же доскѣ находится барометръ), съ насосомъ *C*, высушивающими трубками *T* и резервуаромъ *B*, въ которомъ накоплялся испытуемый газъ. При второмъ измѣреніи (давленіе *h*) ртуть въ обѣихъ трубкахъ *D* находилась на почти одинаковой высотѣ. При взвѣшиваніи шара приходится вводить поправку на потерю вѣса въ воздухѣ (стр. 295), мѣняющуюся съ измѣненіемъ давленія, температуры и влажности воздуха. Чтобы избѣжать необходимости вводить эту поправку,

Рис. 203



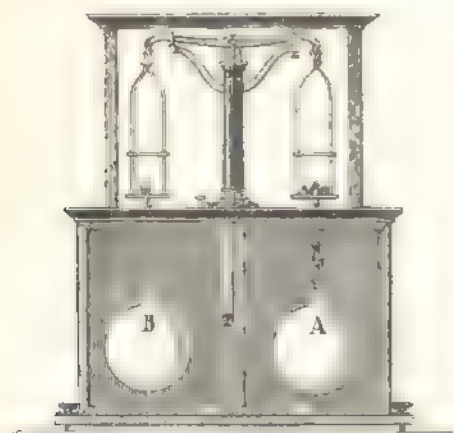
весьма малую поправку на малость определяемого вѣса $P - p$. Regnault

Рис. 204.

уравновѣшивалъ шаръ *A* другимъ шаромъ *B*, внѣшній объемъ котораго съ точностью равнялся внѣшнему объему шара *A*. Эти шары подвѣшивались подъ чашками вѣсовъ (рис. 204) въ особыхъ шкаликахъ, для избѣжанія вліянія на нихъ потоковъ воздуха. Разъ установленное равновѣсіе уже не нарушается, какъ бы ни мѣнялось состояніе воздуха, ибо потеря вѣса шаровъ остается одинаковою, и потому упомянутой выше поправки совѣсть не приходилось вводить.

Для опредѣленія плотности D' воздуха относительно воды по формулѣ (4) необходимо знать объемъ v шара при 0° . Regnault поступилъ слѣд.

образомъ. Сперва онъ взвѣсилъ открытый шаръ *A*, неуравновѣженный



шаромъ B . Полученный вѣсъ P состоятъ изъ вѣса P_1 самого шара, вѣса Π_1 содержащагося въ немъ воздуха, минусъ потеря вѣса ω всей системы въ воздухѣ; и такъ

$$P = P_1 + \Pi_1 - \omega (6)$$

Затѣмъ шаръ наполнялся чистой водой при 0° и опредѣлялся его вѣсъ

$$Q = P_1 + E_0 - \omega' (7)$$

гдѣ E вѣсъ воды и ω' потеря вѣса въ воздухѣ. Величины ω и ω' весьма мало отличаются другъ отъ друга: ихъ разность $\omega' - \omega = \omega_0$ можетъ быть опредѣлена съ достаточной точностью. Вычитая (6) изъ (7) имѣемъ

$$Q - P + \omega_0 = E_0 - \Pi_1 (8)$$

Предыдущія измѣренія дали вѣсъ Π' сухого воздуха, наполняющаго шаръ при 0° и 760 мм. давления; аналогично (2) имѣемъ для воздуха

$$\Pi = (P' - P') \frac{760}{H' - h} (9)$$

Если первое взвѣшивание (6) было произведено при t' , давлении H и влажности h , то

$$\Pi_1 = \Pi' \frac{\left(\frac{H}{8} - \frac{3}{8} h \right) (1 + \alpha t')}{(1 - \alpha t') 760} (10)$$

гдѣ α и α коэффициенты расширенія стекла и воздуха, $\frac{3}{8}$ есть плотность водяного пара (см. стр. 297). Вѣсъ воды E равенъ объему v , помноженному на плотность 0.999881 воды при 0° ; (8) даетъ

$$0.999881v = Q - P + \omega_0 + \Pi_1 (11)$$

Зная v , находимъ плотность D' воздуха по формулѣ (4).

Опытъ Regnault далъ для вѣса e_0 литра воздуха въ Парижѣ, $e_0 = 1.293187$ гр. Поправки, введенныя Д. И. Менделѣевымъ въ вычисления Regnault дали число $e_0 = 1.29347 \pm 0.00028$ гр. Вѣсъ e_0 мѣняется съ измѣненіемъ силы тяжести, онъ пропорционаленъ ускоренію g .

Последнее число для e_0 можно написать въ видѣ $e_0 = 0.131852g$ гр. Подѣлившіе изслѣдованія Leduc'a (1892) и Rayleigh'a привели къ числамъ весьма мало отличающимся отъ чиселъ Regnault. Критическій разборъ всѣхъ работъ привелъ Д. И. Менделѣева къ окончательному результату, что вѣсъ литра сухого воздуха при 0° и 760 мм. равенъ

$$e_0 = 0.131844g \text{ гр. } \pm 0.00010 \text{ гр.} (12)$$

Зависимость g отъ высоты и широты мѣста указана на стр. 331.

Для Петербурга Д. И. Менделѣевъ даетъ число

$$e_0 = 1.29455 \text{ гр. } \pm 0.00010 \text{ гр.} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

§ 4. Способъ Гей-Люссака и Нотманна опредѣленія плотности паровъ. Въ чугунный котелокъ, содержащій ртуть, погружены тщательно прокалѣнныя трубка c (рис. 205) и стеклянный цилиндръ m наполненный водою. Котелокъ поставленъ на небольшую печь, температура воды опредѣляется термометрами t и t' . Въ пространство c надъ ртутью вводится стеклянный запаянный пузырекъ a , содержащій известное высшее количество P жидкости. При нагревании прибора пузырекъ подается и жидкость испаряется. Пусть V емкость при 0° той части трубки, которая занята паромъ, t его температура и H его высота, равная барометрическому давлению, столбному съ давлением водяного столба минусъ давление ртутнаго столба, находящагося въ трубкѣ c . Для плотности D пара имѣемъ при установившемся

Рис. 205



$$D = \frac{P}{V(1 + \alpha t)}$$

гдѣ α коэффициентъ расширенія стекла, для плотности δ получаемъ

$$\delta = \frac{P}{V(1 + \alpha t)} \cdot \frac{e_0 H}{(1 + \alpha t) 760} = \frac{P e_0 H}{V(1 + \alpha t)^2 760} \quad . \quad . \quad (14)$$

гдѣ въ (12) и (13); V должно быть выражено въ литрахъ, P и e_0 въ граммахъ.

Недостатки этого метода, въ особенности неопредѣленность температуры воды, устраняетъ Нотманн, приборъ котораго изображенъ на рис. 206.

Трубка, содержащая паръ, окружена собою широкою трубкою ABD черезъ которую пропускаются пары какой-либо кипящей жидкости, изображаемой соотвѣтственно температурѣ, до которой желаютъ нагрѣть паръ. Когда эта температура высока, то слѣдуетъ вводить поправку на упругость паровъ ртутн., которая при 100° равна 0.28 мм., при 120° — 0.77 мм., при 140° — 1.9 мм. и при 160° — 4.3 мм.

§ 5. Способъ Dumas основанъ на опредѣленнн вѣса известнаго объема пара. Въ стеклянный шаръ B (рис. 207), снабженный вытянутой трубкой, и въ который p , помещаютъ нѣкоторое количество жидкости, плотность δ паровъ которой желаютъ опредѣлить. Шаръ продолжительное время удерживаютъ при температурѣ, значительно превышающей температуру кипящей жидкости при обыкновенномъ атмосферномъ давленнн; для этого во многихъ случаяхъ достаточно опустить шаръ въ сосудъ съ льдомъ (см. рис. 207), которую доводить до кипѣнья. Тогда жидкость, налитая въ шаръ, испаряется и струя пара выходитъ изъ отверстія. Когда выдѣленіе этого пара прекратится, закрываютъ кончикъ вытянутой трубки и

опредѣляють для этого момента барометрическое давленіе H' , равное упругости пара, и температуру T пара помощью обыкновеннаго или вѣсового (на рис. 207, 4; см. Часть Третья) термометра. Затѣмъ высушиваютъ шаръ снаружи и опредѣляютъ его вѣсъ p' , который отличается отъ предварительно опредѣленнаго вѣса p . Далѣе опускаютъ трубку шарика въ воду и отжимаютъ ея кончикъ, тогда вода наполняетъ весь шаръ, если только пары воды не вытѣснены содержащимися въ немъ воздухомъ. Остается опредѣлить вѣсъ P пара, наполненнаго водою. Пусть t и H температура и давленіе воздуха при опредѣленіи вѣса p открытаго шара.

Объемъ шара можно принять равнымъ $P - p$ (ст. 1), вѣсъ пара $D(P - p)$ вѣсъ того же объема воздуха при первомъ взвѣшиваніи (t , H мм.) равенъ $D'(P - p)$.

Разность вѣса пара и вѣса воздуха равна $p' - p$, итакъ

$$(D - D')(P - p) = p' - p$$

откуда

$$D = \frac{p' - p}{P - p} + D'.$$

D есть плотность воздуха при t и H мм.; искомая же величина $d = \frac{D}{D'}$, гдѣ D' плотность воздуха при тѣхъ условіяхъ, при которыхъ находится паръ въ моментъ, когда мы зажали кончикъ трубки. Имѣемъ слѣд.

$$D_1' = D' \frac{H(1 + \alpha t)}{H'(1 + \alpha T)},$$

гдѣ α коэффициентъ расширенія воздуха. Искомая плотность пара относительно воздуха окончательно получается равною

$$d = \frac{D}{D_1'} = \left(\frac{p' - p}{P - p} + 1 \right) \frac{H(1 + \alpha T)}{H'(1 + \alpha t)}. \quad (14)$$

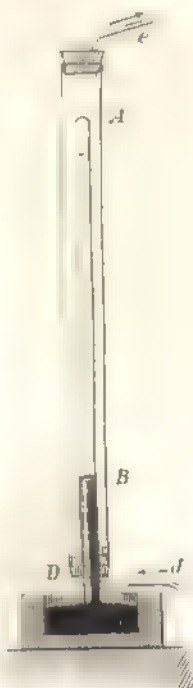
При опредѣленіи D можно принять во вниманіе и упругость h водяныхъ паровъ, т. е., воспользоваться общей формулой

$$D' = D_0 \frac{H}{760(1 + \alpha t)} \quad (15)$$

гдѣ D_0 численно равно вѣсу куб. сант. сухого воздуха при 0 и 760 мм., т. е. равно 0.001 293 гр. (12) и (13); приблизительно $D = 0.0012946$ гр.

При выводѣ (14) мы пренебрегали измѣненіемъ объема шара при нагреваніи отъ t до T° и приняли плотность воды, наполнившей шаръ, равной единицѣ. Не трудно ввести соответствующія поправки. Если при наполненіи шара водою въ немъ обнаружится пузырекъ воздуха, то приходится ввести еще новую поправку, величину которой легко опредѣлить.

Рис. 206.



Pawlewski предложил закрывать отверстие вытянутой трубки колпачкомъ, который просто снимается при наполнении шара водою.

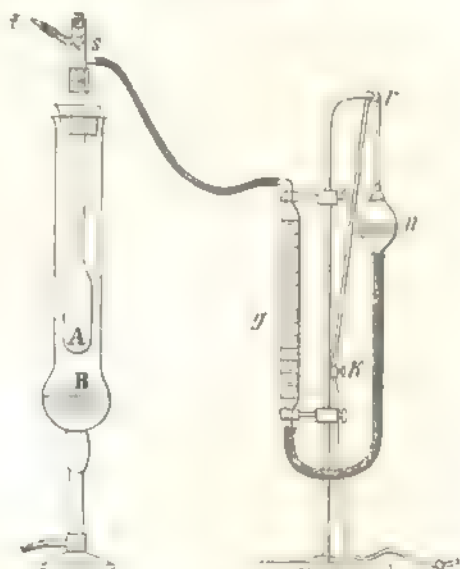
Deville и Troost приспособили приборъ Dumas для случая, когда требуются болѣе высокія температуры. Стеклянный шаръ замѣненъ фарфоровымъ, помещаемымъ въ параль кипящихъ *Hg*, *S*, *Cd* или *Zn*.

§ 6. Способъ вытѣсненія (способъ Victor Mayer'a). Идея этого способа принадлежитъ Dulong'у. Главную часть прибора представляетъ длинный, внизу расширенный сосудъ *A* (рис. 208), помещаемый въ параль какой-либо кипящей жидкости, которую выбираютъ соответственно температурѣ испарения испытываемаго вещества. Можно взять воду (100°), ксилолъ (140°),

Рис. 207.



Рис. 208.



анилинъ (185°), дифениламинъ (310°) и т. д. Температуру кипѣнія этой жидкости, налитой въ *B*, знать не нужно. Верхняя часть сосуда *A* соединена помощью тонкой трубки съ калиброванной трубкой *g*, въ которой находится вода; она соединена съ сосудомъ *n*, который удобно поднимается и опускается, такъ что уровни воды въ *g* и въ *n* можно удерживать на одной высотѣ. Въ верхней части трубки *A* находится отверстие, закрытое пробкою и кромѣ того иногда особое приспособленіе, чтобы въ данный моментъ заставить упасть на дно этого сосуда маленький шарикъ, наполненный вѣсовымъ количествомъ *m* испытываемаго вещества. Шарикъ опирается на палочку *t*, которую снаружи можно вытянуть настолько, что шарикъ упадетъ на дно, покрытое азбестомъ, чтобы самъ сосудъ *A* не былъ поврежденъ при паденіи шарика. Сперва кипятятъ жидкость въ *B* такъ долго, пока выдѣленіе воздуха изъ сосуда *A* не прекратится, т. е. уровень воды въ *g* не переставетъ мѣняться. Тогда вводить вѣсовое количество *m* испытываемаго вещества въ сосудъ *A*.

заставляя падать шарик, или открывая на мгновенье пробку. Вещество быстро испаряется и вытесняет некоторое количество воздуха, которое переходит в g ; опуская сосуды n , удерживают уровень воды в q и n опять к одинаковой высоте. Пусть v объем воздуха, появившегося в q , t комнатная температура и p давление воздуха в g , равное барометрическому давлению минус давление паров воды, насыщающих воздух в g . Воздух, перейдя в g , принимает температуры t . Допуская, что пары, образовавшиеся в A , настолько перегреты, т.е. настолько находятся выше температуры насыщения, что к ним можно приложить законы Б.-М. и Г.-Л., мы заключаем, что эти пары при t° и μ мм. занимали бы как раз объем v . Отсюда их плотность δ равна

$$s = \frac{m}{v} : \frac{0,001295p}{760(1+x)} = \frac{m(1+x)760}{0,001295pv}$$

Так, как в воздухе находятся пары воды, то принимаем $\alpha = 0,004$.
Окончательно

$$\delta = 587800 \frac{m}{m} (1 + 0.004t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Вместо прибора *ин* можно употребить и обыкновенный измерительный цилиндр, наполовненный водой и опрокинутый над пневматической ванной. В этом случае следует при определении p принять во внимание давление водного столба, оставшагося в цилиндре.

Не останавливаясь на других способах определения плотности газов и перегретых паров, основанных на наблюдении вытесненного ими объема жидкости, скорости или истечения через узкие капиллы (см. ниже глава VI, § 3) и т. д. Nilsson и Petterson построили весьма удобное и удобное приспособление прибора V. Mayer'a.

Въ табл. II и III въ концѣ этой книги помѣщены числовыя величины плотности воздуха и другихъ газовъ.

ЛИТЕРАТУРА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ГАЗОВЪ И ПАРОВЪ.

- Arago et Biot* Mém. Acad. Fr. 1806.
Regnault Mem. Acad. Fr. 21 — Relation des expériences t. I. p. 221, 1847; Ann.
 ch. et phys. (3) 63, p. 45, 1861; Pogg. Ann. 65.
Д. Н. Менделѣевъ. Временикъ Главн. Палаты. I, стр. 57.
Bunsen Gasometrische Methoden, 1847. p. 128.
Dumas Ann. ch. et phys. (2) 33, 1827, Pogg. Ann. 9, 1827.
Pawlewski. Chem. Ber. 16, p. 1293, 1883.
Deville et Troost Ann. ch. et phys. (3) 58, p. 257, 1858; C. R. 45 p. 821.
Gay-Lussac. Ann. ch. et phys. (1) 80, p. 118, 1811.
V. Mayer Chem. Ber. 9, p. 1216; 11, p. 2068 и др.
Nilsen et Peterson Journ. f. pract. Chem. 33 p. 1, 1886.
 Методы, не разсмотрѣнные нами:
Graham. Trans. R. Soc. 1846, p. 573; 1863, p. 385.
Lux. Instr. 1885 p. 411; 1886 p. 255.
Lommel Instr. 1886 p. 109. Wied. Ann. 27 p. 141, 1886.
Moissan et Gaudier. Ann. ch. et phys. (7) 5, p. 568, 1895.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Упругость газовъ.

§ 1. Законъ Бойля-Mariotte. Двѣ правильныя формулировки этого закона уже были приведены нами на стр. 34. Обозначая упругость газа равную вѣшному давлению, черезъ p и объемъ газа черезъ v , мы имѣемъ при неизмѣнной температурѣ для данного количества газа

$$pv = \text{Const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Упругость p будемъ выражать въ килогр. на кв. метръ поверхности объема v въ куб. метрахъ, относя его къ вѣсовой единицѣ газа, такъ что v будетъ обозначать удѣльный объемъ. Если на координатныхъ осяхъ откладывать по абсциссамъ объемъ v , а по ординатамъ давленіе p , то кривая, выражающая связь между этими двумя величинами при постоянной температурѣ будетъ равностороннею гиперболою, асимптоты которой — координатныя оси; ея уравненіе $p = \frac{c}{v}$. Законъ сжатія газовъ былъ открытъ Бойлемъ (Boyle) въ 1662 г.; опытное изслѣдованіе впервые подробно произвелъ Мариоттъ (Mariotte) въ 1676 г. Не останавливаемся на обыкновенныхъ приемахъ проверки закона для давленій выше и ниже одной атмосферы, приемахъ, которые излагаются въ элементарныхъ курсахъ.

На стр. 342 мы упомянули, что газы приблизительно слѣдуютъ закону Б.-М., дѣйствительно, формула (1) не оказывается съ точностью соблюденной, произведение pv , съ измѣненіемъ давленія p не остается величиною постоянной. Уклоненія отъ закона Б.-М. могутъ происходить въ двухъ направленіяхъ:

Если съ увеличеніемъ давленія p произведение pv уменьшается, то это значить, что объемы v получаются слишкомъ малые, т.-е. что газъ сжимается болѣе, чѣмъ того требуетъ законъ Б.-М.

Если, наоборотъ, съ возрастаніемъ p произведение pv увеличивается, то это указываетъ, что газъ сжимается менѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б.-М.

§ 2. Изслѣдованія, произведенныя до Regnault (1847 г.). Весьма многіе ученые занимались вопросомъ о сжатіи газовъ. Наиболѣе важныя работы, произведенныя до Regnault, суть слѣдующія:

Oerstedt и Svendsen (1826 г.) не нашли отступленія отъ закона Б.-М. для воздуха до 60 атм. Для газовъ же, которые Faraday превратилъ въ жидкое состояніе (HN_3 , SO_2 и др.), они нашли отступленія въ сторону болѣе сильнаго сжатия.

Depretz (1827) первый доказать весьма простымъ опытомъ, что различные газы сжимаются не одинаково. Двѣ одинаковыя трубки A и B (рис. 209) наполнялись двумя различными газами. Нижніе концы трубокъ были погружены въ сосудъ со ртутью; весь приборъ находился

внутри пнеуметра (Отдѣлъ пятый. Глава III. § 3), т.-е. сосуда, наполненнаго водой, которую можно было сжимать, вдавливая поршень (см. рис.). Оказалось, что ртуть поднималась до неодинаковой высоты a и b въ обѣихъ трубкахъ, среднія части которыхъ сдѣланы были весьма узкими, чтобы малѣйшія разности объемовъ были замѣтны. Подобнымъ же образомъ Pouillet (1837) нашелъ, что CO_2 , SO_2 , NH_3 , NO , CH_4 и C_2H_4 сжимаются сильноѣе.

Рис. 209.

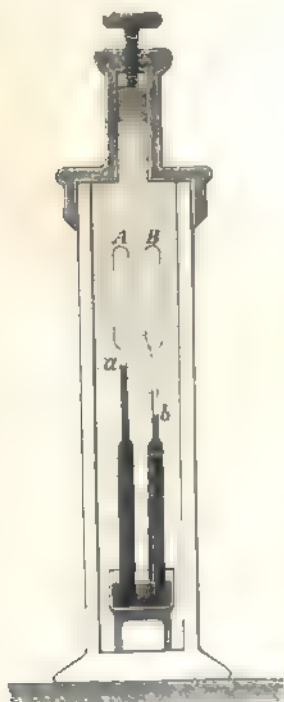
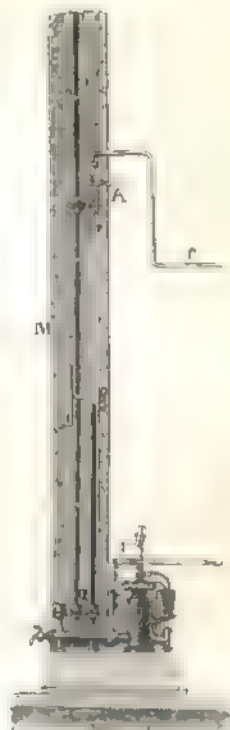


Рис. 210.



чѣмъ воздухъ, и что N , O , H , N_2O_4 , CO и воздухъ сжимаются въоднѣ, одинаково.

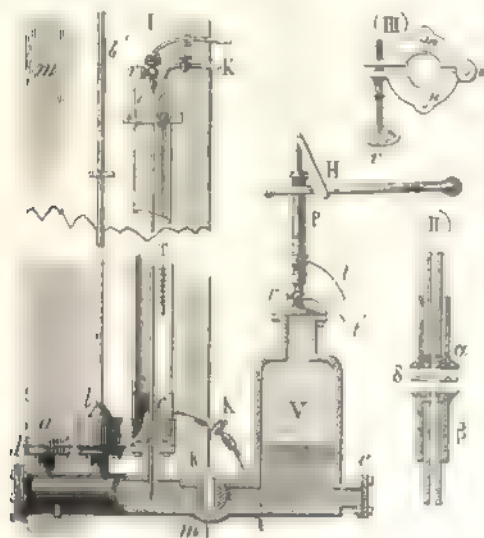
Dulong и Adago (1830) сжимали газъ, заключенный въ трубкѣ (длины 1.7 метра) обыкновеннымъ способомъ, увеличивая длину ртутнаго столба въ другой трубкѣ, соединенной съ первой, и измѣряя длину этого столба и уменьшающійся объемъ газа. Они для воздуха до 27 атм. не нашли отступленій отъ закона Б.-М.

§ 3. Исслѣдованія Regnault (1847 и 1862 г.). Главнѣйшій недостатокъ методовъ, которые применялись до Regnault, заключался въ томъ, что по мѣрѣ увеличенія давленія, объемъ газа непрерывно уменьшался, влѣдствие чего относительная точность измѣренія этого объема должна была также уменьшаться. Небольшія отклоненія отъ закона Б.-М., влѣдствие этого, могли быть не замѣчены. Существенная черта опытовъ Regnault заключалась въ томъ,

что онъ подвергалъ сжатіямъ тѣмъ болѣешия количества газа, чѣмъ выше было достигнутое имъ давленіе, такъ что начальный объемъ e_0 газа, до дальнѣйшаго его сжатія, во всѣхъ опытахъ былъ одинъ и тотъ же; сжатіе же доводилось всегда до объема $e = \frac{1}{2} e_0$, причемъ давленіе, до сжатія равное p_0 , дѣлалось бы равнымъ $p = 2p_0$, еслибы газъ строго слѣдовалъ закону Б.-М. Измѣрив давленія p_0 и p , Regnault и могъ открыть отступленія отъ этого закона.

Главная часть прибора Regnault изображена на рис. 210. Трубка Az содержитъ испытуемый газъ; ея длина 3 метра, внутренний диаметръ 10 мм.

Рис. 211.



черта β раздѣляетъ ее на двѣ части равной емкости. Она окружена трубкою, черезъ которую непрерывно протекаетъ вода опредѣленной температуры. Въ верхнемъ концѣ трубка снабжена краномъ и трубкой c , служащей для наполненія Az при помощи нагнетательнаго насоса сухимъ газомъ. Нижнимъ концомъ она погружена въ чугунный резервуаръ, наполненный ртутью. Въ этотъ же резервуаръ погружена нижняя часть другой трубки, длиною въ 24 метра, которая была расположена вдоль стѣны башни и мачты въ Collège de France. Цилиндръ H содержитъ ртуть и надъ ней воду, количество которой можно было увеличивать, действуя насосомъ P . Соединительный кранъ

(см. вертикальную ручку надъ H) закрывался, какъ только въ приборѣ достигалось желаемое давленіе. Трубка Az наполнялась газомъ: то черта α при давленіи въ 1 атм.; газъ сжимался до черты β и измѣрялось давленіе, близкое къ 2 атм. Затѣмъ накачивался газъ и вся трубка до α наполнялась газомъ при 2 атм.; опять газъ сжимался до черты β т.-е. приблизительно до 4 атм. Вновь накачивался газъ и сдвиганіе производилось отъ начального давленія 4 атм. и т. д. На рис. 211 изображена нижняя часть прибора въ разрѣзѣ и въ увеличенномъ масштабѣ. Значеніе отдѣльных частей понятно изъ предыдущаго описанія. Отдѣльный рис. II показываетъ способъ скрѣпленія трубокъ, изъ которыхъ состоитъ тѣлая трубка bb' . Оправы α и β соединяются зажимами m , изображенными на рис. III.

Главнѣйшія поправки суть:

1. Давленіе атмосферы, которое слѣдуетъ прибавить къ давленію ртутнаго столба, должно быть взято для мѣста верхняго конца этого столба.
2. Высота ртутнаго столба должна быть приведена къ 0°; для этого служить рядъ термометровъ, изъ которыхъ два видны на черт. 210.

3. Ртуть въ открытомъ столбѣ сжималась подъ вліяніемъ собственнаго вѣса и потому ея плотность возрастала сверху внизъ.

4. Объемъ трубки, содержащей газъ, нѣсколько увеличивался когда давленіе возрастало вдвое.

5. Температура потока воды не оставалась вполне постоянною.

Regnault получилъ нижеслѣдующіе результаты. Пусть p_0 и v_0 начальныя значенія въ одномъ изъ опытовъ, p_1 и v_1 значенія послѣ сжатія, причемъ v_1 было весьма близко къ $\frac{1}{2} v_0$. Regnault опредѣлялъ дробь $\alpha = \frac{p_1 v_1}{p_0 v_0}$. Изъ предыдущаго ясно, что если

$$\left. \begin{array}{l} p_1 v_1 > 1, \text{ то газъ сжимается болѣе,} \\ p_1 v_1 < 1, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{чѣмъ слѣдуетъ} \\ \text{менѣе,} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{по закону Б.-М.} \end{array} \right.$$

Оказалось, что для воздуха, N и CO_2 дробь $\alpha > 1$, для H она < 1 ; первые сжимаются болѣе, H меньше, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б.-М. Въ слѣдующей таблицѣ сведены эти результаты.

Воздухъ		Азотъ		CO_2		Водородъ	
p_0 (мм.)	$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0}$	p_1 (мм.)	$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0}$	p_0 (мм.)	$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0}$	p_0 (мм.)	$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0}$
739,19	1,00142	753,96	1,00101	763,86	1,00764	—	—
2111,63	1,00276	2159,12	1,00126	2164,31	1,01901	—	—
4219,05	1,00350	3030,22	1,00195	3186,13	1,02870	3989,47	0,99758
9332,82	1,00613	9772,99	1,00182	9620,06	1,09983	9175,25	0,99313
(12,30 атм.)		(12,85 атм.)		(12,66 атм.)		10361,88	0,99239
—	—	—	—	—	—	(13,62 атм.)	

Отступленія отъ закона Б.-М. особенно наглядно видны изъ слѣдующей таблицы:

v	Воздухъ		Азотъ		CO_2		Водородъ	
	p	pv	p	pv	p	pv	p	pv
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\frac{1}{2}$	1,9978	0,9989	1,9986	0,9993	1,9829	0,9914	2,0011	1,0006
$\frac{1}{8}$	7,9457	0,9932	7,9641	0,9955	7,5194	0,9399	8,0339	1,0042
$\frac{1}{20}$	19,7199	0,9860	19,7886	0,9894	16,7054	0,8353	20,2687	1,0134

Если бы газы слѣдовали закону Б.-М., то числа p были бы 1, 2, 8 и 20, а все числа pv были бы равны единицѣ.

Regnault выразилъ результаты своихъ наблюдений эмпирическою формулою вида

$$\frac{p_0 v_0}{pv} = 1 + A \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right) + B \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right)^2. \quad (2)$$

гдѣ A и B постоянныя, различныя для различныхъ газовъ.

Позже Regnault остановился на другой формулѣ

$$\frac{0.76a}{pv} = 1 + A(p - 0.76) + C(p - 0.76)^2 \quad (3)$$

Для воздуха въ формулѣ (2) $A = 0.0011054$, $B = 0.000019381$, для водорода $A = +0.0005423$, $B = 0.0000084155$; p въ (3) давление въ метрахъ.

§ 4. Давленія меньшія одной атмосферы. Работы Siljestroema, Менделѣева, Amagat и Fuchs'a. Siljestroem (1873) заставлялъ данное количество газа расширяться и наблюдать новые объемы и давленія. Онъ нашелъ, что при слабыхъ давленіяхъ (меньше 76 мм.) водородъ сжимается болѣе, чѣмъ по закону Б.-М., воздухъ же слѣдуетъ этому закону тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше давленіе.

Д. И. Менделѣевъ (1874—76) пришелъ къ совершенно другому результату, а именно, что въ предѣлахъ давленій отъ 5 мм. до 650 мм. воздухъ сжимается менѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б.-М. Отступенія уменьшаются по мѣрѣ приближенія къ 650 мм., при какомъ давленіи $\frac{d(pv)}{dp} = 0$, при $p > 650$ мм. сжимаемость воздуха превышаетъ указанную закономъ Б.-М. Вотъ нѣкоторые числа, данныя Менделѣевымъ

p	pv	p	pv
646.185 мм.	1.00000	104.805 мм.	0.99730
486.215	0.99960	16.395	0.97114
207.430	0.99867	14.555	0.96551

Приборъ, которымъ пользовался Менделѣевъ, изображенъ на рис. 212. Большой яйцевидный сосудъ A можно наполнить ртутью, открывъ край D и сообщая его съ резервуаромъ ртути E ; для выпуска ртутн служишь край C . Сосудъ A соединенъ помощью тонкой трубки со ртутнымъ краемъ OM и съ барометрическою сифонною трубкой mn , играющей роль манометра (глава III, § 8). Въ вернемъ концѣ широкой трубки Z находится черта, до которой при исхлѣ измѣреній заводится ртуть приливается таковой черезъ воронку R , или выпускаемъ черезъ край T . Устройство ртутнаго крана OM легко понять изъ рисунка: если опустить трубку XU , то нижний конецъ трубки ke откроется и черезъ P можно ввести въ OM , ch и A испытуемый газъ; если затѣмъ поднять XU , то ek внизу закроется и тогда газъ, введенный въ приборъ, находится въ

замкнутомъ со всѣхъ сторонъ пространствѣ. Если Y опущено и P открыто, то ртуть въ X стоитъ выше, чѣмъ въ Z на величину, равную барометрическому давлению. Но когда Y приподнято и газъ въ $kehA$ разбѣженъ, то ртуть въ X опускается и разность высотъ ртути въ X и Z даетъ давление p газа. Опытъ производится слѣд. образомъ: черезъ P вводится газъ, причемъ кранъ C открывался, такъ что газъ могъ наполнить часть сосуда A . Затѣмъ C закрывалось. Y поднималось и определялось давленіе p_1 газа (на манометрѣ ZN), и его объемъ v_1 , равный объему соединительныхъ трубокъ (часть ke и ahb) и объему ртути, вылившейся черезъ C , который определялся взвѣшиваньемъ. Затѣмъ выпускалась опять часть ртути черезъ C и взвѣшиваньемъ ея определялся новый объемъ v_2 ; давленіе p_2 опять измѣрялось на манометрѣ ZN . Такимъ образомъ можно было слѣдить за пзмѣненіями произведенія pv , которое, какъ видно изъ приведенной таблички, уменьшается съ уменьшеніемъ давленія, оказалось, что $p_1 v_1 < p_2 v_2$.

Понятно, что были введены всѣ необходимыя поправки на вліяніе температуры и т. д.

Amagat (1876—83) пришелъ къ мало извѣстному результату, что воздухъ при слабыхъ давленіяхъ, отъ 0.245 мм. до 12.297 мм. строго слѣдуетъ закону Б.-М.

Fuchs (1888) подтвердилъ результаты Менделѣева, описавъ, что воздухъ при давленіяхъ ниже 600 мм. сжимается меньше CO_2 и SO между 1000 мм. и 250 мм. напротивъ болѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б. М. Для H отступленій отъ закона Б.-М. не оказалось.

§ 5. Весьма сильныя давленія. Работы Natterer'a и Cailletet. Всѣ изслѣдованія привели къ результату, что для газовъ, которые при обыкновенной температурѣ не ожижаются (см. § 7), напр. для N , O , H и т. д. сжимаемость при весьма сильныхъ давленіяхъ съ возрастаніемъ давленія быстро уменьшается.

Natterer (1850—54) изслѣдовалъ воздухъ, азотъ, водородъ, кислородъ и окись водорода. Вотъ нѣкоторые изъ полученныхъ имъ чиселъ:

Водородъ.		Азотъ.		Воздухъ.		Окись углерода.		Кислородъ.	
p	$\frac{p_0 v_0}{pv}$	p	$\frac{p_0 v_0}{pv}$	p	$\frac{p_0 v_0}{pv}$	p	$\frac{p_0 v_0}{pv}$	p	$\frac{p_0 v_0}{pv}$
атм.		атм.		атм.		атм.		атм.	
78	1,000	75	1,000	76	1,000	77	1,000	77	1,000
248	0,879	252	0,872	252	0,933	248	0,955	254	0,972
505	0,788	515	0,747	514	0,85	515	0,810	517	0,864
1015	0,619	1035	0,707	1047	0,512	1016	0,538	1010	0,590
2791	0,361	2790	0,273	2790	0,260	2790	0,261	1354	0,185

При этихъ громадныхъ давленіяхъ произведеііе p быстро растетъ и слѣд. сжимаемость меньше требуемой закономъ Б.-М.

Cailletet (1870) сжимать при первыхъ своихъ изслѣдованіяхъ газъ въ длинной трубкѣ, позолоченной внутри; объемъ, занимаемый газомъ,

Рис. 213.



опредѣлялся положеніемъ края позолоты, не растворенной ртутью. Въ общіихъ чертахъ его изслѣдованіи подтвердили результаты Natterera. Для воздуха онъ нашелъ максимумъ сжимаемости при 70 атм. Позднѣйшія работы (1877 и 1879) Cailletet произвести съ приборомъ, изображеннымъ на рис. 213. Стеклянный сосудъ K внутри позолоченный (см. выше) наполнялся испытуемымъ газомъ; верхняя его часть лакированная, такъ что ртуть проникала въ нее лишь при высокихъ давленіяхъ; онъ помещался внутри стального цилиндра AA , наполненнаго ртутью и соединеннаго со стальной трубкою TT , длина которой 250 метровъ. Эта трубка была расположена вдоль склона горы (въ Chatillon sur Seine); позже онъ опу- скалъ свой приборъ въ артезианскій колодезь (въ Butte-aux-Cailles), глубина котораго доходитъ до 500 метровъ. Два максимумъ-термометра t и t' давали возможность опредѣлить температуру слоя воды, до котораго былъ опущенъ приборъ. Для азота (при 15) Cailletet нашелъ такіа числа:

p атм.	p_v	p атм.	p_v
1	1.0000	130.52	1.0120
51.79	0.9789	143.68	1.0345
64.83	0.9595	163.31	1.0592
77.84	0.9449	196.33	1.0653
91.28	0.9583	215.99	1.0801
104.35	0.9762	239.46	1.1159
117.41	0.9955		

До 75 атм. азотъ сжимается сильнѣе, чѣмъ по зак. Б.-М., далѣе онъ сжимается слабѣе, и при 125 атм. имѣеть такой объемъ, какъ еслибы онъ строго слѣдовалъ этому закону, при еще большемъ давленіи объемы оказываются уже слишкомъ великими.

Произведеііе p имѣеть минимумъ. Сжимаемость смѣсью воздуха и CO_2 , а также воздуха и H изслѣдовать U. Lala.

§ 6. Опыты Amagat (начало работъ 1878). Этотъ ученый пользовался приборомъ, напоминающимъ приборъ Cailletet. Однако у него стеклянная трубка съ газомъ помещалась своею верхнею частью въ стеклянномъ

ци индѣ, наполненномъ водою, такъ что отчеты уровня ртути могли дѣлаться непосредственно.

Ртуть вливалась въ трубку съ газомъ и рядомъ въ трубку манометрическую посредствомъ насоса, подобно тому, какъ это дѣлалъ Regnault. Опыты производились отчасти на каменной лѣстницѣ укрѣпленія въ Люнѣ, отчасти въ шахтѣ Saint-Etienne, идѣ на глубинѣ 326 метровъ подъ землею былъ установленъ приборъ. Онъ нашелъ слѣдующее:

Для азота произведение pv уменьшается до 50 атм. и затѣмъ увеличивается; около 100 атм. оно равно единицѣ (т.-е. тому же, что и при 1 атм.); при 430.8 атм. $pv = 1,2696$.

Сравнивая сжатіе другихъ газовъ съ сжатіемъ азота, Amagat нашелъ, что воздухъ, O , CO , CN_3 и C_2H_4 также при давленіяхъ выше 1 атм. сперва сжимаются болѣе, а при весьма сильныхъ давленіяхъ менѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б. М. Минимумъ произведенія pv или максимумъ сжимаемости находится для

воздуха	при $p =$	65 метрамъ ртутнаго столба.
N	» » »	50 » » »
O	» » »	100 » » »
CO	» » »	50 » » »
CN_3	» » »	120 » » »
C_2H_4	» » »	65 » » »

Особенно замѣчателенъ C_2H_4 , сжимаемость котораго (при обыкновенной температурѣ) при нѣкоторыхъ давленіяхъ въ 2.2 раза больше, а при другихъ (весьма высокихъ) въ 3 раза менѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б. М.

Для водорода Amagat наблюдалъ непрерывное возрастаніе произведенія pv до весьма высокихъ давленій.

Впослѣдствіи Amagat нашелъ, что азотъ при громадныхъ давленіяхъ въ нѣсколько тысячъ атмосферъ занимаетъ до трехъ разъ болѣе объемъ, чѣмъ слѣдовало бы по закону Б. М.

Leduc изслѣдовалъ отступленіе нѣкоторыхъ газовъ отъ закона Б. М., главнымъ образомъ около 0° и около 76 см. Подобно Regnault онъ пользовался эмпирическою формулою

$$\frac{p_0 v_0}{pv} - 1 = A(p - p_0).$$

идѣ v_0 и v объемы, приведенные къ 0 при давленіяхъ p см. и $p_0 = 76$ см. Приводимъ его результаты:

Газъ:	CO_2	N_2O	HCl	NH_3	SO_2
A :	$102 \cdot 10^{-6}$	$11 \cdot 10^{-5}$	$120 \cdot 10^{-6}$	$243 \cdot 10^{-6}$	$323 \cdot 10^{-6}$
			$\{ 107 \cdot 10^{-6}$	$\{ 190 \cdot 10^{-6}$	—
			$\{ \text{при } 15^\circ$	$\{ \text{при } 14^\circ$	

Значенія A въ первой строкѣ относятся къ 0° .

§ 7. Критическая температура. Чтобы вполне понять результаты, полученные Cailletet и въ особенности Amagat, необходимо познакомиться съ понятіемъ о критической температурѣ, которое болѣе подробно будетъ разсмотрѣно въ учении о теплотѣ.

Andrews (1869) открылъ, что для всякаго газа существуетъ особая температура, выше которой онъ ни при какомъ сжатіи не можетъ быть превращенъ въ жидкость и слѣд. единственно возможное состояніе вещества есть газообразное. Эта температура называется критическою для данного вещества. Критическая температура CO_2 находится при $+31^\circ$, азота при -146° , кислорода при -119° , CO при -140° , водорода вѣроятно около -235° и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что при обыкновенной температурѣ (комнатной) воздухъ, N , O , CO , H находится выше, а CO_2 ниже критической температуры.

§ 8. Вліяніе температуры на сжимаемость газовъ. Въ § 6 было сказано, что Amagat не нашелъ минимума сжимаемости для H , столь резко выраженнаго для нѣкоторыхъ другихъ газовъ. Wroblewski открылъ, однако, что если сжимать H при весьма низкой температурѣ, то и для него, подобно какъ для O , N , CO и т. д., существуетъ минимумъ произведенія p , т.-е. что при весьма низкой температурѣ и H сначала сжимается болѣе, чѣмъ по закону Б. М.

При температурахъ выше обыкновенной комнатной исследовали сжимаемость газовъ Regnault, Amagat, Winkelmann и Roth.

Regnault еще въ 1847 нашелъ, что для CO_2 отступленія отъ закона Мариотта при 100° значительно меныя, чѣмъ при 0° .

Amagat изслѣдовалъ прежде всего (1869-72) сжатіе CO_2 и SO_2 отъ 1 до 2 атмосферъ при температурахъ, возростающихъ отъ 8° (CO_2) и 15° (SO_2) до 250° , и нашелъ, что съ повышеніемъ температуры отступленія отъ закона Б.-М. (слишкомъ большое сжатіе) настолько уменьшаются, что при 250° они дѣлаются почти незамѣтными. Вслѣдъ затѣмъ Amagat изслѣдовалъ сжатіе воздуха (до 320°) и водорода (до 250°) и нашелъ, что и для этихъ газовъ отступленія отъ закона Б.-М. (въ разныхъ направленіяхъ) уменьшаются съ повышеніемъ температуры.

Тотъ же результатъ нашелъ Winkelmann (1878) для C_2H_4 , который онъ подвергалъ сжатіямъ отъ 1 до 2-хъ и отъ 1 до 3-хъ атм. при 0° и 100° .

Roth (1880) изслѣдовалъ CO_2 , SO_2 , C_2H_4 и NH_3 при давленіяхъ до 60 атм. и температурахъ до 183° , и также нашелъ по мѣрѣ повышенія температуры приближеніе сжимаемости газовъ къ требуемой закономъ Б. М. Для CO_2 онъ нашелъ при 183° непрерывное уменьшеніе произведенія p до 130.55 атм., не получивъ того минимума, который Cailletet нашелъ для другихъ газовъ.

Новая работа Amagat (1881) разъяснила это кажущееся противорѣчіе. Онъ изслѣдовалъ H , N , CH_4 , C_2H_4 и CO_2 при температурахъ отъ комнатной до 100° и нашелъ, что эти газы раздѣляются на три группы или типа. Къ первому принадлежитъ H , который при всѣхъ указанныхъ температурахъ въ одинаковомъ направленіи отступаетъ отъ закона Б.-М., сжимаясь менѣе, чѣмъ бы

сѣдоваго. Противоположный типъ представляютъ CO_2 и C_2H_2 , для которыхъ p_v съ увеличеніемъ p сперва быстро уменьшается, а затѣмъ опять растетъ. Однако минимумъ величины p_v находится при тѣмъ высшемъ давленіи, чѣмъ выше температура: для CO_2 онъ находится при $p = 70$ метрамъ, когда $t = 35.1$ и при $p = 170$ метрамъ когда $t = 100$, подобное получилось и для C_2H_2 . Этому объясняется результатъ, найденный Roth'омъ. Третій типъ представляютъ N и CH_4 , при низкихъ температурахъ минимумъ для p_v замѣтенъ; при болѣе высокихъ онъ для N исчезаетъ (p_v только растетъ), для CH_4 переходитъ къ все меньшимъ давленіямъ и вообще дѣлается менѣе рѣзкимъ.

Все эти изслѣдованія приводятъ къ такому заключенію

При температурѣ, которая значительно выше критической, все газы сжимаются менѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б.-М.; p_v растетъ съ возрастаніемъ p .

Вблизи къ критической температурѣ (наприм. H по опытамъ Wroblewsk'аго, см. выше) все газы при возрастаніи p сжимаются сперва болѣе, потомъ менѣе, чѣмъ по закону Б. М. p_v имѣетъ минимумъ.

Ниже критической температуры газъ сжимается болѣе, чѣмъ того требуетъ законъ Б. М.; сжимаемость растетъ съ увеличеніемъ давленія до момента окисаженія, когда она почти внезапно дѣлается весьма малою, равною сравнительно ничтожной сжимаемости жидкости.

Witkowski находитъ для воздуха при различныхъ и притомъ весьма низкихъ температурахъ t слѣдующія значенія давленія p въ атмосферахъ, при которыхъ p_v минимумъ:

$t = +100^\circ$	16°	0°	-35°	$-78^\circ.5$	$-103^\circ.5$	-130°	-135°
$p = < 10$	79	95	115	123	106	66	57

§ 9. Уравненіе состоянія для идеальныхъ газовъ, уравненіе Кляпейрона. Уравненіемъ состоянія для данного вещества называется выраженіе вида

$$F(v, p, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

связывающее удѣльный объемъ v , упругость или виѣшнее давленіе p и температуру t данного количества этого вещества. Для идеальныхъ газовъ связь между v , p и t опредѣляется законами Б.-М. и Г.-Л. (Бойля-Мариотта и Гей-Люссака). Пусть v_1, p_1, t_1 и v_2, p_2, t_2 величины, относящіяся къ двумъ различнымъ, произвольнымъ состояніямъ одного и того же количества газа. Охладимъ газъ въ обоихъ случаяхъ до 0° безъ измѣненія давленія; тогда получаемъ два новыхъ состоянія:

$$\frac{v_1}{1+\alpha t_1}, p_1, 0^\circ \quad \text{и} \quad \frac{v_2}{1+\alpha t_2}, p_2, 0^\circ,$$

гдѣ $\alpha = \frac{1}{273}$ коэффициентъ расширенія газа. Температура въ этихъ двухъ состояніяхъ одинакова, слѣд. по закону Б.-М. имѣемъ

$$\frac{v_1 p_1}{1+\alpha t_1} = \frac{v_2 p_2}{1+\alpha t_2}.$$

1 атм. равнѣтъ $\frac{1,294}{14,44}$ гр. Отсюда давленіе p двухъ граммовъ водорода при 0°, занимающихъ объемъ одного литра.

$$p = 2 : \frac{1,294}{14,44} = \frac{28,88}{1,294} = 22,24 \text{ атм.}$$

Очевидно это и есть давленіе граммъ-молекулы всякаго газа, имѣющей при 0° объемъ $v = 1$ литру. Имѣемъ $p = 22,24$, $v = 1$, $T = 273$ и слѣд.

$$R = \frac{pv}{T} = \frac{22,24}{273} = 0,0815$$

слѣд. уравненіе Клапейрона

$$\left. \begin{aligned} pv &= 0,0815 T \\ (\text{граммъ-молекула, литры, атмосферы.}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

§ 10. Формула van der Waals'a (1879). Разсмотрѣнные выше опыты показываютъ, что газы далеко не слѣдуютъ съ точностью законамъ Б. М. и Г. Л., и что поэтому формула (5) Клапейрона не можетъ для нихъ выразить истиннаго соотношенія между p , v и T . Было предложено много различныхъ поправокъ формулы Клапейрона, т.-е. болѣе сложныхъ уравненій состоянія для реально существующихъ газовъ. Одно изъ самыхъ извѣстныхъ выражается формулою van der Waals'a. Она имѣетъ слѣдующій видъ

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \dots \dots \dots (9)$$

гдѣ a и b двѣ постоянныя, различныя для различныхъ газовъ.

Физическое ихъ значеніе слѣдующее. Мы видѣли (стр. 34), что давленіе газовъ объясняется ударами частицъ, падающихъ на стѣнки, ограничивающія объемъ газа. Въ главѣ VI мы покажемъ, какъ формула $pv = RT$ выводится, если допустить, что молекулы газа суть точки и что между ними нѣтъ слѣженія. Однако молекулы занимаютъ нѣкоторый объемъ β , такъ что свободный для ихъ движенія объемъ оказывается уменьшеннымъ; вслѣдствіе этого онѣ чаще будутъ ударяться о перегородку и упругость p будетъ больше $\frac{RT}{v}$. van der Waalsъ показалъ, что p должно въ этомъ случаѣ равняться $\frac{RT}{v-b}$; гдѣ $b = 4\beta$, т.-е. b равно четырехкратному объему, занимаемому молекулами газа.

Слѣженіе уменьшаетъ давленіе, ибо частицы, находящіяся около перегородки, какъ бы притягиваются во внутрь массы газа и это уменьшаетъ силу ихъ ударовъ. Уменьшеніе p должно быть пропорціонально числу ударяющихся частицъ и числу частицъ, притягивающихъ первыхъ во внутрь газа, т.-е. оно должно быть пропорціонально квадрату плотности D газа или обратно пропорціонально квадрату объема v . Такимъ образомъ получается

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \dots \dots \dots (10)$$

что и приводится къ виду (9). Формула v. d. Waals'a можетъ быть написана въ видѣ

$$p v = RT \left(\frac{a}{v} + \left(\frac{ab}{v^2} + b p \right) \right) \quad (11)$$

Эта формула вполне выражаетъ результаты опытовъ: съ увеличеніемъ p объемъ v уменьшается и вся правая часть сперва уменьшается, достигаетъ минимума, когда $\frac{a}{v} = 2 \frac{ab}{v^2} + b p$ и затѣмъ опять увеличивается. Для CH_4 Baup'es (1880) нашелъ замѣчательное согласіе съ формулою (9); такое же согласіе нашли Roth и другие для CO_2 , SO_2 , NH_3 и для воздуха. Численные значенія для коэффициентовъ a и b вычисляются на основаніи наблюденій.

Если за единицу давленія принять давленіе въ 1 м. ртутнаго столба и за единицу объема—объемъ 1 кгр. газа при 0° и давленіи въ 1 м., то для a и b получаютъ слѣдующія численные значенія изъ опытовъ Regnault

	a	b
Воздухъ	0,0037	0,0026
CO_2	0,0115	0,003
H	0	0,00069

Принимая за единицу давленія 1 атмосферу, и объемъ 1 кгр. газа при 0° и при единицѣ давленія за единицу объема, Roth находитъ такія числа

	a	b
CO_2	0,00874	0,0023 при $18^\circ,5$
		0,0027 » $49^\circ,5$
		0,0029 » $99^\circ,6$ и $183^\circ,8$
SO_2	0,03002	0,0062 » $58^\circ,0$
		0,0094 » $96^\circ,6$
		0,0084 » $183^\circ,2$
NH_3	0,0169	0,00602 » $46^\circ,6$
		0,00631 » $99^\circ,6$ и 183°
		0,00698 » 18°
C_2H_4	0,0142	0,00666 » $50^\circ,2$
		0,00608 » $99^\circ,6$
		0,00587 » $182^\circ,8$

§ 11. Формулы Clausius'a и Regnault. Clausius предложилъ, какъ уравненіе состоянія газовъ, формулу

$$\left[p + \frac{a}{v(v+b)} \right] (v-b) = RT \quad (12)$$

содержащую три постоянныхъ a , b и β и выражающую, что т. наз. внутреннее давленіе β , которое по v. d. Waals'у равно $\frac{a}{v^2}$, зависитъ отъ

температуры T и находится въ болѣе сложной зависимости отъ объема v .
Формула (12) можетъ быть приведена къ виду

$$\frac{p}{RT} = \frac{1}{1-b} - \frac{a}{RT^2(c+2v^2)}$$

Впослѣдствіи Clausius предложилъ еще болѣе сложную формулу, содержащую уже 5 постоянныхъ:

$$\frac{p}{RT} = \frac{1}{1-b} - \frac{A}{T} - \frac{B}{T^2} - \frac{C}{T^3} - \frac{D}{T^4} \quad (13)$$

Изъ множества другихъ формулъ упомянемъ только данную Regnault и приведенную выше, см. (2) § 3 стр. 354. Такъ какъ эту послѣднюю можно привести къ виду

$$pv = (1 + A + B) - \frac{A}{v} + \frac{2B}{v^2} + \frac{B}{v^3},$$

а въ послѣднемъ членѣ формулы (11) в. d. Waals'a можно вмѣсто bp написать $\frac{b^2}{v}$, то ясно, что формулы Regnault и в. d. Waals'a не отличаются существенно другъ отъ друга.

Формулы Clausius'a и многихъ другихъ не имѣютъ существенныхъ преимуществъ передъ знаменитою формулою в. d. Waals'a.

Л И Т Е Р А Т У Р А.

- Bouley*. Nova experimenta physico-mechanica de vi aeris elastica. London. 1662.
Mariotte. De la nature de l'air. 1679.
Orstedt and Steendsen. Edimb. Journ. of science. IV, p. 224. 1826.
Depretz. Ann. ch. et phys. (2) 34, p. 335 и 443, 1827. C. R. 14, p. 239; 21 p. 216.
Arago et Dulong. Mem. de l'Acad. Fr. 10, p. 193, 1831; Ann. ch. et phys. (2) 43, p. 74, 1830.
Pouillet. Elements de Phys. I p. 327 (4-е изд.).
Regnault. Mem. de l'Institut. 21 p. 329, 1847; 26 p. 229, 1862.
Jochmann. Schloemilch's Ztschr. 5 p. 106, 1860.
Schroeder v. d. Kolk. Pogg. Ann. 116 p. 429, 1862; 126 p. 333, 1865.
Natterer. Wien. Ber. 5 p. 351, 1850; 6 p. 557, 1850; 12 p. 190, 1854; Pogg. Ann. 62 p. 189; 94 p. 436.
Caillaud. C. R. 70 p. 1131; 83 p. 1211; 84 p. 82; 88 p. 61; Ann. chim. et phys. (5) 19 p. 386.
Amagat. C. R. 68 p. 1170; 71 p. 67; 73 p. 183, 87 p. 432, 88 p. 336; 89 p. 437.
Ann. ch. et phys. (4) 28 p. 274; 29 p. 246, (5) 8 p. 270; 19 p. 345, 22 p. 353; 23 p. 353
 28 p. 480, (6) 29 p. 68, 1893.
A. Leduc. C. R. 123 p. 743, 1896.
Winkelmann. W. A. 5 p. 92; J. de phys. (2) 8 p. 183, 1880.
Roth. W. A. 11 p. 1, 1880.
Sijgestraem. Pogg. Ann. 151 p. 451 и 573, 1874; Chem. Ber. 8 p. 576.
Менделѣевъ и Курнатовъ. Bull. de l'Acad. de St. Petersburg. 1) и 21. 1874; Ann. chim. et phys. (5) 2 p. 427; 9 p. 111. Объ упругости газовъ. Спб. 1875.
Fuchs. Wied. Ann. 35 p. 430, 1888.

Van der Waals. Ueber die Continuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes (перев. съ голландск.) 1873.

Clausius. Wied. Ann. 9 p. 337, 1880; 14 p. 701, 1881.

Baynes. Nature (англ.) 22 p. 186.

Andriess. Phil. Trans. 1869, Ann. ch. et phys. (4) 21 p. 208, 1870.

V. Luba. C. R. 111 p. 819, 1890; C. R. 112 p. 426, 1891.

A. Witkowski. Extraits du Bullet. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, Mai 1891 p. 181.

E. Boly and W. Ramsay. Phil. Mag. (5) 37 p. 301, 1894.

C. Bohr. W. A. 27 p. 459, 1886.

К. Кривича. Новая метода изслѣдованія упругости газовъ. Ж. Ф. Х. О. 14 p. 395, 1892. Другія статьи объ упругости газовъ. Ж. Ф. Х. О. 16 p. 307, 1884, 17 p. 335, 1885.

Н. Н. Шмалеръ. Уравненіе состоянія газовъ. Ж. Ф. Х. О. 22 p. 110, 1890.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Барометры, манометры и насосы

§ 1. Атмосферное давленіе. Нормальнымъ считается атмосферное давленіе, равное давленію ртутнаго столба въ 760 мм. высоты при 0° на уровнѣ моря и на широтѣ 45°. Такъ какъ въскъ куб. сантим. ртути при 0° равенъ 13,596 гр., то это нормальное давленіе равно 1,0333 килоср. на кв. сантим. Если его выразить въ динахъ (стр. 77), то получается 1,013622 метадина на кв. сантим. Близость этого числа къ единицѣ привела къ предложенію вообще измѣрять атмосферное давленіе въ метадинахъ на кв. сантим. и за нормальное считать давленіе въ 1 метадина на кв. мм.

Строго говоря, всякая мѣстность на земномъ шарѣ имѣетъ свое нормальное давленіе, равное среднему давленію за большой промежутокъ времени (нѣсколько лѣтъ). Въ этомъ смыслѣ нормальное давленіе на вершинѣ Монблана равно 420 мм.

Приборы, служащіе для измѣренія атмосфернаго давленія, называются барометрами. Барометры бываютъ ртутные, глицериновые, нефтяные, водяные и т. д., металлическіе и т. д.

§ 2. Ртутный барометръ. Отличаютъ ртутные барометры съ чашечкой, сифонные и вѣсовые. Не останавливаемся на способахъ изготовленія барометра, въ особенности наполненія его чистотою ртутью, не содержащей воздуха.

На рис. 214 изображенъ барометръ съ чашечкой *E*, служащей резервуаромъ ртути. въ нее погруженъ нижній конецъ трубки *ABCE*, содержащей ртуть надъ которой находится т. наз. Торричеллева пустота. Верхняя часть *AB* трубки отдѣльно изображена на рис. 215: она дѣлается болѣе широкою для уменьшенія волюности (Отдѣлъ пятый. глава V. § 4), которая дѣйствуетъ на ртутный столбъ, какъ давленіе сверху внизъ, и заставляетъ тѣмъ болѣе понижаться верхній уровень ртути, чѣмъ тоньше трубка. Рядомъ съ трубкой находится латунная линейка, на высеребрянной верхней части которой начерчена шкала, причемъ нуль этой шкалы, еслибы она была продолжена внизъ, пришелся бы въ концѣ острія, прикрѣпленнаго

къ низшему концу линейки. Помощью зубчатого колесика снабженного оловком *F* и небольшой шестерни, можно поднимать или опускать шкалу такъ, что остріе коснется поверхности ртути въ чашкѣ *E*; этого легко достигнуть наблюдая изображение острія во ртути. Остріе иногда замѣняется поплавкомъ съ горизонтальною чертою, которая должна приходиться по высотѣ другой черты, проведенной на нижнемъ продолжении (иногда крестинномъ) латунной полосы. Параллельно шкалѣ передвигается нонасъ *V*, съ которымъ связаны двѣ призмы, *D*, вилосообразно обхватывающія трубку *AB*; обращенныя вверхъ ребра этихъ призмъ лежатъ въ одной плоскости, горизонтальной, когда барометрическая трубка вертикальна и проходящая черезъ нулевое дѣленіе нонасса. При отчетѣ барометра лѣбдуетъ сперва установить шкалу, какъ сказано выше, а затѣмъ нонасъ такъ, чтобы эта плоскость сверху касалась ртутнаго мениска.

Рис. 214.

Иногда шкалу вычерчиваютъ не на латуни, но на стекляннйной плоскѣ *CADB* (рис. 216), половина (*AB*) которой покрыта амальгамой и служитъ зеркаломъ. Въ этомъ зеркалѣ наблюдатель видитъ изображение своего глаза. Чтобы отчетъ, сдѣлать помѣстить олову на такой высотѣ, чтобы дѣленіе шкалы, ближайшее къ вершинѣ ртутнаго мениска, дѣлало пополамъ изображение зрачка наблюдателя. Другой способъ отчета такоу показанъ на рис. 217, трубка барометра окружена латунной трубкой на которой начерчены и нонасъ (съ правой стороны дѣлення 1 до 20); въ трубкѣ сдѣланы, другъ противъ друга, два вырѣза, дающіе возможность видѣть верхній конецъ ртутнаго столба. Горизонтальная плоскость, проходящая черезъ верхніе края вырѣзовъ, должна касаться ртутнаго мениска.

Указаннымъ способомъ дѣлается отчетъ въ переносномъ барометрѣ Fortin'a, изображенномъ на рис. 218 въ томъ положеніи, въ которомъ онъ устанавливается при наблюденьяхъ, на рис. 219 изображены разрѣзы его нижней части, замѣняющей чашечку. Она закрыта со всѣхъ сторонъ, уровень ртути приводится передъ каждымъ наблюденьемъ къ одной и той же высотѣ, а именно до соприкосновенья съ нѣжнымъ остриемъ *A* костяного стерженька. Дно сосуда, содержащаго ртуть, представляетъ мѣшочекъ изъ замши, который можно поднимать и опускать, вращая винтъ *Q*. Около *BB* находится замшевое кольцо, плотно обхватывающее суженную часть стеклянной трубки. Это кольцо не дастъ ртути вытечь, когда она при перевозкѣ изволяетъ сосудъ до верха, но пропускаетъ воздухъ такъ, что давленіе на ртуть всегда равно вѣншему атмосферному давленію. Ноль шкалы находится у острія *A*. Когда приходится перевозить барометръ Fortin'a, вращаютъ винтъ *Q* такъ, чтобы замшевое мѣшочекъ поднялся. Весь воздухъ, находящійся внутри сосуда надъ ртутью, выйдетъ черезъ замшевое кольцо; ртуть сперва наполнитъ сосудъ и затѣмъ поднимется въ трубкѣ, заполняя бывшую надъ нею Торричеллиеву пустоту,



Когда вся трубка наполнена ртутью, то лицо, вращающее винтъ φ , почувствуетъ сопротивленіе дальнѣйшему вращенію и тогда барометръ можно безопасно перевозить въ любомъ положеніи.

Въ сифонныхъ барометрахъ ртуть находится въ двухъ, параллельно другъ другу расположенныхъ коѣнахъ трубки, напоминающей перевернутый сифонъ; короткое коѣно сообщается съ вѣтвинимъ воздухомъ. Измѣряется разность высотъ ртути въ двухъ коѣнахъ, которыя должны имѣть одинаковую ширину, чтобы волосность произвела одинаковое давленіе на обѣ поверхности ртути, вследствие чего ея вліяніе уничтожается. На

Рис. 215.

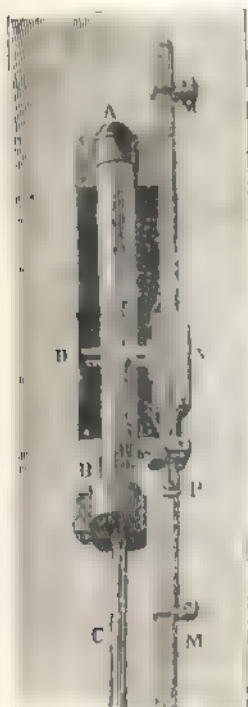


Рис. 216.

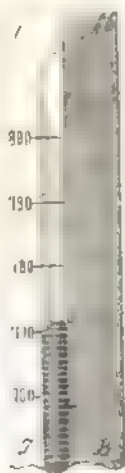


Рис. 217.



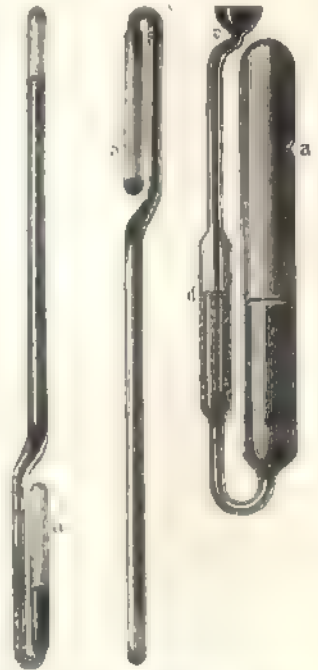
рис. 220 изображенъ стѣна сифонный барометръ Gay-Lussac'a (шкала не изображена), короткая трубка сверху также закрыта, но сбоку въ a оставлено небольшое отверстіе для доступа воздуха. Въ серединѣ изображенъ тотъ же барометръ въ положеніи, удобномъ для перевозки; ртуть не вытекаетъ изъ узкаго канала, находящагося на шпалемъ (при обыкновенномъ положеніи) концѣ длинной трубки. Чтобы воздуху не дать возможность проникнуть въ пустоту, Buntzen предложилъ длинную часть барометра оканчивавать волосною трубкою, доходящей почти до нижняго конца расширенной части d (на рис. 220 изображена съ правой стороны только нижняя часть барометра) въ которой и остается воздухъ, проникшии черезъ нижній изгибъ сифоннаго барометра.

Къ сифоннымъ относится и барометръ Вильда-Фюсса (Wild-Fuess), нынѣ весьма распространенный въ Россіи и за границей. Онъ изображенъ на рис. 221, слѣва верхняя часть, справа нижняя въ увеличенномъ масштабѣ. Цилиндръ *C* наполненъ ртутью: она снизу поддерживается кожанымъ мышечкомъ, который можно поднимать и опускать вращеніемъ винта *G*. Въ цилиндръ входятъ двѣ трубки: широкая *B*, оканчивающаяся расширеніемъ *O*, отдѣленнымъ впрочемъ особой перегородкой (нѣсколько выше *S*), и узкая трубка *A*, расположенная сбоку; перегородка расширяется *O* въ которое она впаяна она изгибается и затѣмъ дѣлается одинаковой

Рис. 218.

Рис. 219.

Рис. 220.



ширины съ трубою *B*; эта послѣдняя имѣетъ боковое отверстіе, которое можетъ быть закрыто колпачкомъ *S*, отлѣпно изображеннымъ сбоку. На внѣшней латунной трубкѣ нанесено дѣленіе, нуль котораго находится внизу. При отчетѣ барометра приеѣздить (сначала уровень ртути въ трубкѣ *B* до высоты виднаго края маленькой пластинки, на которой проведены три черты, служащія для правильной установки самой пластинки, тогда уровень ртути въ *B* находится на высотѣ нулевого дѣленія шкалы. Затѣмъ перемѣняютъ кольцо *N* вверхъ или внизъ, устанавливая его такъ, чтобы край *N* прорѣза находился на высотѣ уровня мениска ртути, и дѣлають отчетъ по нонусу. Когда приходится перевозить барометръ съ ртути, то закрываютъ *G*, пока ртуть не наполнитъ трубки *A* до верху и трубки *B* до бокового отверстія, которое затѣмъ закрываютъ навинчиваніемъ колпачка *S*.

Вѣсовой барометръ изображёнъ на рис. 222; его трубка подвѣшена къ одному изъ концовъ коромысла вѣсовыхъ. Давленіе на точку *A* опредѣляется вѣсомъ всей ртути, находящейся надъ уровнемъ *BB*, если конечно, не считать вѣса стеклянной трубки и верней металлической оправы. Измѣненія давленія воздуха обнаруживаются или измѣненіемъ груза, который на другомъ концѣ коромысла необходимъ для его уравновѣшиванія, или величиною измѣняющагося наклона этого коромысла. Принципъ вѣсового барометра применяется главнымъ образомъ въ барографахъ (см. § 5).

Рис. 221.



§ 3. Установка барометра и поправки при отчетѣ. Чтобы барометръ давалъ правильныя показанія, необходимо имѣть въ виду слѣдующія обстоятельства:

1. Трубка должна быть настолько широка, чтобы возможность не могла имѣть вреднаго вліянія.

2. Ртуть должна быть совершенно чиста.

3. Въ такъ называемой Торричеллиевой пустотѣ не должно заключаться и слѣда воздуха.

4. Барометръ (точнѣе его шкала) долженъ быть установленъ строго вертикально.

5. Шкала должна быть вполнѣ точна или должны быть извѣстны для нея поправки при 0°, полученные черезъ сравненіе съ нормальнымъ масштабомъ.

6. Чтобы преодолѣть нѣкоторую инертность ртути полезно весь ртутный столбъ передъ отчетомъ привести въ движеніе. Когда сдѣланъ отчетъ, т.-е. опредѣлено вертикальное разстояніе *H* двухъ уровней ртути въ дѣльных шкалахъ на данномъ мѣстѣ и при температурѣ *t*°, то слѣдуетъ ввести рядъ поправокъ, чтобы получить мѣру атмосфернаго давленія въ миллиметрахъ ртутнаго столба при 0°, широтѣ 45° и уровнѣ океана. Эти поправки суть слѣдующія:

I. Приведеніе ртутнаго столба къ 0°. Коэффициентъ объемнаго расширенія ртути равенъ

$\beta = 0,000181$; таковъ-же коэффициентъ измѣненія плотности ртути и измѣненія высоты ртутнаго столба, произведеннаго на единицу площади своего основанія данное давленіе. Первая поправка дастъ вмѣсто *H* величину

$$H \frac{H}{1 + \beta t}.$$

II. Приведеніе шкалы къ 0°. Предполагается, что поправки-дѣлений шкалы при 0° извѣстны. Коэффициентъ расширенія шкалы обозначимъ черезъ γ ; для латуни $\gamma = 0,000019$, для стекла и для платины $\gamma = 0,000009$. Величье расширенія шкалы получается отчетъ съ шагомъ

малый. Вторая поправка будет $H = H(1 - \gamma t)$. Соединяя ее с первой, получаемъ

$$H_0 = \frac{H(1 + \gamma t)}{1 + \beta t} = H[1 - (\beta - \gamma)t] \dots (1)$$

Существуютъ готовые таблицы для величины $H(1 - \beta t)$ при различныхъ H и t для латвийной шкалы. При $H = 760$ мм. и $t = 20^\circ$ эта поправка равна 2,46 мм., при стеклянной шкалѣ 2,60 мм., эту поправку слѣдуетъ вычесть изъ наблюденнаго H , когда $t > 0^\circ$.

III. Поправка на депрессию (пониженіе) ртути, вызванную капиллярностью. Эта поправка зависитъ отъ ширины трубки (отъ высоты мениска), въ сифонныхъ барометрахъ ширина трубки можетъ быть и не одинаково въ двухъ концахъ. Эта поправка также приносится въ таблицы и ее можно вообще пренебречь, когда ширина трубки не менѣе 16 мм.

IV. Поправка на изменение силы тяжести съ высотой и широтой мѣста. Соединяя вис. (22) стр. (332) имѣемъ

$$H_1 = H(1 - 0,00259 \cos 2\varphi - 0,00000000314 h) \dots (2)$$

гдѣ φ широта мѣста, h его высота въ метрахъ надъ поверхностью земли. Если наблюдени произойдетъ на экваторѣ, то число 314 замѣняется числомъ 196. Поправка на широту равна приблизительно 2 мм. на полюсахъ и на экваторѣ въ Петербургѣ она около 1 мм.

V. Поправка на различіе ртутныхъ паровъ. Это величина, которая при 20° составляетъ 0,02 мм., при $40^\circ = 0,03$ мм.

VI. Поправка на уровень моря. Эта поправка не слѣдуетъ вносить, когда требуется знать величину атмосфернаго давления въ данномъ мѣстѣ. Если требуется метеографич., когда требуется сформировать давленія въ различныхъ мѣстахъ обширной области. Она вычисляется по тригонометрическимъ формуламъ, связывающимъ давление съ высотой надъ уровнемъ океана.

Барометръ въ которомъ съ величайшею точностью приняты все мѣры для получения величины атмосфернаго давленія съ крѣпкою точностью, называется нормальнымъ барометромъ. Два такихъ барометра устроены напр. въ Главной Физической Обсерваторіи въ Петербургѣ, одинъ находится въ Константиновской обсерваторіи въ Павловскѣ и одинъ въ Главной Метрол. Мѣри и Вѣсовъ въ Петербургѣ.

§ 4 Барометры съ другими жидкостями и барометры металлические. Для увеличения чувствительности барометра замѣняютъ ртуть водою или спиртомъ. Барометръ съ спиртовымъ имѣетъ высоту въ 8,22 метра и слѣдуетъ отъчитать въ 10 разъ чувствительнѣе барометра ртутнаго.

Барометръ сѣмьязычный изображенъ на рис. 223 часть h_{ac} барометра на

Рис. 222.



ртутью, часть *dc* водою. Поистинно, что измѣненія уровней *eb* и *c* вызовутъ увеличенныя перемѣщенія водяного столба въ тонкой трубкѣ *d*.

Д. П. Менделѣевъ построилъ весьма чувствительный нефтяной дифференціальныи или относительный барометръ, дающій возможность измѣрять разность давленій въ двухъ точкахъ, вертикальное разстоянiе которыхъ не болѣе 1 метра. Двѣ интересныя формы нефтяного барометра предложилъ Н. Рейнботъ.

Рис. 223.



На рис. 224 изображенъ металлическiй барометръ Bourdon'a. Главная его часть металлическая, изогнутая тонкостѣнная трубка *СВ* съ эллиптическимъ сѣчениемъ, закрученная въ *Д*; изъ нея выкачанъ воздухъ. При увеличеннiи или уменьшеннiи вѣшняго давленія концы *С* и *В* соответственно сближаются или расходятся, эти движенiя передаются концамъ стрѣлечка *DE*, соединеннаго съ дугою, снабженною зубчиками, которые сдѣланы съ маленькимъ зубчатымъ колесомъ *G*, къ этому колесу прикреплена стрѣлка *HI*. Шкала наносится путемъ сравненiя показанiй прибора съ показанiями ртутнаго барометра.

Въ т. наз. anerоидахъ *Vid.* усовершенствованныхъ *Breguet*омъ трубка замѣнена крутой металлической коробкой, изъ которой выкачанъ воздухъ. Изогнутое дно коробки выгибается или вдавливается когда мѣняется вѣшнее давленiе. Рычагоиъ и цѣпочкѣй передаетъ движенiя этого дна стрѣлкѣ.

§ 5. Барографъ. Приборы самопишуще, болѣе или менѣе непрерывно записывающе измѣненiя атмосфернаго давленiя, называются барографами. Существуютъ ртутные барографы, въ которыхъ движенiя поплавка находящагося въ открытомъ колѣнѣ сифоннаго барометра, передаются довольно сложнымъ механизмомъ карандашу, который перемѣщается влѣво или вправо, касаясь бумаги, движущейся сверху внизъ. Вѣсовой барометръ (стр. 368) можетъ служить для устройства барографа, пишущее острие находится на концѣ длинной стрѣлки, прикрепленной къ коромыслу вѣсиль. Такой барографъ находится въ Константиновской обсерваторiи въ Царскоселѣ.

Весьма распространенъ барографъ *Richard'a*, изображенный на рис. 225. Его главная часть состоитъ изъ ряда наложенныхъ другъ на друга коробокъ, по устройству напоминающихъ коробку anerоида. Верхняя крышка послѣдней коробки перемѣщается довольно значительно, когда мѣняется величина атмосфернаго давленiя. Движенiя передаются помощью системы рычагоиъ остроио карандашу или перу, перемѣщающемуся вверхъ и внизъ и чертящему кривую линiю на поверхности равногѣрно вращающагося цилиндра, покрытаго разграфленой бумагой. Изъ рисунка понятно, какимъ образомъ отмѣчается время и величина давленiя. Когда цилиндръ, приводимый въ движенiе особымъ часовымъ механизмомъ, сдѣлаетъ одинъ полный оборотъ, то слѣдуетъ снять съ его поверхности бумагу и замѣнить ее

повою. Замѣчательный по своей чувствительности вѣсовой барографъ былъ устроенъ К. Краевичемъ.

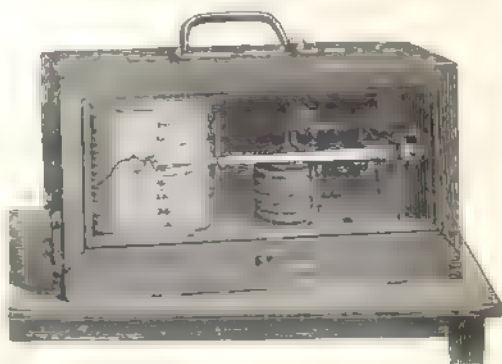
§ 6. Пределы измѣненія барометрическаго давленія. Мы не затрогиваемъ двухъ вопросовъ, какъ не отъносящихся непосредственно къ курсу физики: вопроса о причинахъ колебаній атмосфернаго давленія и вопроса о примѣненіи барометра къ измѣренію высотъ (линеометрія). Первый изъ этихъ вопросовъ разсматривается въ метеорологіи, второй въ геодезіи.

Ограничиваемся указаніемъ на пределы, въ которыхъ колеблется атмосферное давленіе въ нѣкоторыхъ мѣстахъ Россіи; это интересно въ виду

Рис. 224.



Рис. 225.



зависимости точки кипѣнія жидкостей, въ особенности воды отъ вѣснаго давленія. Дѣшныя замѣтуемъ изъ статьи А. Тилло.

Мѣсто.	Число атм. наблюдень.	Наибольшее давленіе	Наименьшее давленіе.	Разност.
Архангельскъ.	40 лѣтъ	791.4 мм.	712.7 мм.	78.7 мм.
С.-Петербургъ.	55 »	797.5 »	712.6 »	84.9 »
Москва	55 »	795.8 »	724.9 »	70.9 »
Екатеринбургъ	55 »	796.8 »	725.8 »	71.0 »
Николаевъ	55 »	787.5 »	737.0 »	50.5 »
Тифлисъ	46 »	784.3 »	746.5 »	37.8 »
Богословскъ	55 »	794.8 »	711.3 »	83.5 »

§ 7. Манометры. Приборы, служащіе для измѣренія упругости газовъ и паровъ называются манометрами. (Въ нѣкоторыхъ изъ нихъ мы уже встрѣчались, напр. въ опытахъ Gailletet и Amagat (стр. 356).) Смотра по величинѣ измѣряемаго давленія употребляютъ манометры весьма различнаго устройства.

Для давленій весьма слабыхъ употребляютъ укороченный барометръ или бароманометръ: это U-образная трубка, одно коѣнцо которой, содержащее немного ртути, соединено съ изслѣдуемымъ пространствомъ, а другое до верха наполнено ртутью. При достаточно маломъ давленіи h ртуть

во второмъ коленѣ опускается и тогда h измѣряется разностью уровней ртути въ обоихъ коленяхъ. Такие манометры находятся при обыкновенныхъ воздушныхъ насосахъ.

Для давленій, немного отличающихся отъ атмосфернаго, употребляется открытый U -образная трубка, въ которую налита ртуть до половины колѣна. Измѣряемое давленіе $h = H - h$, гдѣ H давленіе атмосферное, h разность высотъ ртути въ коленяхъ трубки.

Для измѣренія весьма сильныхъ давленій можетъ служить манометръ Desgoutte'a изображенный на рис. 226, и представляющій какъ бы обращенный гидравлическій прессъ. Испытуемое давленіе поступаетъ черезъ трубку

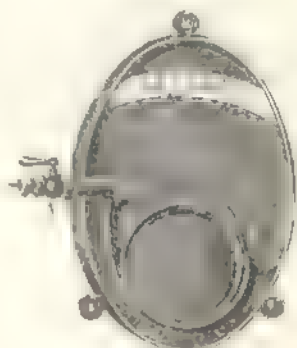
Рис. 226



Рис. 227.



Рис. 228



T на стальную тарелку P скрепленную съ подложкой и пластинкой D . Подъ D находится толстая каучуковая пластинка, вибрирующая закрывающая горло кельи манометра, содержащаго столбъ ртути, которая выдвигается въ открытое стекло кельи MN . Пусть h высота ртути въ MN , H измѣряемое давленіе, S площадь сѣчи шланга P , S' площадь пластинки D . Тогда $H = h \frac{S}{S'}$. Если $S = 100 S'$, то малое огромное давленіе измѣять сравнительно невысокимъ столбомъ ртути.

Для сильныхъ давленій можетъ служить закрытый манометръ вроде того, которымъ пользовался Савитти для измѣренія давленій въ уменьшенно объемахъ, которыхъ и не было бы измѣряемого давленія. Для сохраненія одинаковой чувствительности и при сильнѣ сильныхъ давленіяхъ сдѣланы трубки въ эи закрытому концу. Такой манометръ изображенъ на рис. 227. Числа обозначаютъ давленіе въ атмосферахъ.

Весьма распространенъ метастатическій манометръ Bourdon'a.

опорными на таль ле. Принимая за единицу барометр (стр. 370). Ось изогнута на рис. 228. Изогнутая латунная трубка *BC* снабжена на закрытом конце стрелкою *CD*; открытый конец соединен через трубку *A* с исследуемым газом, с исследуемым пространством. Чем сильнее давление в этом пространстве, тем больше трубка *BC* распрямляется, причем конец *D* стрелки перемещается вдоль шкалы деления которой нанесены по сравнению с нормальным, или другим, давлением.

Рис. 229

Рис. 229

§ 8. Рутовые насосы. Устройства обыкновенных выкачивающих и нагнетательных насосов не входят изъ начального курса физики. Рассмотрим устройство и действие рутовых насосовъ, получившихъ въ настоящее время весьма широкое примѣненіе.

На рис. 229 изображен один из видов ртутного насоса. Большой горизонтальный сосуд *A* соединен при помощи каучуковой трубки с сосудом *C'*, который при помощи цѣпи *PQ*, раздѣлѣнной на кольца, и рукоятки *M* можетъ быть приподнятъ выше точки *p* и опущенъ до положения показаннаго на рисункѣ. Трубка *T* и сосудъ *C'* содержатъ ртуть. Пространство, изъ котораго можно выкачать воздухъ, соединяется съ концомъ *a* трубки *atq*. На пути этой трубки находятся расширенныя части *U* и *K*. *U* содержитъ термометръ, позволяющій точно измерять температуру воздуха, дающаго возможность судить о степени достигнутой разряженности. Въ расширеніи *K* находится стеклянная подвижная часть *S*, не допускающая ртуть проникать выше *K*. ея верхняя, плавно отогнувшаяся часть ввертѣть закрываетъ верхнее отверстіе расширенія *K*, когда поступающій черезъ *qt* газъ поднимается ее вверхъ. Дѣль трубки *pq* и *qr* соединяется трубка *at* съ сосудомъ *A*, отъ котораго идетъ еще трубка *ss'*, черезъ которую выгоняется выкачанный газъ, который можно обжигать въ цилиндрѣ *E*.

Поднимаем, что сначала въ a и A имѣемъ атмосферное давленіе. Поднимаемъ C тогда ртуть поднимается по T и дойдя до q прекращаетъ сообщеніе между A и a ; дойдя до t , она подниметъ поплавокъ S и закроетъ верхнее стѣченіе расширенія K . Заполняя весь сосудъ A и трубку qr , она выгонитъ весь воздухъ черезъ ss . Затѣмъ опускаемъ C , когда ртуть въ Ktr понизится до q то возобновится соединеніе между a и A , ртуть понизится до нѣкотораго мѣста въ трубѣ T и въ A перейдетъ часть воздуха (или другаго газа) изъ разрежаемаго пространства. При новомъ поднятіи C ртуть вновь сперва прерветъ въ q сообщеніе между A и a и затѣмъ

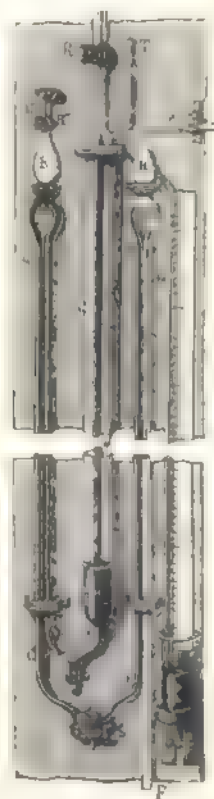
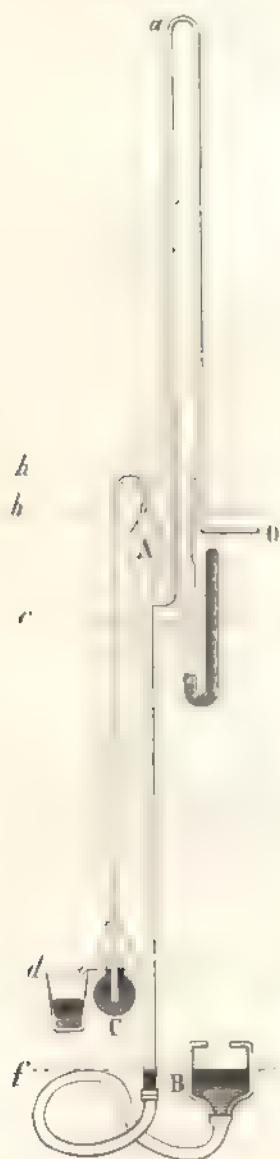


выгнать весь перешедший въ *A* газъ черезъ трубку *ss*. Повторяя подниманіе и опусканіе сосуда *C* можно достигъ высокой степени разряженія.

Рис. 230.

Рис. 231.

Рис. 232.



На рис. 230 изображенъ насосъ Д. И. Менделѣева. Отъ резервуара *A* идетъ внизъ трубка, нижній конецъ которой соединенъ при помощи каучуковой трубки съ сосудомъ *B*, содержащимъ ртуть. Тонкая трубка идетъ отъ верхней части резервуара *A* и оканчивается внутри ртуті, содержа-

щейся въ C . Наконецъ трубка aO соединяетъ резервуаръ A съ тѣмъ пространствомъ, изъ котораго желаютъ выкачать воздухъ. Къ исходящей трубкѣ aO прицѣпленъ манометръ; $bd = 780$ мм. и $ef = 760$ мм. Когда резервуаръ B достаточно поднять, то ртуть заполняетъ резервуаръ A , выгоняя воздухъ черезъ C , куда переливается и часть ртути, причемъ она изъ избытка, перешедши въ d , отъ времени до времени переливается обратно въ B . Если понижать сосудъ B , то воздухъ черезъ Oa переходитъ изъ разрежаемаго пространства въ резервуаръ A и затѣмъ выгоняется въ C , причемъ ртуть въ трубкѣ a поднимается на высоту, соответствующую достигнутому разреженію.

Насосъ Sprengel'я, главная часть котораго изображена на рис. 231, основанъ на совершенно другомъ началѣ именно на томъ, что отдѣльныя капли ртути, падающія внизъ по узкой трубкѣ, увлекаютъ съ собою попадающій между ними воздухъ. Сухая ртуть спускается изъ резервуара (или воронки) находящагося надъ R по узкой трубкѣ J оканчивающейся въ нижней части широкой трубки AaA , которая въ T сообщена съ вѣншимъ воздухомъ. Давле ртуть проходить трубки BB , CC и DD , послѣдняя въ верхней части сужена и соединена съ H , откуда трубка K ведетъ къ пространству, изъ котораго желаютъ выкачать воздухъ. Давле ртуть каплями выплываетъ черезъ длинную трубку FF ; края R и K служатъ для регулированія быстроты теченія ртути. Между каплями двумя каплями увлекается часть воздуха изъ H и такимъ образомъ достигается довольно быстро весьма высокая степень разреженія, которая измѣряется барометрической трубкой GG , соединенной съ H . Трубки AaA и T и пространство K служатъ для того, чтобы въ нихъ собирався весь воздухъ, могущій попасть черезъ R въ трубку J ; такимъ образомъ ртуть въ CC и DD уже не содержитъ воздуха. На рис. 232 изображена простая форма насоса Sprengel'я, ртуть наливается въ воронку A , а трубка F соединяется съ тѣмъ пространствомъ изъ котораго требуется выкачать воздухъ.

Существуютъ и водяные насосы, основанные на томъ же принципѣ.

Интересный ротационный ртутный насосъ построилъ Schulze-Berge.

Предѣлы разреженія, достигаемаго ртутнымъ насосомъ, опредѣляетъ Bessel-Hagen.

ЛИТЕРАТУРА.

Thurot. Note historique sur l'expérience de Torricelli. J. de phys (1) 1, p. 171 и вторая статья p. 267.

Torricelli и *Descartes*, письма къ разнымъ лицамъ.

Pascal. Expériences touchant le vide. Paris, 1647 и 1648.

Pascal. Traité de la pesanteur de la masse de l'air. 1663.

Wild. Repert. f. Meteorologie. 3, № 1, 1874.

Красовичъ. Rep. d. Phys. 23, p. 339, 1897; Ж. Ф.-Х. Общ. 9, стр. 319 1877; 13, стр. 337, 1881.

Н. Рейнбольтъ. Ж. Ф.-Х. О. 12 стр. 243, 1880.

К. Красовичъ (барометрографъ). Ж. Ф.-Х. О. 11 стр. 213, 1882.

А. Тилло. Метеор. Вѣстникъ. 1894, стр. 1.

Д. Дьяконовъ. Ж. Ф. Х. О. 14 стр. 476. 1882

Многo статей о барометрахъ встрѣчается въ *Ztschr. für Meteorologie*, въ *Ztschr. für Instr.-Kunde* и въ другихъ журналахъ.

F. Schütz-Berg (Ртутно-лунтпрумъ) *W. A.* 50, p. 368, 1893

J. H. Менделѣевъ (насосъ). *Ж. Ф. X.* Общ. 6, стр. 120, 1874.

A. Леринговъ (насосъ). *Ж. Ф. X.* Общ. 6, стр. 17, 1874

M. Рыбинъ (центробѣжный насосъ) *Ж. Ф. X.* Общ. 14, стр. 10, 1882

B. Кирпичниковъ (насосъ Теннера) *Ж. Ф. X.* Общ. 14 стр. 255, 1882

H. Уолленъ (насосъ Шпренгеля) *Ж. Ф. X.* Общ. 22 стр. 224, 1880

Bessel-Hagen. *W. A.* 12 p. 425, 1881.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Соприкосновеніе газовъ съ газами, жидкостями и твердыми тѣлами.

§ 1. Смѣси газовъ съ газами. Законъ Dalton'a. Если газы не дѣйствуютъ химически другъ на друга то они смѣшиваются во всякъ пропорціи и это смѣшеніе, какъ мы увидимъ впоследствии, происходитъ даже само собою, если соединить сосуды, содержащіе различные газы (глава VI § 4). Давленіе, производимое смѣсью газовъ, опредѣляется весьма простымъ закономъ Dalton'a: давленіе смѣси нѣсколькихъ газовъ равно суммѣ давленій ея составныхъ частей, т.-е. тѣмъ давленіямъ, которыя каждый изъ газовъ оказывалъ бы, если бы онъ одинъ занималъ объемъ, занимаемый смѣсью. Давленія отдѣльныхъ частей смѣси называются парціальными давленіями. Положимъ, что при одинаковой температурѣ t газы сперва отдѣльно занимали объемы v_1, \dots, v_3, \dots , при давленіяхъ p_1, p_2, p_3, \dots ; эти газы затѣмъ были смѣшаны при той же температурѣ t въ объемѣ V , въ которомъ они обладали бы парціальными давленіями $P_1 = \frac{p_1 v_1}{V}, P_2 = \frac{p_2 v_2}{V}, \dots$. Законъ Dalton'a гласитъ, что давленіе P смѣси равно

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

т.-е.,

$$P = \frac{p_1 v_1}{V} + \frac{p_2 v_2}{V} + \frac{p_3 v_3}{V} + \dots = \sum \frac{p_i v_i}{V} \quad (1)$$

или

$$PV = \sum p_i v_i \quad (2)$$

Законъ этотъ приближенный, какъ и законъ Бойля-Мариотта. Если при смѣшеніи не мѣнять объема, занимаемаго газами, т.-е. если $V = \sum v_i$ и если все p равны между собою, то (2) даетъ $P = p$, т.-е. при смѣшеніи не мѣняется давленіе. Это подтверждается опытомъ Berthollet, который соединилъ два шара, наполненные однимъ водородомъ, другой углекислымъ газомъ при давленіяхъ въ 1 атм.: смѣсь обладала тѣмъ же самымъ давленіемъ.

Когда все v равны между собою и равны V , то $P = \sum p$.

Формулу (1) можно переписать въ видѣ

$$V = \sum \frac{p}{P} v \dots \dots \dots (3)$$

обозначившемъ, что объемъ смеси равенъ суммѣ тѣхъ объемовъ, которые были бы заняты составными частями при давленіи P смеси.

Важнымъ вопросомъ въ отношеніи смеси газовъ къ закону Бойля-Мариотта при постоянномъ давленіи, еще мало разработанъ. Изъ опытовъ Regnault надъ смѣсью воздуха и CO показано, что для ней законы Dalton'a остаются вѣрными въ предѣлахъ отъ 1 до 2 атмосферъ. Однако позже Andrews и Cailletet нашли, что для тѣхъ же смесей газовъ существуетъ особый законъ измѣненія объема при обычныхъ давленіяхъ, который не можетъ быть выведенъ изъ законовъ аддитивности смѣсью составныхъ частей.

Не будучи въ состояніи изобразить законъ Dalton'a правильно, мы будемъ считать важнымъ указывать на эту особенность въ концѣ этой главы.

§ 2. Растворимость газовъ въ жидкостяхъ. Когда газъ находится въ соприкосновеніи съ жидкостью, то часть газа въ ней растворяется. Количество газа, могущее раствориться въ жидкости имѣетъ нѣкоторый предѣлъ: когда онъ достигнута, то мы говоримъ, что жидкость насыщена газомъ. Этотъ предѣлъ зависитъ отъ рода и объема жидкости, отъ рода и давленія газа, остающагося нераствореннымъ надъ жидкостью и отъ температуры: онъ достигается быстрее, если сильно встряхивать сосудъ, содержащій жидкость и газъ. Количество растворимаго газа определяется закономъ Henry.

Законъ Henry (1803): Количество газа, растворимаго при данной температурѣ въ единицѣ объема жидкости, пропорционально давленію газа, остающагося нераствореннымъ.

Пусть V объемъ жидкости, P давленіе оставшагося газа, Q въсовое количество раствореннаго газа, v объемъ, который занималъ бы этотъ газъ при давленіи P . Законъ Henry говоритъ, что

$$\frac{Q}{v} = kP \dots \dots \dots (4)$$

гдѣ k постоянное число, т.-е. зависящее уже только отъ рода газа и жидкости и отъ температуры. Но съ другой стороны Q пропорционально v и P , т.-е. можно положить

$$Q = k_1 v P \dots \dots \dots (5)$$

Сравнивая это съ $Q = kUP$, см. (4), и полагая $\frac{k}{k_1} = \alpha$, получаемъ

$$v = \alpha U \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ α новая постоянная. (6) показываетъ, что объемъ раствореннаго

газа не зависить отъ его давленія P , разумѣя тотъ объемъ, который онъ бы занялъ подъ давленіемъ P .

Величина

$$\alpha = \frac{v}{V} \dots \dots \dots (7)$$

т.е. отношеніе объема раствореннаго газа (при давленіи неразтвореннаго) къ объему жидкости есть величина постоянная при данной температурѣ, она называется коэффициентомъ растворимости данного газа въ данной жидкости.

Обозначимъ черезъ p упругость раствореннаго газа при занимаемомъ имъ объемѣ V ; имѣемъ $pV = Pr$, откуда $r = \frac{pV}{P}$, вставляя это въ (7), находимъ

$$\alpha = \frac{p}{P} \dots \dots \dots (8)$$

т.е. отношеніе упругости раствореннаго газа къ упругости неразтвореннаго есть величина постоянная при данной температурѣ, она также равна коэффициенту растворимости.

Если до растворенія газъ занималъ объемъ V при давленіи P а послѣ растворенія оставшаяся часть газа объемъ V при давленіи P , а растворенная заняла бы объемъ r при давленіи P то по закону Б.-М. имѣемъ, см. (6),

$$VP_1 = (V + r)P = VP + rP = VP + \alpha VP.$$

Отсюда коэффициентъ растворимости

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(V_1 \frac{P_1}{P} - V \right) \dots \dots \dots (9)$$

§ 3. Приборы, служащіе для изслѣдованія растворимости газовъ въ жидкостяхъ. Такие приборы называются абсорбциометрами. На рис. 233 изображенъ абсорбциометръ Вунсена. Стеклянная трубка e , снабженная дѣлениями и тщательно катодрированная, закрыта сверху, а внизу вѣдана въ винтовую нарезку b (см. справа отдѣльный рисунокъ), которой соответствуетъ гайка въ верхней изъ двухъ пластинокъ a ; нижняя пластинка a покрыта каучукомъ, такъ что, вращая трубку въ ту или другую сторону, можно нижній ея конецъ открыть или закрыть, плотно прижимая его къ каучуку. Если ее вставить въ цилиндръ g , то выступы cc (см. рисунокъ справа) входятъ въ боковыя углубленія, находящіеся внутри f , вслѣдствіе чего вращеніе трубки e не вызываетъ вращенія нижней оправы aa . Цилиндръ g наполняется водою, температура которой измѣряется термометромъ k ; внизу наливается немного ртути черезъ воронку r , а нижній край r служить для ея выпусканія.

Вѣдъ цилиндра g наполняютъ всю трубку e ртутью и надъ ртутною ванною впускаютъ въ нее объемъ V_1 газа; отмѣчаютъ его давленіе P_1 ,

затѣмъ впускають объемъ U жидкости и, закрывъ нижний конецъ, какъ показано выше, вставляютъ трубку во внутрь цилиндра q ; наконечъ закрываютъ пробку p , въ углубление которой упирается верхний конецъ трубки. Давле-
е и держаютъ весь приборъ такъ долго встряхиваніемъ, пока при открываніи
нижнего конца трубки уровень b ртути не перестанетъ подниматься, т.-е.
е прекратится дальнейшее раствореніе газа. Остается опредѣлить объемъ
 U оставшагося газа и давленіе P , подъ которымъ онъ находится. Давле-
е P легко найти, зная величину атмосфернаго давленія и высоты уровней

Рис. 233.

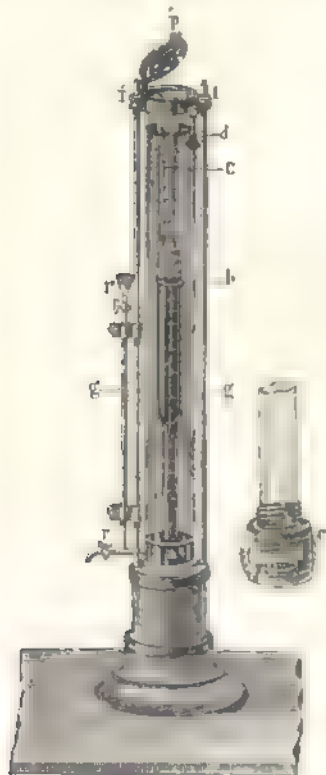
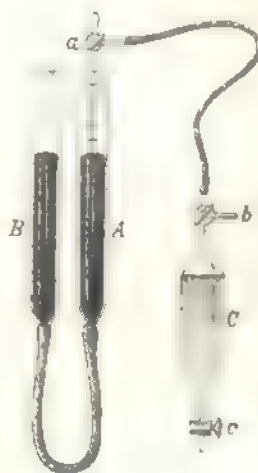


Рис. 234.



ртути въ a и b , воды въ d и взятой жидкости въ e . Зная V , V_1 , U , P_1 и P , находимъ α по формулѣ (9).

Гораздо болѣе простой приборъ изображенъ на рис. 234. Его устройство
видно изъ рисунка, достаточно прибавить, что C наполняется испы-
мой жидкостью, что трубка, идущая отъ a наверхъ, соединяется съ ре-
зервуаромъ испытываемаго газа и что въ a и налѣво отъ b находятся краны
трехъ каналов (\perp). Сперва ртуть наполняетъ всю калиброванную
часть A , а жидкость весь сосудъ C . Затѣмъ поворачиваютъ два крана
въ a и b , чтобы только соединительная трубка ab наполнилась газомъ, затѣмъ
открываютъ A съ резервуаромъ газа и, опуская B , заставляютъ въ A войти

объемъ c газа, причемъ уровень ртути въ A и B удерживается на одинаковой высотѣ; соединяють A съ C и выливаютъ черезъ c объемъ V' жидкости. Встряхиваютъ при закрытомъ краѣ b сосудъ C , пока уровень ртути въ A не перестанетъ подниматься и перемѣняютъ B такъ, чтобы уровень ртути въ A и B были на одинаковой высотѣ. Пусть c_1 объемъ газа, оставшагося въ сосудѣ A .

Если V емкость сосуда C , то объемъ V' жидкости равенъ $V' = V - V'$. Давления P и P' въ (9) равны между собою, и слѣд. (9) даетъ

$$\alpha = \frac{V_1 - V'}{V'}$$

$V_1 - V'$ есть неизмѣнный объемъ газа въ данномъ случаѣ; газъ сначала занимаетъ объемъ $c_1 + n$, гдѣ n емкость соединительной трубки; въ концѣ онъ занимаетъ объемъ $c_1 + n - V'$, а потому $V_1 - V'$ дѣйств. равно $c_1 - n$ (т. е. $c_1 + n - V_1 = c_1 - c_2 = V_2 - V_1$). Окончательно имѣемъ

$$\alpha = \frac{v_1 - v_2 - V_2}{V - V_2} \dots \dots \dots (10)$$

(v_1 и v_2 объемы газа въ A въ началѣ и въ концѣ V емкость сосуда C , V' объемъ выливаемой черезъ c жидкости).

§ 4. Результаты изслѣдованій растворимости газовъ въ жидкостяхъ.

Вунзен и его ученики произвели большой рядъ опредѣленій величинъ α для различныхъ жидкостей и газовъ. Оказывается, что α уменьшается съ повышениемъ температуры. Вотъ некоторыя числа α для растворимости въ водѣ:

t°	H	N	O	CO_2	SO_2	NH_3
0°	0.01930	0.02035	0.04114	1.7967	79.789	1050
10°	0.01930	0.01607	0.03250	1.1847	56.647	813
20°	0.01930	0.01403	0.02838	0.9014	39.374	654

При 70° для NH_3 имѣемъ $\alpha = 0$. Величина α вообще можетъ быть представлена эмпирической формулой вида

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_1 t + \alpha_2 t^2.$$

Числа перваго ряда и суть величинъ α . Оказывается, что для различныхъ газовъ отношеніе $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ есть величина мѣняющаяся въ довольно тѣсныхъ предѣлахъ (отъ нѣкотораго значенія до двоснаго) между тѣмъ какъ α измѣняется въ широкихъ предѣлахъ (какъ числа 1 до 4000). На это обстоятельство указать Э. Видеманъ.

Для растворимости въ алкогольѣ Вунзенъ нашелъ

H	$\alpha = 0.06925 - 0.0001487t + 0.000001t^2$
N	$\alpha = 0.126338 - 0.000418t + 0.000006t^2$
O	$\alpha = 0.2825$
CO_2	$\alpha = 4.32955 - 0.09395t + 0.00124t^2$
EO_2	$\alpha = 328.62 - 16.95t + 0.312t^2$

Растворимость хлора въ водѣ имѣть максимумъ при 8°. Въ литрѣ H_2O растворяется 49 куб. см. азота при 12° — 14 т.е. въ 2^й раза больше, чѣмъ азота.

Наименьшею растворимостью въ водѣ обладаетъ водородъ, а для него при 18°.2 равно 0,0073.

Слѣдуетъ замѣтить, что растворимость газовъ въ водѣ, содержащей растворенныя соли, меньше, чѣмъ въ водѣ чистой. Это же самое подтверждаетъ Кундт для растворимости хлора въ растворѣ поваренной соли и Штейнер для водорода въ растворахъ различныхъ солей.

При сильныхъ давленіяхъ и для хорошо растворимыхъ газовъ замѣчаются весьма сильныя отступленія отъ закона Генри. Такъ при 20 въ одномъ граммѣ воды растворяется мм.икъ при давленіи $h = 100$ мм. въ количествѣ $q = 0.158$ гр.; при $h = 200$ мм. имѣемъ $q = 0.232$ гр.; при $h = 500$ мм. — $q = 0.403$ гр., при $h = 1000$ мм. — $q = 0.613$ гр. и при $h = 2000$ мм. всего только $q = 0.992$ гр. Для CO_2 коэффициентъ α при постоянной температурѣ умножается, когда давленіе растетъ, какъ показываетъ Wroblewski (1882). При 0 и давленіи $p = 1$ атм. мы имѣли $\alpha = 1.797$; оказывается, что при $p = 5$ атм. — $\alpha = 1.730$, при $p = 10$ атм. — $\alpha = 1.666$ и в $p = 20$ атм. — $\alpha = 1.532$ и при $p = 30$ атм. — $\alpha = 1.424$.

Richard построилъ приборъ, при помощи котораго оказалось возможнымъ доказать, что въ водѣ, находящейся въ океанѣ на значительной глубинѣ и слѣдовательно подъ большимъ давленіемъ, растворяется такое же количество газа, какъ и въ поверхностныхъ слояхъ.

Объемъ жидкости при раствореніи въ ней газа увеличивается, плотность иногда увеличивается иногда уменьшается. Этимъ вопросомъ занимались Angström, Blumke Mackenzie, Nichols, Wheeler и др.

При раствореніи газовъ въ жидкостяхъ весьма часто выдѣляются больше тепла, чѣмъ при ихъ охлажденіи (скрытая теплота испаренія) отсюда слѣдуетъ, что раствореніе порождаетъ сложный (состоитъ изъ химическихъ процессами, усложняющими это явленіе).

При раствореніи смесей газовъ объемъ v растворяющихся отдѣльныхъ частей мѣки пропорционаленъ и обратнымъ давленіемъ p, p, \dots и пропорционаленъ коэффициентамъ растворимости. Итакъ

$$v_1 : v_2 : v_3 : \dots = p_1 \alpha_1 : p_2 \alpha_2 : p_3 \alpha_3 : \dots \quad (11)$$

Для воздуха при 0° имѣемъ: для азота $p_1 = 0.7904h$, для кислорода $p_2 = 0.2096h$, гдѣ h атмосферное давленіе; даѣ при 0° для азота $\alpha_1 = 0.0235$, для кислорода $\alpha_2 = 0.04114$. Отсюда отношеніе объемовъ азота v_1 и кислорода v_2 , растворенныхъ въ водѣ.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{0.7904 \cdot 0.0235}{0.2096 \cdot 0.04114} = \frac{0.01867}{0.008625} = 1.87 \dots \dots \dots (12)$$

Коэффициентъ растворимости воздуха при 0° въ водѣ равенъ $\alpha = 0.00625 = 0.01151 = 0.024776$. Изъ (12) слѣдуетъ, что растворенный воздухъ содержитъ 34% O и 66% N .

§ 5 Выдѣленіе растворенныхъ газовъ изъ жидкостей. Растворенные газы выдѣляются изъ жидкостей при слѣдующихъ условіяхъ:

1. При уменьшеніи давленія нераствореннаго газа, оставшагося надъ жидкостью, или при замѣнѣ его непрерывною струею другого газа, уносящаго растворенный газъ по мѣрѣ его выдѣленія, тотъ же результатъ получится, если растворъ оставить открытымъ въ воздухѣ, если конечно растворенный газъ не входитъ въ составъ воздуха; растворъ «выдыхается».

2. При повышеніи температуры. При кипяченіи воды выдѣляются растворенные въ ней газы.

3. При затвердѣваніи раствора. При замерзаніи воды выдѣляются растворенные въ ней газы. Расплавленнымъ мѣдью и серебромъ растворяютъ кислородъ, который при быстромъ охлажденіи выдѣляется такъ шероховато, что мелкія капли металла вырываются вмѣстѣ съ газомъ.

4. Если въ насыщенный растворъ газа ввести твердое тѣло съ приставшими къ нему слоями воздуха (или иного газа, см. ниже § 6), то эти слои образуютъ какъ бы центры, около которыхъ собираются растворенный газъ, выдѣляясь въ видѣ пузырьковъ. Это явленіе особенно резко замѣчается, если залить растворъ, насыщенный при высокомъ давленіи и сверху уменьшить внешнее давленіе, причемъ выдѣляется меньше газа, чѣмъ слѣдовало бы соответственно новому давленію и растворъ остается пересыщеннымъ. Вотъ почему иначе изпитаны (сельтерская вода, пиво), вылитые въ стаканъ и переставшие выдѣлять пузырьки углекислоты, вновь какъ-бы закипаютъ, если въ нихъ насыпать сахарный порошокъ, песокъ, мелкія кусочки хлѣба и т. под.

§ 6. Явленія, обнаруживающіеся при соприкосновеніи газовъ съ твердыми тѣлами. Когда твердое тѣло соприкасается съ газообразнымъ, то могутъ обнаруживаться два явленія: ступеніе газа на поверхности твердаго тѣла (адсорбція), которое особенно велико для тѣлъ пористыхъ, обладающихъ огромною поверхностью (абсорбція), и непосредственное поглощеніе газа сплошною массою твердаго тѣла (окклюзія), которое по своему характеру напоминаетъ раствореніе.

Ступеніе газомъ внутри пористыхъ тѣлъ впервые изслѣдовалъ Saussure (1814). Онъ нашелъ, что прокаленный уголь букового дерева при 12° поглощаетъ объемовъ NH_3 — 90, HCl — 85, SO_2 — 65, CO_2 — 35, O — 9.2, N — 7.5, H — 1.75; морская глина при 15° NH_3 — 15, CO_2 — 5.26, O — 1.45, N — 1.60, H — 0.44; песокъ при 15° около 0.5 объемовъ H , N и O (0.58).

Законъ Henry мало подтверждается, но коэффициентъ поглощенія не убываетъ, какъ для жидкостей, но растетъ съ возрастающимъ давленіемъ. Для амміака и угля коксоваго орѣха онъ растетъ отъ 170.7 при давленіи въ 760 мм. до 209.8 при 2609 мм. Для угля бересклета (*Eucalyptus*) и CO_2 онъ растетъ даже отъ 0.7 при давленіи въ 1.13 мм. до 77.1 при 763 мм., какъ показали Charpentier. Съ возрастающей температурой ступающая способность пористыхъ тѣлъ быстро уменьшается.

Для изслѣдованія ступающей способности пористыхъ тѣлъ ихъ помѣщаютъ вмѣсто жидкостей въ абсорбциометръ (стр. 378). Губчатая прока-

ленная платина стучасть въ себѣ до 250 объемовъ кислорода; струя *II*, направленная на губчатую платину, воспламеняется, такъ какъ пороза содержитъ въ себѣ сгущенный *O* изъ воздуха; на этомъ основано водородное огниво *Doebereiner'a*.

Сильное сгущение газовъ внутри пористыхъ тѣлъ по всей вѣроятности представляетъ лишь частный случай сгущенія газовъ на поверхности твердыхъ тѣлъ вообще. Оказывается, что всякое твердое тѣло въ соприкосновеніи съ газомъ покрывается очень тонкимъ, но полнѣйшему весьма уплотненнымъ слоемъ этого газа.

По мнѣнію *Quinke* плотность слоя увеличивается по мѣрѣ приближеніи къ поверхности твердаго тѣла, достигая около самой поверхности плотности самаго тѣла.

Jamin и *Bertrand* помѣщали въ сосудѣ толченное стекло и выкачивали изъ него воздухъ; черезъ нѣкоторое время въ немъ увеличивалось давление, вследствие того, что части воздуха, пристававшія къ поверхности стекла, постепенно освобождались. *Charpent* (1878) нашелъ, что кв. метръ поверхности стекла удерживаетъ 0,27 куб. см. *II*, 0,35 куб. см. воздуха, 0,63 куб. см. *SO*₂ и 0,25 куб. см. *NH*₃.

На воздухѣ тѣла покрываются тонкимъ слоемъ водяного пара (вапоризации), этимъ объясняется замѣчаемое иногда сильное поглощеніе *CO*₂ поверхностью твердыхъ тѣлъ.

Изображенія *Moser'a* объясняются существованіемъ сгущеннаго слоя воздуха на поверхности тѣлъ. Если на вычищенную стеклянную пластинку положить монету или медаль (можно наоборотъ, вычистить послѣднюю, а стекло оставить не тронутымъ), снять ее и затѣмъ дохнуть на стекло, то ясно выступаетъ изображеніе медали. Объясняется это тѣмъ, что въ точкахъ соприкосновенія часть сгущеннаго газа переходитъ къ вычищенному тѣлу, вследствие чего плотность оставшагося или образовавшагося слоя на стеклѣ будетъ мѣняться соответственно рисунку монеты или медали. Это повлечетъ за собою и величину и форму мельчайшихъ капель воды, пристающихъ къ стеклу, если на него дохнуть такъ, что контуры изображенія на монетѣ дѣлаются замѣтными. Если деревянной палочкой чертить по поверхности стекла или металла и затѣмъ дохнуть на него, то вычерченная фигура также дѣлается видимою.

Любопытный случай поглощенія газа твердымъ тѣломъ представляетъ открытiе *Divers'омъ* (1873) поглощеніе аммиачнаго газа азотноаммиачною солью. При этомъ получается жидкій растворъ этой соли въ аммиакѣ. Изслѣдованіемъ этого явленія занимались *Raoult*, *Troost* и *Куриловъ*.

Поглощеніе газовъ сплошными металлами (окклюзія) зависитъ отъ рода металла и газа и отъ температуры.

Особенный интересъ представляетъ поглощеніе водорода палладіемъ. Палладіевая проволока поглощаетъ объемъ водорода, который при атмосферномъ давленіи до 1000 разъ превышаетъ бы объемъ самой проволоки. Способность палладія поглощать водородъ растетъ съ повышеніемъ температуры до 100° и затѣмъ уменьшается. Поглощая водородъ, палладіевая проволока удлиняется до 16%; объемъ ея увеличивается на 10%.

Вычисление показывает, что поглощенный водород должен составлять настолько, что его плотность достигнет числа 1.4. Упругость этого поглощенного водорода должна быть огромная; она измеряется по всей взрывнойности десятками тысяч атмосфер.

II. Гезелхусъ произвел весьма тщательное и интересное исследование поглощенія водорода палладиемъ и его сплавами съ *Pt*, *Au* и *Ag* (75 *Pd* и 25% одного изъ этихъ металловъ). Между прочимъ онъ измѣрилъ удлиненіе проволоки (длины 500 мм., толщина 0.4 мм.) при поглощеніи ею водорода. Когда проволока стала катодомъ, поглощала водородъ, то удлиненіе въ теченіе первыхъ 8-ми минутъ равнялось 1.5 паллади и его сплавовъ.

<i>Pd</i> + <i>Ag</i>	<i>Pd</i> + <i>Pt</i>	<i>Pd</i>	<i>Pd</i> + <i>Au</i>
7.2 мм.	6.4 мм.	5 мм.	0.9 мм.

При этихъ опытахъ II. Гезелхусъ пользовался весьма остроумнымъ приборомъ для измѣренія малыхъ удлиненій проволоки. Дѣлае онъ извѣдываетъ явное выдѣленіе водорода изъ паллади и его сплавовъ при различныхъ условіяхъ II. наконецъ, явное поглощеніе водорода на упругость проволоки.

Никкель также поглощаетъ *H*, но гораздо меньше, чѣмъ паллади. Подобное же явленіе обнаруживается кали и натріи. Платина, палатинъ *O* поглощаетъ немного этого газа. Чугунъ содержитъ много *H*, дѣлаетъ — *CO* (до 12 объемовъ) аномалии *H* и *CO*.

Особенно интересно, что метеоритное желѣзо содержитъ въ себѣ до трехъ объемовъ газа, изъ нихъ — по объему составляетъ водородъ; кромѣ него еще находится азотъ и окисъ углерода.

Присутствіе газовъ въ металлахъ можетъ служить источникомъ погрѣшностей при опредѣленіи ихъ удѣльнаго вѣса, какъ показалъ Dumas (1878).

ЛИТЕРАТУРА.

I. Законъ Дальтона.

- Dalton* Manch. Phil. Soc. V, p. 535, 1802; *Gillb. Annual* 12 p. 385, 1802; 15 p. 21, 1803.
Henry Nicholson's J. 8 p. 297, 1804; *Gillb. Annual* 21 p. 393, 1805.
traug-I essac, *Ann. ch. et phys.* 95 p. 414, 1815; *Biot*, *Traite de physique* I p. 298.
Magnus, *Pogg. Ann.* 38 p. 488, 1836.
Re man *Ann. ch. et phys.* 15 p. 129, 1845; *Mem. del'Ac. des sciences* 26, p. 67.
Andrieux, *Phil. Mag.* (5) 1 p. 84, 1876.
Caillietet, *J. de phys.* (1) 9 p. 192, 1880.
Springmuhl, *Pogg. Ann.* 148 p. 540, 1873.
Herwig, *Pogg. Ann.* 137 p. 592, 1869.
Wullner und Grotrian, *W. A.* 11 p. 545, 1880.
Kroenig, *Pogg. Ann.* 123 p. 299, 1864.
Braun, *W. A.* 34 p. 943, 1888.
R. Gaultier, *Das Dalton'sche Gesetz*, Diss., Strassburg, 1890.
R. Galitzine, *W. A.* 41 p. 588, 1890.

II. ГАЗЫ И ЖИДКОСТИ:

- Henry*. Phil. Trans. 1803, I p. 29; Gilb. Ann. 20, 1803.
Bunsen. Gasometrische Methoden Braunschweig 1857, Liebigs Annal. 93, 1855.
Cochran. Mem. de l'Acad. d. St. Petersburg (7) T. 22 № 6; 34 № 3 35 № 7; Zeitschr. f. phys. Chem. 4 p. 117, Ann. chim. et phys. (6) 25 p. 223, 1832; Ber. Chem. Ges. 1877, p. 972; О. Ф. Н. Уч. Д. Е. 5, вып. 2, стр. 6; 1893.
Kampf. Absorption von Chlor durch NaCl-Lösung. Diss. Graz. 1881.
Wroblewski. Wied. Ann. 8 p. 29, 1880, 17 p. 103, 1882 18 p. 290, 1893; J. d. phys. (2) 1 p. 452, 1882.
Richard. C. R. 123 p. 1088, 1896.
E. Wiedemann. W. A. 17 p. 349, 1882.
Klamkoff et Louquim. Ann. ch. et phys. (4) 11 p. 412, 1867.
Mackenzie und Nichols. W. A. 3 p. 134, 1878.
Nichols and Wheeler. Phil. Mag. (5) 11 p. 113, 1881.
Angström. W. A. 15 p. 297, 1882; 17 p. 297, 1882.
Blumcke. W. A. 23 p. 404, 1884; 30 p. 243, 1887.
Steiner. W. A. 52 p. 275, 1894.
А. И. Коваловъ. Ж. Ф. Х. Общ. 26, 1891, Отд. Хим. стр. 18.

III. ГАЗЫ И ТВЕРДЫЯ ТѢЛА.

- Sausure*. Gilb. Annalen, 47, 1814.
Chappuis. W. A. 8 p. 1 и 674, 1879, 12 p. 160, 1881. Arch. Sc. phys. (3) 3 p. 139, 1878.
Jamin et Bertrand. Ann. ch. et phys. (3) 34 p. 341, 1852.
Moser. Pogg. Ann. 56 и 57, 1842.
Dumas. C. R. 86 p. 65, 1878.
Quinke. Pogg. Ann. 108, p. 326, 1859.
Joulin. C. R. 90 p. 741; 1880.
Pfeffer. Verdichtung v. Gasen durch feste Körper. Diss. Erlangen. 1882.
Kaiser. W. A. 12 p. 528; 14 p. 450, 1881, 21 p. 495, 1884, 26 p. 410, 1884.
Bunsen. W. A. 20 p. 545, 1883, 22 p. 145, 1884, 24 p. 321, 1885.
O. Schumann. W. A. 27 p. 91, 1886.
Troost et Hautefeuille. C. R. 78 p. 686, 1874 (II и Pd).
Divers. C. R. 77 p. 783, 1873.
Raoult. C. R. 76 p. 1261, 1887; 94 p. 1117, 1882.
Troost. C. R. 94 p. 789, 1882.
Курловъ. Ж. Ф. Х. Общ. 25, 1893, Отд. Хим. p. 170.
Н. Гвоздевъ. Ж. Ф. Х. О. 11 p. 78, 1879.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Основанія кинетической теоріи газовъ.

§ 1. Характеръ движенія газовыхъ молекулъ. Основателями кинетической теоріи газовъ слѣдуетъ считать Кюенігъ'а (1856) и Клаузиусъ'а (1857), хотя тѣ идеи и представленія, которыя лежатъ въ ея основаніи, уже раньше были высказываемы и развиваемы многими учеными.

Кинетическая теорія газовъ въ ея простѣйшемъ видѣ, безъ тѣхъ дополненій и исправленій, которыя мало-по-малу были введены въ

нее, предполагаетъ, что газовыя молекулы, не дѣйствуя вовсе другъ на друга (кромѣ какъ при столкновеньяхъ), движутся каждая, какъ вполне свободное тѣло, прямолинейно съ нѣкоторою скоростью, зависящею, какъ мы увидимъ, только отъ рода газа и отъ температуры. Направленіе движенія рѣзко мѣняется, когда молекула встрѣчается на своемъ пути стѣнку сосуда, въ которомъ газъ заключенъ, или вообще преграду, или когда сталкиваются между собою двѣ молекулы. Въ обоихъ случаяхъ перемѣна направленія движенія происходитъ согласно съ законами удара упругихъ тѣлъ.

Кромѣ прямолинейнаго въ каждый данный моментъ движенія молекулы, существуютъ въ газѣ, однако, и еще другія движенія. Во-первыхъ, молекула, какъ цѣлое, можетъ вращаться около какой-либо осн, такія движенія должны возникать при нецентральныхъ ударахъ молекулъ другъ о друга; во-вторыхъ, возможны такъ наз. интрамолекулярныя движенія, т. е. движенія (колебанія, вращенія) атомовъ, составляющихъ молекулу, около нѣкоторыхъ среднихъ положеній. Объемомъ, занимаемымъ молекулами, мы пренебрегаемъ, принимая ихъ за точки, допуская, однако возможность столкновѣній между ними; иначе говоря, мы пренебрегаемъ линейными размѣрами молекулъ сравнительно съ ихъ среднимъ разстояніемъ другъ отъ друга. Далѣе мы предположимъ, что молекулы не подвержены никакимъ вѣнннмъ силамъ: пренебрегаемъ слѣд. и вліяніемъ на нихъ силы тяжести.

Изложенный здѣсь изъ видъ на характеръ движенія газовыхъ молекулъ, а именно прямолинейность движенія, непосредственно объясняетъ основныя два свойства газовъ: ихъ стремленіе занять, и притомъ равномерно, весь представленный имъ объемъ, и ихъ упругость, т. е. то давленіе, которое они производятъ на тѣла, ограничивающія этотъ объемъ. Первое изъ этихъ свойствъ прежде объяснено взаимнымъ отталкиваніемъ частицъ газа. Ясно, что если рядомъ съ пространствомъ *A*, занимаемымъ газомъ, окажется пустое пространство *B*, то всѣ частицы, движущіяся по направленію къ этому пространству *B* не встрѣчая препятствія, перейдутъ въ него, пока не будетъ достигнуто равномерное распредѣленіе молекулъ, при которомъ въ единицу времени столько же частицъ передѣтаетъ изъ *A* въ *B*, сколько изъ *B* въ *A*. Равномерное распредѣленіе есть слѣд. условіе равновѣсія, не соответствующаго однако покою, но, напротивъ, непрерывному обмѣну частицъ безъ измѣненія ихъ числа въ каждой части пространства, не чересзмѣрно малой. Въ подобныхъ случаяхъ, часто встрѣчающихся въ различныхъ областяхъ физическихъ явленій, говорятъ объ установившемся подвижномъ равновѣсіи.

Упругость газовъ въ смыслѣ давленія, дѣйствующаго на сосѣднія съ ними тѣла, объясняется тѣми толчками, которые эти тѣла претерпѣваютъ отъ налетающихъ на нихъ и отскакивающихъ молекулъ, отъ «молекулярной бомбардировки», которой они подвергаются.

Чтобы получить съ самаго начала болѣе правильное представленіе о характерѣ движенія молекулъ газа, укажемъ на слѣдующія данныя, къ которымъ мы ниже вернемся. Скорость газовыхъ молекулъ весьма велика; она напр. равна почти 500 метрамъ въ секунду для молекулъ воз-

духа, возрастая для всѣхъ газовъ съ температурою. Столкновѣнія между частицами газа происходятъ невообразимо часто; такъ напр. молекула воздуха при обыкновенномъ давленіи успѣваетъ, въ среднемъ, пройти не болѣе 0,0001 мм. отъ одного столкновѣнія до слѣдующаго. Принимая во вниманіе быстроту движенія, мы видимъ, что всякая молекула претерпѣваетъ въ каждую секунду до 5000 милліоновъ столкновѣній и столько же разъ, вообще говоря, мѣняетъ направленіе своего движенія. При сдвигиваніи газа, число этихъ столкновѣній должно возрасти пропорціонально плотности. Когда воздухъ сжать до 100 атмосферъ, мы имѣемъ уже 500 000 милліоновъ столкновѣній въ секунду. Все это вмѣстѣ взятое рисуетъ намъ картину невообразимо хаотическаго состоянія, въ которомъ находится совокупность огромнаго числа молекулъ, весьма быстро движущихся по всевозможнымъ направленіямъ, непрерывно между собою сталкиваясь.

§ 2. Законъ Бойля-Мариотта. Кинетическая теорія не только легко объясняетъ, почему давленіе p газа обратно пропорціонально объему v , но и даетъ весьма интересное выраженіе для произведенія pv , не зависящее, какъ и слѣдуетъ ожидать, отъ температуры.

Вотъ простое объясненіе самого закона. Если мы объемъ v газа, въ которомъ находились n молекулъ, уменьшимъ въ k разъ, то въ объемѣ $\frac{v}{k}$ будутъ находиться всѣ n молекулъ. Давленіе будетъ въ этомъ случаѣ такое же, какъ и въ случаѣ, еслибы въ объемѣ v находились kn молекулъ, ибо раздѣливъ этотъ объемъ перегородками на k равныхъ частей, мы давленія не измѣнимъ, а между тѣмъ получимъ объемы $\frac{v}{k}$, содержащіе каждый n молекулъ. Но если въ объемѣ v число молекулъ увеличилось въ k разъ, то на единицу поверхности стѣнки частицы будутъ налетать въ k разъ чаще; бомбардировка, а слѣд. и давленіе газа увеличится въ k разъ.

Другое объясненіе слѣдующее: если мы уменьшимъ объемъ въ q^3 разъ, то линейные размѣры, а слѣд. и среднее разстояніе частицъ другъ отъ друга уменьшится въ q разъ, потому частицы, расположенныя вдоль единицы поверхности стѣнки въ тонкомъ прилегающемъ къ ней слое, отскочивъ отъ нея, пройдутъ въ q разъ болѣе короткій путь до вѣроятной встрѣчи съ другими частицами, о которыя онѣ ударятся и вновь получать движеніе, направленное къ стѣнкѣ. Каждая частица будетъ потому въ q разъ чаще ударять въ стѣнку, чѣмъ прежде. Число частицъ въ слое, толщину котораго теперь слѣдуетъ взять въ q разъ меньше, увеличится въ q^3 разъ, и потому полное число ударовъ, претерпѣваемыхъ единицей поверхности стѣнки, увеличится въ q^3 , т.-е. во столько разъ, во сколько разъ уменьшился объемъ.

Перейдемъ къ выводу формулы, которую слѣдуетъ назвать основною въ кинетической теоріи газовъ. Эта формула имѣетъ видъ:

$$pv = \frac{1}{3} N m \bar{u}^2 (1)$$

Давление газа получится, если мы вычислимъ сумму выражений вида $2mu \cos \varphi$ для всѣхъ частицъ газа, ударяющихъ въ единицу времени ($t = 1$) на единицу поверхности ($s = 1$) стѣнки. Существуютъ разные выходы основной формулы (1) изъ общей формулы (2). Приведемъ два такихъ выхода.

1. Выводъ Лавье а (1851 и 1857). Допустимъ, что сосудъ, содержащій газъ, имѣетъ форму прямоугольнаго параллелепипеда, стороны котораго $a = MQ$ (рис. 235), $b = MN$ и c , перпендикулярная къ рисунку. Ребро b примемъ за высоту, а за основное ребро $ac = s$, объемъ $v = sb$. Вводимъ слѣдующія два допущенія:

1) Допускаемъ, что молекулы газа все не сталкиваются между собою, но свободно идутъ отъ стѣнки до стѣнки. Это допущеніе не можетъ имѣть вліянія

Рис. 235

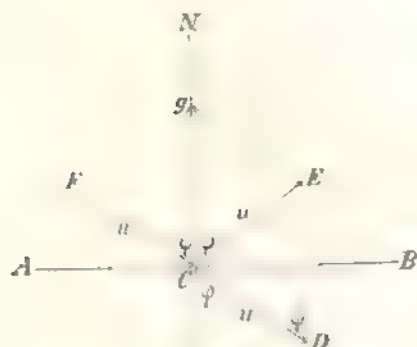
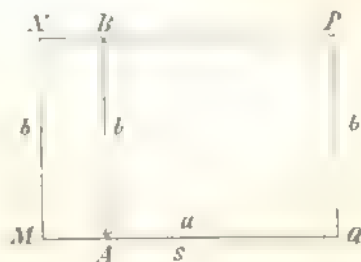


Рис. 236.



на результатъ вычисленія суммы количествъ движенія частицъ, достигающихъ до стѣнки, ибо какъ мы увидимъ ниже (Отдѣлъ VI, Глава IV, § 7), при ударѣ вполнѣ упругихъ тѣлъ, каковыми считаются молекулы газа, количество движенія, идущее въ данномъ направленіи, отчасти передается другому тѣлу, какъ бы продолжало идти въ томъ же направленіи. Оно доидетъ до противоположной стѣнки и отъ него отразится, не мѣнясь количественно, но какъ бы распредѣляясь между многими молекулами. Полное количество движенія, доходящее до единицы поверхности остается одинаковымъ, будутъ ли молекулы сталкиваться между собою, или нѣтъ.

2) Предположимъ, что въ разсматриваемомъ объемѣ газа содержится N молекулъ. Каждую молекулу, масса которой m , и скорость u которой имѣетъ произвольное направленіе, составившее углы α , β и γ съ ребрами a , b и c , замѣняемъ мысленно тремя молекулами, двигающимися параллельно этимъ ребрамъ со скоростями $u \cos \alpha$, $u \cos \beta$ и $u \cos \gamma$. Энергія движенія отъ этого не измѣнится, ибо $\frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} m(u \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} m(u \cos \beta)^2 + \frac{1}{2} m(u \cos \gamma)^2$. Формула (5) показываетъ, что давленіе p зависитъ только отъ нормальной составляющей, а потому при вычисленіи этого давленія напр. на сторону s

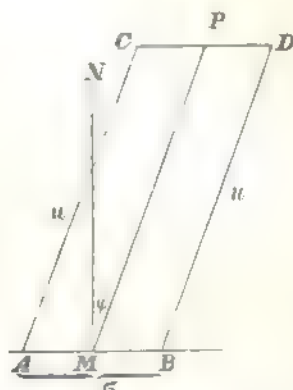
по всевозможным направлениям, притом так, что все направления одинаково часто встречаются и ни одно не имѣть переваги надъ другими; пусть XU (рис. 237) какое-либо направление; спрашивается, какъ велико число n частицъ, направления движеній которыхъ составляетъ съ направлениемъ XU уголъ, содержащійся между φ и $\varphi + d\varphi$?

Для решения этого вопроса проведемъ черезъ какую либо точку C прямую $AB \parallel XY$; изъ C проведемъ дуги n прямыхъ, произвольной, но равной длины l , параллельныхъ направлениямъ движений n газовыхъ молекулъ. Концы этихъ прямыхъ равномерно распределятся по поверхности шара, радиусъ котораго l . Если около CA , какъ около оси, описать конусы, образующия которыхъ составяють съ этою осью углы φ и $\varphi + d\varphi$, то они ограничатъ на поверхности шара поясъ PQ , внутри

Рис. 237.



Рис. 238



которого будут расположены концы всех прямых l , соответствующих искомому числу n молекул. Ввиду равномерности распределения этих концов линий l число n должно относиться ко всему числу n , как поверхность пояса PQ , т.е. $2\pi l \sin \varphi/2$, ко всей поверхности шара $4\pi R^2$.

Итакъ $n_0: n = 2\pi l^2 \sin \varphi d\varphi: 4\pi l^2$, откуда

$$n_z = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi n \sin^2 \varphi d\varphi (7)$$

Принцип, поставленный вопрос в разнометрии элементу $AB = z$ (рис. 238) поверхности стьки. Пусть MN нормаль к z ; построим над z , как над основанием, цилиндр $ACDB$, образующая которого составляет бы угол φ с нормалью и имела бы длину, равную скорости n частицы. Высота цилиндра $ncos\varphi$, его объем $\pi n^2 cos\varphi z$; число n молекул, содержащихся в нем, равно

$$n = \frac{N}{d} \sin \cos \varphi.$$

если во всемъ объемѣ V содержится N молекулъ а слѣд. въ единицѣ объема

ных содержится $\frac{N}{2}$. Эти молекулы движутся по всевозможным направлениям. Слѣд.

$$n_{\varphi} = \frac{1}{2} n \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{N}{v} \sin \varphi \sin \varphi d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

есть число молекул, содержащихся въ цилиндрѣ $ACDB$ и движущихся по направленнымъ, составляющимъ съ нормалью MN уголъ, заключенный между φ и $\varphi + d\varphi$.

Опредѣлимъ, какое число n'_{φ} этихъ частицъ движется по направленнымъ, составляющимъ бесконечно малый уголъ съ осью MP цилиндра. Пусть плоскость NMP составляетъ уголъ ψ съ какою-либо начальной плоскостью, проходящею черезъ нормаль MN . Нормальныя къ σ плоскости, проходящая черезъ направленныя движения n_{φ} молекулъ, составляютъ всевозможныя ψ отъ 0 до 2π съ начальной плоскостью, чтобы эти молекулы бесконечно мало выходили изъ плоскости NMP необходимо, чтобы упомянутыя нормальныя плоскости составляли съ начальной плоскостью уголъ, содержащийся между ψ и $\psi + d\psi$. Отсюда слѣдуетъ, что n'_{φ} относится къ n_{φ} какъ $d\psi$ къ 2π , т.-е.

$$n_{\varphi} \frac{d\psi}{2\pi} n_{\varphi} = \frac{N\pi}{4\pi v} n \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\psi \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Всѣ эти n_{φ} частицъ очевидно ударятся объ элементъ σ въ течение единицы времени, къ концу которой тѣ изъ нихъ дойдутъ до AB , которая въ ея началѣ находилась въ CD . Мы и здѣсь не обращаемъ вниманія на то, что частицы взаимно сталкиваются: что мы это можемъ сдѣлать, было объяснено выше. Возраженіе, что цилиндръ $ACDB$ можетъ не помѣститься въ объемѣ σ , занимаемомъ газомъ, очевидно не имѣетъ значенія. Потокъ количества движения, идущаго внутри цилиндра по направлению къ AB въ течение единицы времени, не зависитъ отъ величины объема σ . Впрочемъ, можно было бы разсматривать и цилиндръ произвольной длины l , пробѣгаемый газовыми частицами во время $t = \frac{l}{u}$. Переходя зѣмъ къ опредѣленію суммы (5) для $t = 1$, мы бы получили тотъ же результатъ, какой получимъ и теперь. Каждая изъ n'_{φ} частицъ дастъ одинъ изъ членовъ суммы (5), и такъ какъ σ для нихъ общее, то онѣ дадутъ часть всей суммы, равную

$$n_{\varphi} \cdot 2\pi u \cos \varphi = \frac{Nmu}{2\pi v} u^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi d\psi.$$

Если мы проинтегрируемъ это выраженіе по ψ отъ 0 до 2π и по φ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ то получимъ сумму (5) для $t = 1$ и $\sigma = \sigma$, чтобы получить p , намъ останется перейти отъ $\sigma = \sigma$, къ $\sigma = 1$, т.-е. разделить полученный результатъ на σ . Итакъ

$$p = \frac{Nmu^2}{2\pi v} \int \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int d\psi = \frac{Nmu^2}{v} \int \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \frac{Nmu^2}{v}.$$

Отсюда получается

$$pv = \frac{1}{3} Nmu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

т.е. формула (1).

Главный недостаток этого вывода Clausius'a заключается въ допущении что въ молекулы действуетъ съобщенноею скоростью u , что, какъ мы увидимъ, невярно.

Величины p , v , m и u в (10) должны быть измерены соответствующими другъ другу единицами. Если пользоваться *C. G. S.* единицами, то p должно быть выражено въ динахъ на кв. см. поверхности, v въ куб. см., m въ граммахъ а за единицу скорости следуетъ принять скорость 1 см. въ сек. Однако чаще принимаютъ за единицу силы килограммъ, за единицу длины метръ, за единицу времени секунду. Въ этомъ случаѣ p выражается въ килограммахъ на кв. метръ поверхности, v въ куб. метрахъ; за единицу массы $m = 1$ гр., а именно масса g килограмм. = 981 килограммъ, и за единицу скорости — скорость метръ въ сек.

§ 3. Слѣдствія, вытекающія изъ основной формулы (10). Вспомнимъ формулу Клапейрона (2) стр. 360:

$$pv = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

гдѣ T абсолютная температура, R величина постоянная для данного количества данного газа. Введемъ также живую силу J поступательнаго движенія газовыхъ молекулъ; она равна

$$J = \frac{1}{2} Nmu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Наконецъ, пусть $M = Nm$ масса газа, $\varrho = gM$ его вѣсъ, и δ плотность газа при томъ, какъ мы всегда обозначаемъ этой буквой, плотность относительно воздуха при томъ же давлении и той же температурѣ.

Комбинируя (10), (11) и (12) получаемъ замѣчательный рядъ равенствъ

$$pv = \frac{1}{3} Nmu^2 = \frac{1}{3} Mu^2 = RT = \frac{2}{3} J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

При постоянной температурѣ произведена pv для данного количества газа есть величина постоянная по закону Б.-М. Теперь мы видимъ, что эта постоянная $pv = \text{const.}$ равна двумъ третямъ энергии поступательнаго движенія газовыхъ молекулъ.

При $v = 1$ имѣемъ

$$p = \frac{2}{3} J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13, a)$$

т.е. давленіе газа равно двумъ третямъ энергии поступательнаго движенія, заключающейся въ единицѣ объема газа.

Равенство $RT = \frac{2}{3} J$ показываетъ также, что энергія поступа-

тельного движенія газовыхъ молекулъ пропорциональна абсолютной температурѣ газа.

§ 4. Скорость газовыхъ частицъ. Равенства (13) даютъ

$$u = \sqrt{\frac{3pr}{M}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Предположимъ, что мы имѣемъ дѣло съ вѣсовой единицею газа; тогда вѣсъ $Q = gM = 1$, откуда $M = \frac{1}{g}$; пусть даѣе v_0 объемъ вѣсовой единицы, а именно килограмма, воздуха при данныхъ температурѣ T и давленіи p газа; тогда $v = \frac{v_0}{\delta}$ и (14) даетъ

$$u = \sqrt{3qr} = \sqrt{\frac{3grv_0}{\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Наконецъ пусть R_0 постоянная формулы Клапейрона для одного килограмма воздуха; тогда $pr = R_0 T$. Мы видѣли, (6) стр. 360, что $R = 29.27$, если принять килограммъ, метръ и сек. за единицы силы, длины и времени; (15) даетъ

$$u = \sqrt{3gR_0 \frac{T}{\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Изъ этой формулы вытекаютъ два важнѣйшихъ закона.

I. Скорость молекулъ данного газа пропорциональна корню квадратному изъ абсолютной температуры газа.

II. Скорости молекулъ различныхъ газовъ при одинаковой температурѣ обратно пропорциональны корнямъ квадратнымъ изъ плотностейъ газовъ.

Чѣмъ легче газъ, тѣмъ быстрее движутся его молекулы. Отъ упругости, какъ и слѣдуетъ ожидать, не зависитъ скорость молекулъ. Если мы сожмемъ газъ при постоянной температурѣ, то его молекулы сблизятся, но это не должно вліять на ихъ скорость, при сжатіи измѣнится плотность D газа относительно воды, но плотность δ относительно воздуха, въ предѣлахъ точности закона Б.-М., остается безъ измѣненія (стр. 342).

Формула (16) даетъ возможность вычислить и абсолютныя величины скоростей u газовыхъ частицъ. Сдѣлаемъ это для температуры 0° , т.-е. для $T = 273$; вставляемъ $g = 9.81$, $R = 29.27$:

$$u = \sqrt{3 \times 9.81 \cdot \frac{29.27 \cdot 273}{\delta}} = \frac{485}{\sqrt{\delta}} \frac{\text{метра}}{\text{сек.}} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Тѣ же самое мы, конечно, получили бы, вставляя въ (15) $p = 10333$ (давленіе одной атмосферы въ килогр. на кв. метръ поверхности) и $v_0 = 0.7733$ (объемъ килогр. воздуха при 0° и давленіи въ одну атмосферу въ куб. метрахъ).

Для воздуха $\delta = 1$ и слѣд. скорость частицъ воздуха при 0°

Если бы это равенство не имело места, то при столкновениях молекул различных газов увеличивалась бы энергия одного рода и уменьшалась бы энергия другого рода молекул и мы получили бы весьма порочный результат, что в смеси двух газов каждый из них имеет как бы свою температуру, которая для одного газа выше, для другого газа ниже температуры самой смеси, и которая, однако, равна общей температуре газов до их смешения, независимо от того, в какой пропорции они смешаны газы. Допуская след. равенство (19), мы из (18) непосредственно получаем $N = N_1$, чѣмъ и выражается законъ Авогадро.

§ 6. Законъ Дальтова. Въ § 1 Главы IV (стр. 376) мы видели, что давление смеси нескольких газов равно суммѣ т. наз. парціальныхъ давлений составныхъ частей. Этотъ законъ можно было развить слѣдующимъ образомъ. Выводъ формулы (10) для однороднаго газа, мы вычисляли сумму геометрическихъ приращеній количествъ движенія, приобретаемыхъ молекулами при ударахъ. Когда мы имѣемъ смесь нескольких газовъ то молекулы какого-либо одного изъ газовъ будутъ налетать на стѣнку въ томъ же количествѣ и съ тѣми же скоростями, какъ и въ случаѣ, если бы молекулы другихъ газовъ вовсе отсутствовали. Мы видели (стр. 389), что столкновения между молекулами не могутъ вліять на давление газа на поверхность стѣнки. Отсюда и слѣдуетъ, что давление p смеси равно суммѣ парціальныхъ давленій $p_1 + p_2 + p_3 + \dots$.

Иногда разсуждаютъ такъ: пусть v объемъ смеси, J ея энергія, равная суммѣ энергій $J = J_1 + J_2 + \dots$ составныхъ частей смеси.

Выводъ, подобный выводу формулы (1'), дастъ намъ

$$pv = \frac{2}{3} (J_1 + J_2 + J_3 + \dots).$$

Но

$$p_1 v = \frac{2}{3} J_1, \quad p_2 v = \frac{2}{3} J_2 \text{ и т. д. слѣд. } p = p_1 + p_2 + \dots$$

Это разсужденіе ничего не прибавляетъ къ тому, что сказано выше.

§ 7. Законъ Гей-Люссака. Что коэффициентъ α температурнаго расширенія одинъ и тотъ же для всѣхъ газовъ, вытекаетъ какъ слѣдствіе изъ формулы кинетической теории газовъ. Пусть некоторый газъ при давленіи p занимаетъ объемъ v , при 0° и при томъ же давленіи p объемъ v при температурѣ t° . Мы имѣемъ

$$v = v_0 (1 + \alpha t) \dots \dots \dots (20)$$

Если u_0 и u скорости молекулъ при 0° и t° , то (10) дастъ

$$pv_0 = \frac{1}{3} N m u_0^2 \quad pv = \frac{1}{3} N m u^2.$$

Сравнивая это съ (20), получаемъ

$$u^2 = u_0^2 (1 + \alpha t) \dots \dots \dots (21)$$

Для другого газа обозначимъ массу одной молекулы черезъ m_1 , скорости при 0 и t черезъ $u_{1,0}$ и u_1 , а коэффициентъ расширения черезъ α_1 ; аналогично (21) имѣемъ

$$u_1^2 = u_{1,0}^2 (1 + \alpha_1 t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

На основаніи сказаннаго въ § 6, живыя силы поступательныхъ движеній одной молекулы того и другого газовъ должны быть равны при всѣхъ температурахъ, т.-е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m u^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2, \\ \frac{1}{2} m u^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{u}{u_1} = \frac{m_1}{m}.$$

Сравнивая это съ (21) и (22), имѣемъ

$$1 + \alpha t = 1 + \alpha_1 t.$$

т.-е.

$$\alpha = \alpha_1$$

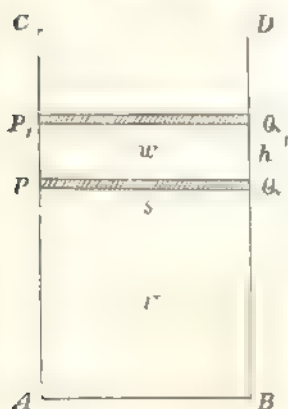
въ чемъ и заключается законъ Гей-Люссака.

§ 8. Теплоемкость газовъ. Намъ необходимо сдѣлать маленькое отступление отъ предмета этой главы и познакомиться ближе съ теплоемкостью газовъ. Теплоемкость, вообще говоря, есть причина *causa generis*, характеризующая данное вещество и для тѣхъ различныхъ обстоятельствъ, при которыхъ оно находится. При определенномъ выборѣ единицы количества теплоты (калорій) и единицы теплоемкости (калоры), теплоемкость тѣла измѣряется количествомъ тепла, потребнаго для нагреванія его на одинъ градусъ, а теплоемкость вещества — количествомъ тепла, потребнаго для нагреванія единицы этого вещества на 1. Допуская что въ идеальныхъ газахъ нѣтъ внутренней работы (стр. 142) мы только заключить что полная внутренняя теплота тратится отчасти на нагреваніе газа т.-е. на повышение его температуры, отчасти на внешнюю работу, производимую газомъ, когда онъ, расширяясь, отодвигаетъ тѣ тѣла, которыя производятъ на него давленіе, отличающаеся во время расширения въ каждый данный моментъ отъ упругости газа на весьма ничтожную величину.

Если газъ заключенъ въ нерасширяющуюся оболочку, то внешней работы при нагреваніи газа вовсе нѣтъ и теплота идетъ только на повышение температуры T , и слѣд. по крайней мѣрѣ отчасти на увеличеніе запаса кинетической энергии J поступательнаго движенія частицъ, какъ видно изъ (13). Теплоемкость газа въ этомъ случаѣ обозначимъ черезъ c_v ; она называется теплоемкостью при постоянномъ объемѣ. Когда газъ нагревается при постоянномъ объемѣ, то упругость p его увеличивается.

Положимъ теперь, что газъ, занимающій объемъ v , находится при давленіи p , которое не мѣняется при нагреваніи: газъ свободно расширяется подъ постояннымъ внешнимъ давленіемъ p . Такой случай мы имѣемъ, когда газъ находится въ цилиндрѣ $ABCD$ (рис. 239) подъ подвижнымъ поршнемъ PQ . Теплоемкость газа въ этомъ случаѣ обозначимъ черезъ c_p ; ее называютъ теплоемкостью при постоянномъ давленіи.

Рис. 239.



Легко понять, что $c_p > c_v$, ибо c_v численно равно теплотѣ, идущей только на нагреваніе газа, а c_p — теплотѣ, которая тратится на то же самое нагреваніе и еще на внешнюю работу, которую обозначимъ черезъ r . Пусть E механическій эквивалентъ теплоты и A обратная ему величина, т.е. термическій эквивалентъ работы (стр. 105). Для произведенія работы r необходимо количество тепла Δr ; отсюда слѣдуетъ, что

$$c_p = c_v + \Delta r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Чтобы вычислить внешнюю работу r , производимую въсовой единицей газа при нагреваніи на 1° подъ постояннымъ давленіемъ p , положимъ, что газъ при $(t+1)^\circ$ занимаетъ объемъ AP_1Q_1B , равный $v+w$; приращеніе объема $w = sh$, гдѣ s поверхность поршня, h высота, на которую онъ поднялся. Давленіе на поршень равно ps ; отсюда слѣдуетъ, что работа

$$r = psh = pw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Объемъ газа при 0° равенъ $\frac{v}{1+\alpha t}$, и при $(t+1)^\circ$

$$\frac{v}{1+\alpha t} [1 + \alpha(t+1)] = \frac{v(1+\alpha t + \alpha)}{1+\alpha t} = \frac{v}{1+\alpha t} + \frac{v\alpha}{1+\alpha t}.$$

Последняя величина должна равняться $v + w$; слѣд.

$$w = \frac{v\alpha}{1+\alpha t} = \frac{v}{\frac{1}{\alpha} + t} = \frac{v}{273+t} = \frac{v}{T}.$$

Далѣе (23) даетъ

$$r = \frac{pv}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

или на основаніи формулы Клапейрона $p = RT$ (стр. 360)

$$r = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Это любопытное равенство показываетъ, что постоянная формулы Клапейрона численно равна работѣ расширенія газа, когда

температурѣ T въ единицѣ объема газа, мы предположимъ, что въсвободившаяся единица газа расширяется при неизмѣнномъ объемѣ отъ температуры абсолютнаго нуля, при которомъ $J = 0$, до температуры T . На это затратится количество теплоты $c_v T$, которое и дастъ искомое количество энергии J если его помножить на E и раздѣлить на v

$$J = \frac{Ec_v T}{v} = \frac{ETc_p}{ck} \dots \dots \dots (34)$$

Раздѣливъ (33) на (34), получаемъ

$$\frac{J_v}{J} = \frac{3}{2} \frac{pk}{vJF}$$

Вторая формула (31) даетъ окончательно

$$\frac{J_v}{J} = \frac{3}{2} (k-1) = \frac{3}{2} \frac{c_p - c_v}{c_v} \dots \dots \dots (35)$$

Эту замѣчательную формулу назвать Clausius. Она показываетъ, что для данного газа энергія поступательнаго движенія частицъ при всѣхъ температурахъ составляетъ одну и ту же часть полнаго запаса энергіи. То же самое, понятнѣе, относится и къ молекулярной энергіи J_m .

Такъ какъ $J = J_v + J_m$, то изъ (35) получается

$$\left. \begin{aligned} J_v &= \frac{3}{2} (k-1) J \\ J_m &= \frac{3}{2} (1 - \frac{1}{k}) J \\ J_m &= \frac{3}{2} \frac{k-1}{k-1} J \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

Эти формулы вполнѣ выясняютъ вышесказанное постоянство, т. е. отъ температуры независимое отношеніе распределяется весь запасъ J энергіи газа между энергіей J_v поступательнаго движенія молекулъ и энергіей молекулярной J_m .

Формулы (36) приводятъ къ замѣчательному слѣдствію. Энергія J_m можетъ равняться нулю, или она величина положительная, отсюда слѣдуетъ, что k меньше, чѣмъ $\frac{5}{3}$, ищ. въ крайнемъ случаѣ, равно $\frac{5}{3}$. Итакъ мы имѣемъ для k такіе предѣлы

$$1 < k \leq \frac{5}{3} \dots \dots \dots (37)$$

Предѣлъ $k = \frac{5}{3}$ достигается при $J_m = 0$; можно было ожидать, что къ такому предѣлу приблизятся одноатомные газы, для которыхъ во все

нѣтъ интрамолекулярной энергіи и слѣд. J_m состоитъ только изъ энергіи вращения молекулъ. Къ одноатомнымъ газамъ принадлежитъ паръ ртути и для него Kund и Warburg (1876) дѣйствительно нашли $k = 1.67$, см. (32).

Формулы (36) и числа (32) даютъ:

	$\frac{J_v}{J}$	$\frac{J_m}{J_v}$
Воздухъ	0,608	0,645
Водородъ	0,578	0,731
Углекислота	0,458	1,184
Пары ртути	1	0

§ 10. Истинныя скорости молекулъ. Законъ Максвелла. Во всѣхъ предыдущихъ выводахъ мы предполагали, что всѣ молекулы газа обладают одинаковою скоростью u . Въ дѣйствительности молекулы должны обладать различными скоростями, непрерывно мѣняющимися для одной данной молекулы при ея столкновенияхъ съ другими.

Clerk Maxwell рѣшилъ вопросъ о томъ, какъ распределены различныя скорости между молекулами данного количества газа. Ограничиваемся соотношеніемъ результата. Въ данномъ объемѣ газа, содержащемъ весьма большое число N молекулъ, встрѣчаются, теоретически говоря, всѣ скорости отъ $u = 0$ до $u = \infty$, но число молекулъ n , обладающихъ скоростью, заключавшеюся между нѣкоторымъ определеннымъ u и $u + du$, зависитъ отъ u , оно велико для такихъ u , которыхъ отъ нѣкоторому среднему значенію u весьма ничтожно для скоростей u , значительно отличающихся отъ этого средняго значенія, иначе говоря, число частицъ съ очень малою или очень большою скоростью ничтожно. Maxwell далъ для n слѣдующую формулу

$$n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N (km)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} km^2} u^2 du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Итакъ здѣсь N число всѣхъ молекулъ, n число молекулъ, скорости которыхъ заключаются между u и $u + du$, m масса одной молекулы. Величина k имѣетъ слѣдующее значеніе. Пусть G среднее значеніе всѣхъ величинъ u^2 ; G называется среднею квадратичною скоростью. Если бы всѣ молекулы обладали скоростью G , то энергія J_v поступательнаго движенія имѣла бы то же самое значеніе, какое она имѣетъ въ дѣйствительности; слѣд.

$$J_v = \sum \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} NmG^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Величина

$$i = \frac{1}{2} mG^2$$

представляетъ среднюю энергію поступательнаго движенія одной молекулы. Величина k въ (38) определяется формулою

$$k = \frac{3}{2i} = \frac{3}{2mG^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Вставляя сюда u изъ (38) и замѣняя сумму интеграломъ, имѣемъ

$$\Omega = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (km)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-km u^2} u^3 du.$$

Вводя новую переменную $u^2 = x$, имѣемъ

$$\Omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (km)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-km x} x dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (km)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{k^2 m^2}.$$

Последній интегралъ вычисляется легко, если его проинтегрировать по частямъ. Итакъ

$$\Omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{km}} \cdot \dots \dots \dots (44)$$

Вставляя (41), получаемъ

$$\Omega = G \sqrt{\frac{8}{\pi}} = 0,9212 G \dots \dots \dots (45)$$

Это весьма замѣчательное соотношение между среднею арифметическою скоростью Ω и среднею квадратичною G .

Примемъ наконецъ еще вопросъ о величинѣ той скорости U , около которой находятся величины наибольшаго числа скоростей, она называется наибѣрейшей скоростью. Мы получимъ ее, опредѣливъ условно, при которомъ выраженіе (38) достигаетъ максимума своего значенія. Приравнявъ производную отъ $e^{-\frac{1}{2} km u^2} u^2$ нулю и вставивъ U вмѣсто u , получаемъ

$$e^{-\frac{1}{2} km U^2} 2U - e^{-\frac{1}{2} km U^2} 2km U^3 = 0.$$

откуда

$$U = \frac{1}{\sqrt{km}} \dots \dots \dots (46)$$

Теперь (41) и (44) даютъ

$$\left. \begin{aligned} G &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} U \\ \Omega &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} U \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (47)$$

Оказывается, что

$$U < \Omega < G \dots \dots \dots (48)$$

Мы вывели формулы (13) $\rho v = \frac{1}{3} N m u^2$ и $\rho v = \frac{2}{3} J$ въ предположеніи, что всѣ молекулы обладают одною общею скоростью u . Если же выйти изъ формулы Maxwell'a о распредѣленіи скоростей между моле-

кулами и вычислить давленіе газа на стѣнку сосуда, то оказывается, что формула $p = \frac{2}{3} J$ остается вѣрною и мы получаемъ, см. (39),

$$p = \frac{2}{3} J = \frac{1}{3} Nmcr^2 \dots \dots \dots (49)$$

Итакъ въ формулахъ (1), (10) и (13) слѣдуетъ вмѣсто n положить не среднюю арифметическую скорость Ω , но среднюю квадратичную G .

Вводя Ω , см. (45), получаемъ

$$p = \frac{\pi}{8} Nm\Omega^2 \dots \dots \dots (50)$$

Формула (16) остается вѣрною для G и мы имѣемъ

$$(45) \text{ даетъ } \left. \begin{array}{l} G = \frac{485}{\sqrt{2}} \text{ метр.} \\ \quad \quad \quad \text{сек.} \\ \Omega = \frac{447}{\sqrt{2}} \text{ метр.} \\ \quad \quad \quad \text{сек.} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

Средняя квадратичная и средняя арифметическая скорости обратно пропорціональны корню квадратному изъ плотности δ газа. Мы имѣемъ при 0° :

для кислорода . .	$G = 461 \text{ м.}$	$\Omega = 425 \text{ м.}$	$U = 410 \text{ м.}$
для водорода . .	$G = 1843 \text{ »}$	$\Omega = 1698 \text{ »}$	$U = 1640 \text{ »}$

Формула (21), въ которой слѣдуетъ положить G вмѣсто n , и (45) показываютъ, что

$$\left. \begin{array}{l} G = G_0 \sqrt{1 + \alpha t} \\ \Omega = \Omega_0 \sqrt{1 + \alpha t} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

гдѣ G_0 и Ω_0 относятся къ 0° .

§ 11. Средняя длина пути. Длина пути l , который проходитъ молекула между двумя столкновеніями съ другими молекулами, очевидно должна быть величиною, колеблющеюся для даннаго газа въ широкихъ размѣрахъ. Иногда молекула, столкнувшись съ другою, пройдетъ затѣмъ длинный путь, случайно не встрѣчая на этомъ пути новой молекулы, а иногда вѣдѣть за однимъ столкновеніемъ тотчасъ же послѣдуетъ другое. Все зависитъ отъ случая. Но именно вездѣ тамъ, гдѣ мы имѣемъ дѣло съ весьма большимъ числомъ однородныхъ событій, выступаютъ изъ кажущейся случайности наиболѣе точные законы.

Втеченіе одной секунды происходитъ въ одномъ куб. см. воздуха непостижимо огромное число столкновеній между молекулами газа; еще большее число различныхъ путей l , пройденныхъ между столкновеніями. Среднюю изъ всѣхъ этихъ l обозначимъ черезъ L и назовемъ среднюю

При выводѣ формулъ (53) и (56) предполагается, что r весьма мало сравнительно съ L , т.-е. что r' весьма мало сравнительно съ r . Если не вводить этого предположенія, то получается болѣе точная формула

$$L = \frac{1}{1 - \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2} - \dots} \quad (57)$$

Такъ какъ λ и r неизвѣстны, то по этимъ формуламъ и невозможно найти L .

Введемъ въ (56) радиусъ r молекулы, равный $\frac{c}{2}$, и допустимъ, что въ единицѣ объема заключаются n молекулъ; тогда $n\lambda^3 = 1$, откуда $\lambda^3 = \frac{1}{n}$; (56) даетъ

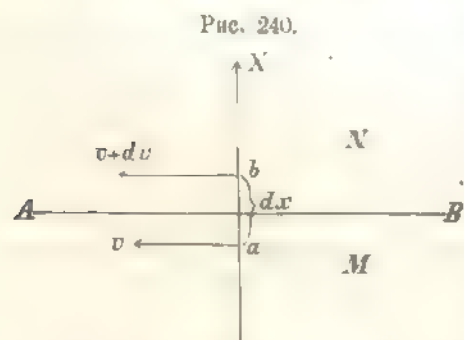
$$L = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}Q}.$$

Величина $Q = n\pi r^2$ есть сумма площадей поперечныхъ сѣченій всѣхъ молекулъ, содержащихся въ единицѣ объема газа. Последняя формула даетъ

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{2}L} \quad (58)$$

Это весьма замѣчательная формула, связывающая площадь Q и среднюю длину пути L .

§ 12. Внутреннее треніе въ газахъ. Когда соприкасающіеся слои M и N (рис. 240) какого-либо вещества движутся параллельно плоскости



AB ихъ геометрическаго раздѣла (соприкасаясь съ различными скоростями, то между слоями обнаруживается взаимодействие. На слой, движущійся быстрѣе, дѣйствуетъ нѣкоторая сила f , направленная обратно его движенію, т.-е. сила замедляющая, а на слой, движущійся медленнѣе, дѣйствуетъ такая же сила, ускоряющая его движеніе. Условимся силу f относить къ опредѣленной поверхности s соприкосновенія слоевъ; очевидно f пропорциональна s . Далѣе f должно быть тѣмъ больше, чѣмъ больше разность скоростей двухъ слоевъ. Проведемъ ось x -овъ перпендикулярно къ поверхности s ; пусть v есть скорость точки a одного слоя газа и $v + dv$ скорость точки b другого слоя, находящейся отъ a на разстояніи $ab = dx$. Сила f пропорціональна быстротѣ, съ которой скорость v мѣняется, если мысленно идти вдоль оси x -овъ, т.-е. она пропорціональна производной $\frac{dv}{dx}$, получаемой, если скорости v слоевъ разсматривать какъ функции координаты x .

т.-е. изъ разстоянія отъ какой нибудь начальной плоскости. Окончательно имѣемъ

$$f = \eta \frac{dv}{dx} \dots \dots \dots (59)$$

Величина η называется коэффициентомъ внутренняго трения или вязкости газа. Это величина *sum generis* характерная для даннаго газа; она численно равна силѣ, дѣйствующей на единицу поверхности ($s=1$) слоя, когда на единицу длины, взятой перпендикулярно къ слоямъ, скорость мѣняется на единицу ($\frac{dv}{dx}=1$). За единицу вязкости ($\eta=1$) принята при этомъ вязкость такого вещества, въ которомъ на единицу поверхности слоя ($s=1$) дѣйствуетъ единица силы ($f=1$) при упомянутомъ условіи $\frac{dv}{dx}=1$. Не трудно формулировать опредѣленіе *C. G. S.* единицы вязкости (f — дина на $s=1$ кв. см., когда на протяженіи одного сантиметра скорость мѣняется на 1 см. въ сек.).

Происхожденіе трения въ газахъ можно объяснить слѣдующимъ образомъ. Двигаясь по всевозможнымъ направленіямъ, молекулы слоя *M* попадаютъ въ слой *N*, гдѣ онѣ встрѣчаются съ молекулами, обладающими болѣею скоростью $v+dv$ по направленію, параллельному плоскости *AB*, чѣмъ скорость v , которую онѣ сами имѣютъ въ этомъ направленіи. Ясно, что при столкновеніяхъ онѣ замедляющимъ образомъ подѣйствуютъ на движеніе слоя *N*. Наоборотъ, молекулы, переходящія изъ *N* въ *M*, должны увеличивать скорость движенія параллельно *AB* молекулы, содержащіяся въ *M*. Вычисленіе даетъ для η выраженіе

$$\eta = \frac{1}{3} nmL\bar{v} \dots \dots \dots (60)$$

Здѣсь n число молекулъ въ единицѣ объема, m масса одной молекулы, L средняя длина пути (§ 11) и \bar{v} средняя скорость движенія молекулъ. Въмѣсто $\frac{1}{3}$ нѣкоторые ученые находятъ $\frac{1}{8}$, а также $\frac{1}{\pi} = 0.318$. Вставимъ (56) въ (60) и вспомнимъ, что $nv^2=1$, получаемъ

$$\eta = \frac{m\bar{v}}{3\sqrt{2}\pi r^2} \dots \dots \dots (61)$$

гдѣ r діаметръ молекулы. Величины m , r и \bar{v} зависятъ только отъ рода газа и отъ его температуры, но не зависятъ отъ его упругости, т.-е. отъ его плотности D . Отсюда слѣдуетъ замѣчательный законъ Maxwell'a:

Внутреннее треніе даннаго газа не зависитъ отъ его плотности D , т.-е. оно одинаковое, какъ въ сущномъ, такъ и въ разрѣженномъ газѣ. Такой, съ перваго взгляда, парадоксальный законъ объясняется тѣмъ, что если удвоить плотность, то вдвое болѣе число частицъ будетъ переходить изъ одного слоя въ другой, но зато они вдвое менѣ

или окончательно

$$L = \frac{\eta}{19,6 \sqrt{\delta}} \text{ см.}$$

Для воздуха $\eta = 0,000175$. $\delta = 1$ и слѣд.

$$L = 0,000009 \text{ см.} = 0,00009 \text{ мм.} \quad (63)$$

Итакъ средняя длина пути оказывается приблизительно равной одной десяти тысячной доли миллиметра. Число ν столкновений частицы въ сек. получаемъ, раздѣливъ среднюю скорость Q на длину пути L :

$$\nu = \frac{Q}{L} \quad (64)$$

для воздуха

$$\nu = \frac{44700}{0,000009} = 4980 \text{ миллионѣвъ.}$$

Наконецъ (58) даетъ возможность опредѣлить сумму Q площадей поперечныхъ сѣченій молекулъ, содержащихся въ кв. см. газа:

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{2}L} = \frac{19,6}{4\sqrt{2}} \frac{V\sqrt{2}}{\eta} = \frac{4,9}{\sqrt{2}} \frac{V\sqrt{2}}{\eta} \quad (65)$$

Вставивъ сюда L для воздуха, находимъ поразительно большое число. $Q = 18500$ кв. см. = 1,85 кв. метра.

Сопоставимъ нѣкоторые числа для L , ν и Q (давление 760 мм. и темпер. около 20°)

	L см.	ν милліоны	Q кв. см.
Водородъ	0,0000185	9480	8500
Азотъ	0,0000099	4760	17900
Кислородъ	0,0000106	4065	16700
Углекислота	0,0000068	5510	26000

§ 14. Размѣры и число молекулъ. Въ истекшее время существуетъ цѣлый рядъ методовъ приближительнаго опредѣленія размѣровъ молекулъ. Нѣкоторые изъ этихъ методовъ опираются на формулы кинетической теоріи газовъ; другіе основаны на изученіи явленій электролиза, на явленіяхъ оптическихъ, электростатическихъ и т. д. Укажемъ на два изъ этихъ методовъ.

Формулу (56) можно преобразовать аналогично тому, какъ мы изъ (53) вывели (55), обозначивъ черезъ N число молекулъ въ объемѣ v (Nv^3) и черезъ $\rho = \frac{4}{3} N\pi \left(\frac{r}{2}\right)^3$ объемъ, занимаемый молекулами. Имѣемъ

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v^3}{\rho} = \frac{Nv^3}{6\sqrt{2} \cdot \frac{4}{3} N\pi \left(\frac{r}{2}\right)^3} = \frac{vr}{6\sqrt{2}}$$

Если ввести величину

$$n = \frac{v}{v'} \dots \dots \dots (66)$$

то получается для диаметра ρ молекулы формула

$$\rho = \sqrt[3]{2nL} \dots \dots \dots (67)$$

Когда газъ приведенъ въ жидкое состоянiе, то объемъ полученной жидкости по всей iзрѣянности мало превышаетъ величину v' и потому v не болѣе отношенiя плотности вещества въ газообразномъ состоянii къ плотности того же вещества въ жидкомъ состоянii. Плотность жидкаго кислорода около 0,9, плотность газообразнаго при 0 и 760 мм. равна 0,00143; отсюда $n = 0,0016$. Положим $L = 0,00001$ см., получаемъ

$$\rho = \sqrt[3]{2 \times 0,0016 \times 0,00001 \text{ см.}} = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ мм.}$$

Итакъ верхнii предѣлъ для диаметра молекулы кислорода приблизительно одна миллионная миллиметра.

Другой путь опредѣленiя ρ основанъ на выраженii отступенiй отъ закона Бойля-Мариотта формулою van der Waals'a (стр. 261). Величина b находится въ простой зависимости отъ объема, занимаемаго молекулами газа. Ограничиваемся сообщенiемъ результата для воздуха получается приблизительно ρ равно 0,3 миллионныхъ долей миллиметра, что довольно хорошо согласуется съ предыдущимъ.

Въ § 13 мы видѣли, какъ опредѣляется величина

$$Q = n\pi \left(\frac{\rho}{2}\right)^2.$$

гдѣ n число молекулъ въ единицѣ объема. Мы имѣемъ

$$n = \frac{4Q}{\pi^2} \dots \dots \dots (68)$$

Вставляя для кислорода $Q = 16700$ кв. см. и $\rho = 0,3 \cdot 10^{-7}$ см., получаемъ

$$n = 20 \cdot 10^{18} \dots \dots \dots (69)$$

Въ одномъ куб. см. воздуха, а слѣд. по закону Авогадро и всякаго другого газа, находится при 0 и 760 мм. давления около двадцати триллионовъ молекулъ.

Равенство $n\lambda^3 = 1$ даетъ намъ среднее разстоянiе λ молекулъ.

λ — отъ 3 до 4-хъ миллионныхъ миллиметра.

Если расположить рядомъ молекулы, содержащiяся въ одномъ куб. сантим. воздуха, то получилась бы нить, длина которой въ 50 разъ превышаетъ бы длину земнаго экватора. Величина молекулы относится къ

величинѣ обыкновенной крупной цѣбынки примѣрно, какъ куб. сантиметръ относится къ величинѣ земного шара.

Мы замѣтили въ этой главѣ лишь самые основные контуры того обширнаго и стройнаго зданія, которое называется кинетическою теоріей газовъ. Въ дальнѣйшемъ намъ еще придется сослаться на то, что здѣсь было изложено и выведено.

ЛИТЕРАТУРА.

Кинетическая теорія газовъ.

- Don. Bernoulli* Hydrodynamica, 1738 (ср. Pogg. Ann. 107 p. 490, 1859.
Heraclith Annals of philosophy, New series Vol. 1 p. 273, 340, 401, 1821 г.
Joule. Phil. mag. (4) 14 p. 211, 1857.
A. Kroenig. Pogg. Ann. 99 p. 315, 1856.
Clausius. Pogg. Ann. 100 p. 353, 1857, 105 p. 239, 1858, 115 p. 1, 1862. Phil. Mag. (4) 14 p. 108; 17 p. 81; 23 p. 417 и 512, 1862.
Clausius Die kinetische Theorie der Gase. (Mechanische Waermetheorie, 2-te Aufl., Bd. III). Braunschweig, 1889—1891.
Maxwell Phil. Mag. (4) 19 p. 22, 1860 г., 35 p. 129, 185, 1868. Cambridge. Phil. Trans. 18, part. 3 p. 547.
L. Boltzmann. Wien Ber. 58, 63, 66, 72, 74, 77, 78, 84, 94, 1868—1886; W. A. 8 p. 633, 1878; 11 p. 529, 1880; 57 p. 773, 1896.
L. Boltzmann. Vorlesungen über Gastheorie. Leipzig, 1895.
O. E. Meyer Kinetische Theorie der Gase, Breslau 1895 (2-oe изд.).
O. E. Meyer W. A. 7 p. 317, 1879, 10 p. 296, 1889.
Н. Нернст. Ж. Ф.-Х. Общ. 17 стр. 114, 281, 1883, 18 стр. 93, 295, 1884; 21 стр. 14, 76, 1889, 22 стр. 44, 1890; Exner's Rep. 27 p. 515, 1891.
Watson. A Treatise on the kinetic theory of Gases. Oxford 1876.
H. A. Lorenz. W. A. 12 p. 127, 660, 1881.
Stefan. Wien. Ber. 65 p. 360, 1872.
Noyes and Goodwin Phys. Review. IV p. 207, 1896.
Stankewitsch. W. A. 29 p. 163, 1886.
Станкевичъ. Кинетическая теорія газовъ. Москва. 1884.
Станкевичъ. Теорія многоатомныхъ газовъ. Варшава. 1893.
Столтоновъ Очеркъ развитія нашихъ свѣдѣній о газахъ. Москва, 1879.
 По вопросу о законѣ Maxwell'a см интересную полемику между Bertrand'омъ и Boltzmann'омъ въ С. R. 123, 1896 г.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Газы въ состояніи движенія и распаденія.

§ 1. Работа расширенія или сжатія газа. Положимъ, что объемъ v_1 газа, находящагося подъ давленіемъ p_1 , увеличился или уменьшился до новаго объема v_2 , въслѣдствіе того, что давленіе p_1 стало непрерывно (не скачками) уменьшаться или увеличиваться до новаго значенія p_2 . Требуется вычислить ту работу r , которую въ первомъ случаѣ совершитъ газъ, а во второмъ — внѣшняя причина, сжимающая газъ. Пока измѣняется

боты r расширения, притекаетъ отъ этого вещества къ газу, температура T котораго, такимъ образомъ не мѣняется. Давленіе p и объемъ v связаны въ этомъ случаѣ закономъ Бойля-Марготта и мы имѣемъ

$$pv = p_1 v_1 = p_2 v_2 = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ R постоянная формулы Клапейрона (стр. 306). Формула (3) даетъ $p = \frac{RT}{v}$; вставляя это въ (2), получаемъ, такъ какъ T постоянное,

$$r = RT \int^v \frac{dv}{v} = RT \lg \frac{v}{v_1}$$

На основаніи (3) имѣемъ такія формулы для r

$$r = RT \lg \frac{v}{v_1} = RT \lg \frac{p_1}{p_2} = p_1 v_1 \lg \frac{v}{v_1} = p_2 v_2 \lg \frac{v}{v_1} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Здѣсь \lg знакъ натурального логарифма. Тѣ же формулы даютъ работу, которую надо израсходовать, чтобы объемъ газа при постоянной температурѣ уменьшить отъ v_1 до v_2 , причемъ эквивалентное количество тепла $q = Ar$, гдѣ A термическій эквивалентъ работы (стр. 105), перейти отъ сжимаемаго газа къ окружающему его веществу.

§ 2. Внезапное расширеніе или сжатіе газа: адиабатическое или изентроническое измѣненіе состоянія газа. Предположимъ, что объемъ v_1 газа въ столь короткій промежутокъ времени переходитъ въ объемъ v_2 , что течение этого времени газъ не успѣетъ получить теплоты отъ окружающихъ его тѣлъ, или отдать теплоту этимъ тѣламъ. Вся энергія, потребная на производство работы расширения, должна быть взята изъ самого газа, который станетъ охлаждаться, наоборотъ, при сжатіи газа теплота, эквивалентная работѣ вышннихъ силъ, остается въ немъ и онъ нагревается. Измѣненіе состоянія тѣла, при которомъ не происходитъ теплосовмѣщенія между тѣломъ и остальнымъ міромъ, называется адиабатическимъ или изентроническимъ.

Если бы мы могли газъ окружить абсолютными непроводниками тепла, то и при медленныхъ измѣненіяхъ объема происходили бы адиабатическія измѣненія его состоянія.

Найдемъ прежде всего связь между v и p при адиабатическихъ измѣненіяхъ идеальнаго газа. Когда объемъ газа, находящагося подъ давленіемъ p , увеличится на dv , то производится работа $p dv$, см. (1), и на это тратится количество тепла $dq = A p dv$. Эта теплота берется изъ самого газа, температура t котораго измѣнится на $-dt$ градусовъ. Но на одно только нагреваніе газа на 1° требуется количество тепла c_v (стр. 397), слѣд. $dq = -c_v dt$. Такимъ образомъ

$$A p dv = -c_v dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

пропорционально объему. Если $k = 1.41$ и объемъ уменьшится въ 10 разъ, то упругость возрастетъ въ $10^{1.41} = 25.7$ разъ.

Обратимся къ вопросу о температурѣ газа, подвергаемаго адиабатическимъ измѣненіямъ. Если въ (5) вставить вмѣсто p его значеніе, взятое изъ формулы $p = RT/v$, то получится

$$\frac{AR T}{v} dv = -c_v dt;$$

(6) даетъ отсюда

$$\frac{(c_p - c_v) T dv}{v} = -c_v dt.$$

Подставимъ dT вмѣсто dt , раздѣлимъ все равенство на $c_v T$ и введемъ $k = \frac{c_p}{c_v}$; получается

$$(k-1) \frac{dv}{v} = -\frac{dT}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Если начальные объемъ и температура v_1 и T_1 , окончательные v_2 и T_2 , то (10) даетъ

$$(k-1) \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

$$(k-1) \lg \frac{v_2}{v_1} = - \lg \frac{T_2}{T_1} = \lg \frac{T_1}{T_2}$$

$$\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} = \frac{T_1}{T_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$T_1 v_1^{k-1} = T_2 v_2^{k-1}.$$

Отсюда заключаемъ, что при адиабатическомъ измѣненіи состоянія газа, объемъ v и абсолютная температура T связаны уравненіемъ

$$T v^{k-1} = \text{Const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Абсолютныя температуры газа при адиабатическихъ измѣненіяхъ его состоянія, обратно пропорціональны $(k-1)$ -ымъ степенямъ его объема.

Положимъ, что начальная температура $t_1 = 0^\circ$, т.е. $T_1 = 273^\circ$. Найдемъ температуры t_2 газа послѣ внезапнаго уменьшенія его объема до половины. (11) даетъ, такъ какъ $\frac{v_1}{v_2} = 2$,

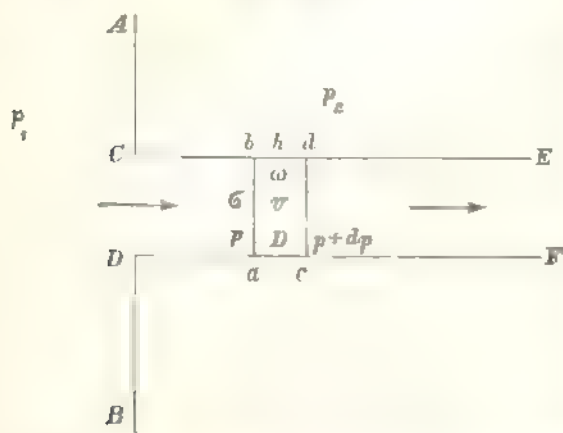
$$T_2 = 273 \cdot 2^{k-1} = 273 \cdot 2^{0.41} = 371,2 = t_2 + 273 : t_2 = 98^\circ.2.$$

Газъ нагреется отъ 0° до $98^\circ.1$.

Если объемъ v_1 внезапно уменьшить до $v_2 = 0.1v_1$, то газъ нагреется отъ 0° до 241° ; если сдѣлать $v_2 = 0.01v_1$, то газъ нагреется до 1018° . Если газъ былъ сжатъ до 200 атмосферъ при 0° и внезапно расширенъ до одной атмосферы, то онъ охладится до -240° .

§ 3. Истечение газа из малого отверстия и из тонкой трубки. Элементарная, но, какъ мы увидимъ, далеко не строгая теорія истечения газовъ изъ малыхъ отверстій заключается въ слѣдующемъ. Пусть AB (рис. 242) стѣнка, отдѣляющая лѣвое пространство, гдѣ давленіе газа p_1 ,

Рис. 242.



гдѣ dp , очевидно, величина отрицательная. Когда элементъ перемѣстится на свою же длину, то его скорость нѣсколько увеличится. На основаніи закона живыхъ силъ мы знаемъ, что приращеніе живой силы элемента равно работѣ вѣншихъ силъ. Первая величина есть $d\left(\frac{1}{2}\omega^2\right) = \frac{1}{2}\mu d(\omega^2) = \frac{1}{2}\omega h D d(\omega^2)$, вторая равна $p\omega h - (p + dp)\omega h = -\omega h dp$.

Итакъ $\frac{1}{2}\omega h D d(\omega^2) = -\omega h dp$, или

$$d(\omega^2) = -\frac{2dp}{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Если начальная скорость $\omega = 0$, окончательная (когда $p = p_2$) Ω , то (13) даетъ

$$\Omega^2 = -\frac{2}{D} \int_{p_1}^{p_2} dp = \frac{2(p_1 - p_2)}{D}.$$

или

$$\Omega = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{D}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Эта формула обыкновенно приводится въ элементарныхъ курсахъ. Она показываетъ, что при данныхъ p_1 и p_2 скорость истечения газа обратно пропорціональна квадр. корню изъ плотности газа. Для вычисленія скорости Ω удобнѣе ввести вѣсь P единицы объема газа.

равный Dg ; слѣд. $D = \frac{P}{g} = \frac{P'}{g}$, если P , въсь единицы объема воздуха, и δ , какъ всегда, плотность газа относительно воздуха. Тогда

$$\Omega = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)}{P_0 \delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Если $p_1 = 1$ атмосфер. = 10333 килогр. на кв. метръ $p = 0$, то (15) дастъ, если еще вставить $g = 9.81$ метр. и въсь куб. метра воздуха 1.29 килогр.,

$$\Omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \cdot 10333}{1.29}} = \frac{396}{\sqrt{\delta}} \text{ метра.}$$

Неточность нашего вывода заключается прежде всего въ томъ, что мы приняли D въ (13) за величину постоянную, что допустимо для жидкостей, но не вѣрно для газовъ. Да и не мы предположили, что струя имѣть вездѣ одно и то же поперечное сѣченіе, между тѣмъ какъ она въ действительности сперва суживается, а затѣмъ расширяется внутри дѣяго пространства струи, весьма широкая, суживается до сѣченія, равнаго площади отверстия. Не входи въ подробности касательно втораго вопроса рассмотримъ только влияние неостоянства величины D . Зависимость плотности D отъ переѣннаго давленія p можетъ быть весьма различная, смотря по тому, какой происходитъ тепловой обменъ между вытекающимъ газомъ и окружающими его тѣлами. Рассмотримъ два крайнихъ случая.

1. Изотермическое истечение газа. Расширяющійся газъ совершаетъ работу, и слѣд. тратитъ часть своей тепловой энергии. Но мы допустимъ, что истечение происходитъ столь медленно, что вся необходимая теплота успѣваетъ притечь извнѣ, такъ что температура газа остается постоянною. Въ такомъ случаѣ по закону Бойля-Маркетта

$$\frac{D}{D_1} = \frac{p}{p_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

гдѣ D_1 плотность газа въ извомъ пространствѣ. Вставимъ D изъ (16) въ (13), получаемъ

$$d(\omega^2) = -2 \frac{p_1}{D_1} \frac{dp}{p}$$

отсюда, если при $p = p_1$ скорость $\omega = 0$, а при $p = p$ мы имѣемъ $\omega = \Omega$,

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= -2 \frac{p_1}{D_1} \int_{p_1}^p \frac{dp}{p} = 2 \frac{p_1}{D_1} \lg \frac{p_1}{p} \\ \Omega &= \sqrt{2 \frac{p_1}{D_1} \lg \frac{p_1}{p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17) \end{aligned}$$

Если температура газа t , его плотность относительно воздуха δ , то

$$D_1 = \frac{1.29 p_1 \delta}{10333 g (1 + \alpha t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Вставив это выражение въ (17), получаемъ

$$\Omega = \sqrt[2]{\frac{2 \cdot 981 \cdot 10333 \cdot (1 - \gamma t)}{1,29}} \lg \frac{p_1}{p_2} = 396 \sqrt{\frac{1 - \gamma t}{\gamma}} \lg \frac{p_1}{p_2} \text{ метр.} \quad (19)$$

И по этой формулѣ скорость Ω оказывается обратно пропорціональною корню квадратному изъ плотности δ газа.

Если воздухъ при $t=0$ переходитъ изъ пространства, гдѣ $p_1=2$ атм., въ свободный воздухъ ($p_2=1$ атм.), то $\Omega=396 \sqrt{\lg 2}=330$ м. При $p_2=0$ получаемъ $\Omega=\infty$; это показываетъ что истечение въ пустоту не можетъ происходить изотермически.

2. Адиабатическое истечение газа. Гораздо ближе къ действительности должно быть предположеніе, что во время истечения газа вовсе не происходитъ тепловаго обмена между нимъ и другими тѣлами, т. е., что во время истечения состояніе газа мѣняется адиабатически. Объемъ v даннаго количества газа и давленіе p связаны уравненіемъ (9) $p v^k = \text{const.}$ Отсюда слѣдуетъ

$$\left(\frac{D}{D_1}\right)^k = \frac{p}{p_1} \text{ или } \frac{D}{D_1} = \sqrt[k]{\frac{p}{p_1}}.$$

Далѣе (13) даетъ

$$d(\Psi) = - \frac{2 p_1^{\frac{k}{k-1}}}{p^{\frac{1}{k-1}}} dp$$

и слѣд.

$$\Omega = - \frac{2 p_1^{\frac{k}{k-1}}}{D_1} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{2 k p_1^{\frac{k}{k-1}}}{(k-1) D_1} \left(p_1^{\frac{k-1}{k}} - p_2^{\frac{k-1}{k}} \right)$$

и

$$\Omega = \sqrt{\frac{2 k p_1^{\frac{k}{k-1}}}{(k-1) D_1} \left(p_1^{\frac{k-1}{k}} - p_2^{\frac{k-1}{k}} \right)} \quad (20)$$

И здѣсь мы получимъ, что скорость Ω обратно пропорціональна корню квадратному изъ плотности δ газа, если вставимъ (18). Тогда (20) даетъ окончательно

$$\Omega = 396 \sqrt{\frac{k}{k-1} \cdot \frac{1 - \gamma t}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad (21)$$

При переходѣ въ пустоту ($p=0$) получается конечная скорость независящая отъ начальнаго давленія p_1 , для воздуха при $t=0$ она равна если положить $k=1.41$.

$$\Omega = 396 \sqrt{3.44} = 545 \text{ м.}$$

Если Ω и Ω_1 скорости истечения двухъ газовъ при одинаковыхъ обстоятельствахъ, δ и δ_1 ихъ плотности, и если можно предположить, что значенія для k у нихъ одинаковыя, то

$$\frac{\Omega}{\Omega_1} = \frac{\delta}{\delta_1} \dots \dots \dots (22)$$

Бунзенъ построилъ особый приборъ для сравненія скоростей Ω у различныхъ газовъ, что и дало ему возможность опредѣлить ихъ плотности относительно воздуха: результаты получались хорошия, напр. для гремучаго газа $\delta = 0.413$ вмѣсто 0.415.

Струя газа, быстро вытекающая изъ отверстія, увлекаетъ окружающія ее газы и разбѣиваетъ его. На этомъ основано устройство пульверизаторовъ.

Вопросъ объ истеченіи газовъ и паровъ изъ отверстій изучать теоретически и экспериментально Н. Parenty (Ann. chim. et phys. (7) 8, p. 5, 1896).

Когда газъ подъ давленіемъ протекаетъ черезъ весьма тонкую трубку, то его внутреннее треніе получаетъ преобладающее значеніе. Такое протеканіе иногда называютъ транспираціей. Ограничиваемся указаніемъ на формулу. Пусть p давленіе газа на одномъ, p_1 на другомъ концѣ капиллярной трубки (длина которой L , а площадь поперечнаго сѣченія σ ; если γ коэффициентъ внутренняго тренія (стр. 407) то объемъ V газа, протекающаго въ t секундъ черезъ трубку, приведенный къ давленію $\frac{1}{2}(p_1 + p)$, равенъ

$$V = \frac{(p_1 - p) \sigma^2 t}{8 \gamma L} \dots \dots \dots (23)$$

Пользуясь этою формулою, можно найти γ .

§ 4. Взаимная диффузія газовъ. Терминомъ диффузія обозначаютъ вообще такую грану явленія постепеннаго проникновенія одного рода матеріи въ другую или черезъ другую. Сметая по роду этихъ двухъ матерій, отличаютъ другъ отъ друга различные случаи диффузіи газовъ и жидкостей.

Мы сперва разсмотримъ взаимную диффузію двухъ газовъ. Помѣстимъ вертикально одинъ надъ другимъ два сосуда, наполненные двумя различными газами, не дѣйствующими химически другъ на друга и находящимися подъ одинаковымъ давленіемъ p ; при этомъ верхній сосудъ долженъ содержать болѣе легкій газъ. Если соединить эти сосуды трубкой, то оказывается, что газы мало-по-малу начинаютъ смѣшиваться; болѣе легкій, опускается, проникаетъ въ болѣе тяжелый газъ, медленнѣе кинутъ тотъ послѣдній, поднимаясь, примѣшивается къ газу болѣе легкому. Мы говоримъ, что одинъ газъ диффундируетъ въ другой. Черезъ нѣкоторое время оба сосуда содержатъ однородную смѣсь обоихъ газовъ.

Такое явленіе диффузіи легко объясняется съ точки зрѣнія кинетической теоріи газовъ. Молекулы одного газа свободно двигаясь по всевозможнымъ направленіямъ, мало-по-малу проникаютъ во внутрь другого газа; медленность диффузіи объясняется вѣщераывными столкновеніями этихъ

молекулы съ молекулами другого газа. Пока диффузия не окончится, мы имеемъ на различныхъ высотахъ x , считаемихъ хотя бы отъ дна нижняго сосуда, смѣсь съ различнымъ процентнымъ содержаніемъ обоихъ газовъ, или, иначе, съ различными парціальными давленіями p_1 и p_2 этихъ газовъ, причемъ однако для всѣхъ значеній величины x , т. е., во всѣхъ горизонтальныхъ слояхъ, $p_1 + p_2 = p$.

Количество газа, проходящаго въ теченіе времени t черезъ горизонтальную площадь s по направлению x , пропорціонально скорости, съ которою парціальное давленіе p_1 этого газа уменьшается по направлению x . Если положить для данного момента $p_1 = f(x)$, то получается для объема этого газа, приведеннаго къ единицѣ давленія, следующая формула

$$v = -kst \frac{dp_1}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Множитель k называется коэффициентомъ диффузии; онъ численно равенъ объему, занимаемому при единицѣ давленія тѣмъ количествомъ газа, которое въ единицу времени ($t = 1$) проходитъ черезъ единицу горизонтальной сѣчени ($s = 1$), когда парціальное давленіе этого газа въ смѣсь мѣняется на единицу при переходѣ въ вертикальномъ направленіи на единицу длины ($\frac{dp_1}{dx} = 1$). Коэффициентъ k зависитъ отъ рода взятыхъ двухъ газовъ и отъ ихъ температуры. Вотъ нѣкоторые его значенія:

	k
$H - O$. . .	$0,722 \begin{smallmatrix} (\text{см.})^2 \\ \text{сек.} \end{smallmatrix}$
$H - CO$. . .	$0,642$
$H - CO_2$. . .	$0,558$
$O - CO_2$. . .	$0,141$
$O - CO$. . .	$0,180$

При этомъ s выражено въ кв. см., время въ секундахъ.

Коэффициентъ k приблизительно пропорціоналенъ квадрату абсолютной температуры газовъ, диффундирующихъ другъ въ друга.

§ 3. Диффузія газовъ черезъ пористыя перегородки: эффузія. Если съ двухъ сторонъ отъ пористой перегородки находится два различныхъ газа, то они также начинаютъ смѣшиваться, проникая черезъ перегородку. Явленіе проникновенія газовъ черезъ пористую перегородку, въ отличіе отъ другихъ случаевъ диффузии, иногда называютъ эффузіей. Этимъ явленіемъ въ особенности занимались Graham (1834 и 1846) и Bunsen (1857).

Graham вывелъ изъ своихъ опытовъ законъ:

Скорость диффузии газовъ черезъ пористую перегородку пропорціональна давленію, подъ которымъ газы находятся, и обратно пропорціональна корню квадратному изъ ихъ плотности δ .

Этотъ законъ легко понять, ставъясь на точку зрѣнія кинетической теоріи газовъ. Такъ какъ при одинаковыхъ давленіяхъ и температурѣ

въ равныхъ объемахъ заключается одинаковое число молекулъ различныхъ газовъ. то надо констатировать, что скорость проникновения газовъ черезъ пористую перегородку должна главнымъ образомъ зависеть отъ средней скорости \bar{Q} поступательныхъ движений молекулъ. Но мы видели, что скорость \bar{Q} обратно пропорциональна $\sqrt{\delta}$. см. (51) стр. 394, чѣмъ и объясняется законъ диффузии.

Пористая перегородка можетъ состоять изъ деобожженной глины, изъ графита, глина, мѣла, гипса, фарфора, скатаннаго корешка гипрата извести, магнезии и т. под.

Приборъ Graham'a изображенъ на рис. 243. Въ цилиндръ CD вставленъ никелеая трубка AB обложенная свинцомъ; она открыта снизу, а сверху закрыта пористой перегородкой B . Цилиндръ CD закрытъ крышкою, сквозь нее проходятъ изъ трубки E и F , черезъ которыя по направлению показанныхъ стрѣлками, непрерывно проходятъ потоки газа. Трубка AB сперва вполнѣ наполняютъ ртутью и низкимъ концомъ опускаютъ въ глубокую ртутную ванну. Газъ начинаетъ проникать черезъ перегородку B и ртуть опускается. Когда она достигла определенной высоты, поднимаютъ трубку постепенно, такъ чтобы высота ртутнаго столба въ ней оставалась безъ измѣненія; тогда упругость газа въ AB одѣтъ величиною постоянною, несмотря на непрерывно увеличивающееся его количество. Опредѣляютъ время t въ теченіе котораго объемъ газа въ AB увеличивается на некоторую опредѣленную величину (2,2 куб. см. въ опытахъ Graham'a). Следующимъ образомъ подтверждается, что эти времена t прямо пропорциональны $\sqrt{\delta}$, откуда и слѣдуетъ, что скорость диффузии обратно пропорціональна $\sqrt{\delta}$.

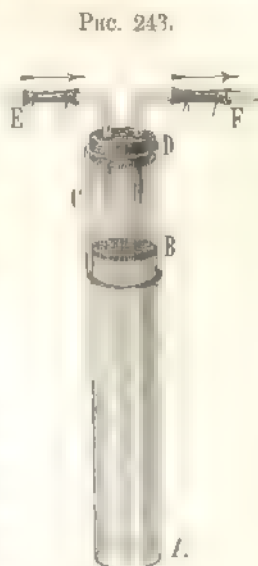


Рис. 243.

	t	$\sqrt{\delta}$
Кислородъ	1	1
Воздухъ	0,9501	0,9507
Углекислота	1,1860	1,1760
Водородъ	0,2505	0,2502

Далѣе окажется, что время t обратно пропорціонально разности давленій газа съ двухъ сторонъ отъ пористой перегородки.

Если трубку AB предварительно наполнить какимъ нибѣ газомъ, а черезъ CD пропускать струю другого газа, то первый начинаетъ выходить изъ трубки, а второй входитъ въ нее. Черезъ некоторое время оказывается, что въ трубкѣ находится только второй газъ, но уже не въ томъ количествѣ, въ которомъ первоначально въ трубкѣ находился первый газъ; эти количества обратно пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ плотностей газовъ. Dufour нашелъ, что диффузия сопровождается измѣненіемъ темпера-

туры; съ той стороны перегородки, черезъ которую входитъ газъ болѣе легки, диффундирующий быстрее, происходитъ повышение, съ другой ея стороны — понижение температуры. Фейдтсенъ замѣтилъ и обратное явленіе, названное термо-диффузіей, если съ двухъ сторонъ отъ пористой перегородки находится одинъ и тотъ же газъ при одинаковомъ давленіи, и если одну сторону перегородки сдѣлать теплѣе другой, то газъ начинаетъ проходить черезъ нее по направленію отъ болѣе холодной къ болѣе теплой сторонѣ.

Если съ одной стороны отъ пористой перегородки находится смѣсь неодинаково плотныхъ газовъ, то они проходятъ черезъ перегородку съ различною скоростью, съѣднѣвшею составъ смѣси газомъ при диффузии мѣняется. Повторяя опытъ многократно, можно иногда почти вполнѣ отдѣлать одинъ газъ отъ другого на этомъ основаніи, особаго рода аппаратъ, названный атмолизомъ.

Изъ множества опытовъ, обнаруживающихъ различную способность газовъ къ диффузии, опишемъ одинъ. Стаканъ *A* (рис. 244) изъ пористой глины (каковыми пользуются при устройствѣ элементовъ Даниеля и друг.) установленъ вверхъ дномъ и закрытъ внизу пробкою, черезъ которую проходитъ трубка *b*, опущенная шлангомъ въ сосудъ съ водою (подрапанною) и трубка *c*, соединенная съ резервуаромъ водорода или свѣтлѣйшаго газа. Пока газъ входитъ въ *A* и вытѣсняетъ воздухъ черезъ трубку *b*, видны въ шлангѣмъ сосудъ пузырьки поднимающіеся изъ воды воздуха. Но если затѣмъ прекратить дѣйствіе того, что газъ быстро выходитъ изъ стакана *A*, чѣмъ наружный воздухъ всасывается въ него вонти.

§ 6. Диффузія газовъ черезъ каучукъ и черезъ накалинные металлы. Mitchell (1831) первый показалъ, что газы способны проникать черезъ тонкія

пластинки каучука. Graham наблюдалъ диффузію газовъ черезъ каучукъ въ пустоту. Оказалось, что скорость этой диффузии весьма различна для различныхъ газовъ, не находясь въ той зависимости отъ плотности δ , какъ диффузія черезъ пористыя перегородки. Для скорости v диффузии онъ нашелъ следующие относительныя числа

N	CO	CH_4	O	H	CO_2
$v = 1$	1.113	2.15	2.56	5.50	13.59

Замѣчательна быстрота диффузии для O сравнительно съ N . Если воздухъ прошелъ черезъ пластинку каучука, то въ немъ содержится уже не 21%, но 40% кислорода.

Черезъ Pt и Fe , находящиеся при красномъ каленіи, диффундируетъ

водорода: 1 кв. метръ поверхности платиновой трубки, толщина стѣнокъ которой 1.1 мм., пропускаетъ въ 1 мин. при красномъ каленіи 490 куб. см. водорода. Накаленная палладіевая трубка, черезъ которую пропускается смесь H и CO , вполне отдѣляетъ эти газы другъ отъ друга: только H проходитъ черезъ ея стѣнки. Сересоръ при высокой температурѣ пропускаетъ значительныя количества кислорода. Надо думать, что во всѣхъ этихъ случаяхъ мы имѣемъ дѣло съ поглощеніемъ газа каучукомъ или металломъ, и затѣмъ съ выдѣленіемъ его съ той стороны, гдѣ пластинка не соприкасается съ газомъ: параллельно съ этимъ происходитъ внутри пластинки и дѣйствительная диффузія.

§ 7. Диффузія газовъ черезъ жидкости. Только-что сказанное по всей вѣроятности относится и къ случаю диффузіи газовъ черезъ слой жидкости: съ одной стороны слой газъ соприкасается жидкостью, а съ противоположной онъ изъ нея выдѣляется, но въ то же время происходитъ диффузія газа внутри слоя.

Мыльные пузыри, плавающие на уксусной, налитой въ открытый стаканъ, постепенно дѣлаются тяжелѣе и увеличиваются въ объемѣ вслѣдствіе проникновенія CO_2 во внутрь пузыря. Если внутри длинной стеклянной трубки, закрытой съ одной стороны, помѣстить поперечную пленку изъ мыльной воды, и затѣмъ съ двухъ сторонъ отъ пленки ввести въ трубку различныя газы, то они начинаютъ скользить вдоль трубки вслѣдствіе того, что эти газы неодинаково быстро проходятъ черезъ нее и потому давленіе въ закрытой части трубки увеличивается или уменьшается.

Wroblewski изслѣдовалъ постепенное поглощеніе газа столбомъ жидкости, надъ которымъ онъ находится. Оказалось, что количество поглощенного газа пропорціонально коэффициенту растворимости газа въ жидкости, коэффициенту диффузіи, давленію газа и корню квадратному изъ времени. Этимъ же вопросомъ занимается Stefan Job. Muller и Hainer.

Опыты Exner'a показали, что скорость диффузіи газа черезъ жидкую пленку прямо пропорціональна коэффициенту растворимости газа въ жидкости и обратно пропорціональна корню квадратному изъ плотности газа.

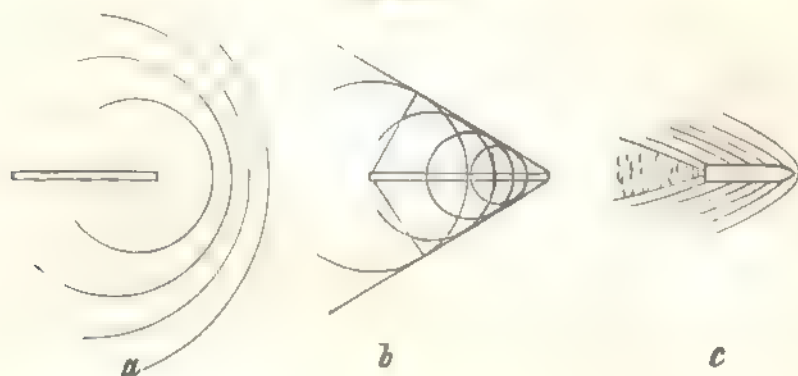
§ 8. Сопротивленіе газовъ движенію твердыхъ тѣлъ. Въ главѣ, посвященной свойствамъ газовъ, находящихся въ движеніи, мы можемъ рассмотреть и вліяніе какаго-либо и движущагося въ немъ твердое тѣло имѣютъ другъ на друга, тѣмъ болѣе, что и газъ, окружающій тѣло, не остается въ покоѣ.

Твердое тѣло, движущееся въ газѣ, вызываетъ передъ собою ступеніе, за собою разрывъ газа. Если твердое тѣло производитъ быстрыя колебательныя движенія, то оно вызываетъ въ газѣ поперечныя ступенія и разрывы, которыя распространяются во всѣ стороны: это явленіе мы рассмотримъ ближе въ ученіи о звукѣ.

Когда шаръ, цилиндръ, дискъ, кольцо и т. под. тѣла вращенія вращаются около своихъ осей, то поверхности тѣла и газа только скользятъ одна по другой, причемъ однако нѣкоторый ближайшій слой газа увлекается

снаряда меньше скорости звука, то эти волны идутъ быстрее ядра, какъ показано на рисункѣ 245*а*: при скорости, превышающей скорость звука, теоретически должно получаться въ данный моментъ распределение возмущенныхъ поверхностей стояния, изображенное на среднемъ рисункѣ области стояния должна быть ограничена поверхностью конуса спуска половины угла у вершины которого равенъ отношению скорости звука къ скорости ядра. Опыты указали на болѣе сложное явленіе, какъ видно изъ рисунка 245*б*. Наружная граница области стояния оказывается поверхностью параболоида вращения, внутри этой области замѣчаются полосы, и наконецъ за снарядомъ

Рис. 245



обнаруживается пространство, въ которомъ происходитъ стояное вихревое движеніе воздуха, прывающагося въ него со всѣхъ сторонъ.

Двигавшійся газъ производитъ давленіе на тѣло и можетъ имъ привести въ движеніе, этимъ движеніемъ пользуется для измѣренія скорости движенія газа. Сюда относятся приборы, служащіе для измѣренія скорости вѣтра, или скорости теченія воздуха или другихъ газовъ въ трубахъ. Описаніе и устройство различныхъ анемометровъ и анемометровъ, относятся къ метеорологии. Мы ограничимся указать на анемометры Robinson'a и Combes'a. Первый изображенъ на рис. 246. Онъ состоитъ изъ вертикальной оси AB , на которую насажены два взаимно перпендикулярныхъ стержня, къ концамъ которыхъ прикрѣплены полныя полушарія A , B' , C' и D . Если вѣтеръ имѣетъ направленіе стрѣлки 1 и 2, то ось AB и полушарія вращаются по направленію стрѣлки 1. Безконечный вѣнтъ на оси AB и счетчикъ C даютъ возможность измѣрить скорость v' движенія полушарій; тогда скорость v вѣтра определяется по формулѣ вида $v = kv'$, гдѣ k постоянный множитель, легко определяемый разнѣ навсѣгда для данного прибора.

На рис. 247 изображенъ анемометръ Combes'a, который вставляется въ ту трубу, по которой течетъ газъ. Скорость вращенія наклонно поставленныхъ пластинокъ KK' служитъ мѣрою скорости этого теченія.

не вѣрнымъ. Cannizzaro, Корр и Кекуле почти одновременно (1858) указали, что аномальныя плотности паровъ должны быть объяснены распаденіемъ молекулъ пара на двѣ или большее число частей. Такого рода распаденіе молекулъ, которое наблюдается и въ твердыхъ и аликвихъ тѣлахъ, называется диссоціаціей, этотъ терминъ предложилъ St. Claire-Deville.

Легко объяснить, почему плотность δ пара должна уменьшаться при распаденіи его молекулъ. Предположимъ, что въ объемѣ v находятся сперва N не диссоциированныхъ молекулъ, каждая обладаетъ массой m , температуру обозначимъ черезъ t , давленіе черезъ p . Мы имѣли, см. (10) стр. 393, формулу

$$pv = \frac{1}{3} N m u^2.$$

Если каждая молекула распадется на n частей, массы которыхъ $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ и скорости u_1, u_2, \dots, u_n , то въ объемѣ v будетъ содержаться уже nN молекулъ. Живая сила каждой изъ нихъ такая же, какъ и живыя сила неразложенной молекулы (см. стр. 395), а отсюда слѣдуетъ, что новое давленіе p_1 опредѣлится изъ равенства

$$p_1 v = \frac{1}{3} N m_1 u_1^2 + \frac{1}{3} N m_2 u_2^2 + \dots + \frac{1}{3} N m_n u_n^2 = n p v,$$

ибо

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m u^2 = \dots = \frac{1}{2} m_n u_n^2 = \frac{1}{2} m u^2.$$

Итакъ

$$p_1 = n p.$$

Если теперь взять объемъ v разложеннаго пара при температурѣ t и давленіи p , то въ немъ должно быть заключаться всего N молекулъ, т.-е. по $\frac{N}{n}$ молекулъ каждаго рода. Отсюда ясно, что масса этого пара, а слѣд. и его плотность δ будетъ въ n разъ меньше, чѣмъ масса и плотность не диссоциированнаго пара. Когда всѣ молекулы распадутся, то мы говоримъ, что диссоціація окончена.

Аномальная плотность паровъ нашатыря NH_4Cl объясняется такимъ образомъ распаденіемъ молекулы на NH_3 и HCl , карбаминно-аммиачная соль NH_4COONH_2 распадается на $NH_3 + NH_4CO_2$, NH_4O_2 на $NO + NO_2$; $PtCl_4$ на $PtCl_2 + Cl_2$; $PbBr_2$ на $PbBr + Br_2$; NH_4S на $NH_3 + H_2S$; PH_4Cl на $PH_3 + HCl$ и т. д. Обратно, слишкомъ большая плотность паровъ уксусной кислоты указываетъ на присутствіе въ парѣ молекулъ, составъ которыхъ болѣе сложенъ, чѣмъ тотъ, который выражается формулою $C_2O_4H_4$ (полимеризація).

Вообще разложеніе молекулъ происходитъ постепенно по мѣрѣ повышения температуры, такъ что въ парѣ при данной температурѣ и данномъ давленіи нѣкоторая дробная часть γ всѣхъ молекулъ разложена, другая же часть $1 - \gamma$ молекулъ находится въ парѣ въ неразложенномъ состояніи.

Мы имеемъ здѣсь дѣло съ однимъ изъ многихъ случаевъ подвижнаго равновѣсія въ данное время столько же сложныхъ молекулъ распадается на составныя части, сколько ивъ вновь образуется при благоприятныхъ тому столкновеньяхъ между этими образовавшимися ранее частями. Дробь γ называется степенью диссоціаціи; ее можно опредѣлить, если известны теоретическая плотность δ недиссоциировавшаго пара, вычисленная по формулѣ (27), даѣе истинная плотность Δ пара и число n составныхъ частей, на которыя распадается молекула. Число молекулъ вследствие диссоціаціи возросло отъ N до $N\gamma n + N(1-\gamma)$ или $N\gamma$ молекулъ распались, каждая на n частей. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{N}{N\gamma n + N(1-\gamma)} = \frac{1}{1 + (n-1)\gamma} \quad (28)$$

Это даетъ

$$\gamma = \frac{\frac{\delta}{\Delta} - 1}{(n-1)\Delta} \quad (29)$$

При $n=2$ имеемъ

$$\gamma = \frac{\frac{\delta}{\Delta} - 1}{\Delta} \quad (30)$$

Въ случаѣ полной диссоціаціи имеемъ $\gamma=1$ и тогда (28) даетъ

$$\Delta = \frac{\delta}{n} \quad (31)$$

При $n=2$ имеемъ въ этомъ случаѣ $\Delta = \frac{1}{2} \delta$.

Теорія, которую мы здѣсь не развиваемъ, показываетъ, что при постоянной температурѣ t степень диссоціаціи мѣняется въ зависимости отъ давленія p ; при весьма маломъ давленіи, γ приближается къ единицѣ и слѣд. Δ къ $\frac{\delta}{n}$. Наоборотъ, при очень большомъ давленіи p , степень диссоціаціи мала и Δ близко къ δ . Такъ при $t=49.7$ имеемъ для N_2O , слѣдующія значенія дроби γ при различныхъ давленіяхъ p :

p 0 мм.	γ 1	p 182.69 мм.	γ 0.690
26.80	0.930	261.37 »	0.630
93.75	0.789	497.75 »	0.493

Иногда диссоціація обнаруживается измѣненіемъ цвета пара: такъ N_2O_4 , безцветный, бурѣетъ при диссоціаціи вследствие образования NO_2 , пары PCl_5 при высокой температурѣ получаютъ зеленоватый отблескъ, вызванный присутствіемъ свободныхъ молекулъ Cl_2 .

Если пары нашатыря заставить диффундировать черезъ асбестъ, то прошедшій черезъ него паръ имѣетъ щелочную, оставшійся—кислую реакцію, вследствие того, что NH_3 и HCl съ различною скоростью проходятъ черезъ пористую перегородку.

Степень диссоциации γ возрастаетъ съ температурою, поэтому нагреваніе пара сопровождается внутренней работой диссоциации, результатомъ которой является увеличенная упругость, а слѣд. и увеличенный запасъ энергии, какъ видно изъ формулы $p = \frac{2}{3} J$, стр. 392. Вѣдѣние того что плотность пара во время диссоциации громадна, быстро уменьшаясь съ повышеніемъ температуры по мѣрѣ того, какъ диссоциация приближается къ своему предѣлу.

Пользуясь формулой (29), можно вычислить степень диссоциации γ пара при различныхъ температурахъ, наблюдая его плотность Δ . Возьмемъ для примѣра диссоциацию N_2O_4 . Молекулярный вѣсъ $\mu = 2 \cdot 14 + 4 \cdot 16 = 92$; слѣд. теоретическая плотность, см. (24), $\delta = \frac{92}{28,88} = 3,19$. Такъ какъ N_2O_4 распадается на $NO_2 + NO_2$, то $\mu = 2$ и слѣд. (30) даетъ $\gamma = \frac{3,19}{\Delta} - 1$. Въ слѣдующей таблицѣ даны температуры t , плотности Δ пара и величины 100 γ , показывающыя, какой процентъ вѣса молекулъ подвергся диссоциации.

t	Δ	100 γ
26,7	2,65	20,0
39,8	2,46	29,2
60,2	2,08	52,8
80,6	1,80	76,6
100,1	1,68	89,2
121,5	1,62	96,2
135,0	1,60	98,7

Диссоциация уменьшается, когда къ пару примѣнить одну изъ составныхъ частей, на которыя онъ распадается, напр. XH , или HC къ парамъ нашатыря.

Пары простыхъ тѣлъ, молекулы которыхъ содержатъ болѣе одного атома, также могутъ обпаривать диссоциацию. Такъ плотность паровъ вода при высокой температурѣ и слабѣмъ давленіи уменьшается, вѣдѣние распаденія молекулы H_2O на $H + OH$. Когда вѣра непарается, то паръ содержитъ по всей вѣроятности молекулы S_2 , которая распадается на $S_1 + S_1$; при дальнѣйшемъ нагреваніи молекулы S_2 съ одной стороны распадается вѣроятно на $S_2 + S_2 + S_2$.

§ 10. Заключение. Мы рассмотрѣли въ этомъ отдѣлѣ нѣкій рядъ свойствъ газовъ и различныя явленія, которыя въ нихъ происходятъ. Мы однако оставили неизтронутыми еще много вопросовъ первостепенной важности. Мы напр. подробно разсматривали свойства совершенныхъ газовъ, приписывая имъ между прочимъ отсутствіе внутренней работы. Переходя къ газамъ действительнымъ, несовершеннымъ мы ограничились разсмотрѣніемъ отступленій отъ закона Бойля-Мариотта и указаніемъ на формулу van der Waals'a. Но мы не описывали тѣхъ опытовъ, которыми доказывалось существованіе внутренней работы расширения несовершенныхъ газовъ и не излагали болѣе подробной теории такихъ газовъ. Точно также

мы не затронули обширныхъ вопросовъ о тепловомъ расширеніи и о теплопроводности газовъ, о способахъ опредѣленія теплоемкости газовъ и въ особенности объ охлажденіи газовъ. Всѣ эти вопросы мы разсмотримъ въ отдѣлѣ девятомъ, посвященномъ учению о теплотѣ. И во всѣхъ другихъ отдѣлахъ мы еще много разъ встрѣтимся съ газами и познакомимся съ различными ихъ свойствами, касающимися акустическихъ, оптическихъ, магнитныхъ и электрическихъ явленій, которыя въ нихъ обнаруживаются. Въ этомъ четвертомъ отдѣлѣ, въ учении о газахъ, мы собрали все то, что безъ нарушенія необходимой послѣдовательности и общей системы изложенія могло быть выдѣлено, какъ основное и для газообразнаго состоянія матеріи особенно характерное изъ другихъ отдѣловъ физики. Подобное мы въ слѣдующихъ двухъ отдѣлахъ сдѣлаемъ для матеріи въ состояніяхъ жидкомъ и твердомъ.

ЛИТЕРАТУРА.

Диффузія газовъ.

- Graham*. Phil. Mag. (3) 2 p. 175, 269, 351, 1833; Pogg. Ann. 28 p. 331, 1833; Phil. Trans. 1863, Liebig's Ann. 131 p. 1, 1864, Pogg. Ann. 129 p. 549, 1866.
Bunsen. Gasometrische Methoden. 1857 p. 209.
Dufour. Arch. Sc. phys. (2) 49 p. 103, 1873.
Feddersen. Pogg. Ann. 148 p. 302, 1873.
Mitchell. Journ. of the Roy. Inst. 2 p. 101, 307, London 1831; Pogg. Ann. 129 p. 550, 1866.
Wróblewski W. A. 2 p. 481, 1877; 4 p. 268, 1878; 7 p. 11; 8 p. 29, 1879.
Stefan. Wien. Ber. 77 (2) p. 371, 1878.
Joh. Mueller. W. A. 43 p. 554, 1891.
Häufner. W. A. 60, p. 135, 1897.
Exner. Wien. Ber. 70 p. 465, 1875, Pogg. Ann. 155 p. 321 и 443, 1875; Wien Ber. 75, p. 263, 1877.
Toepler. W. A. 58, p. 599, 1896.
 Ф. Шидловскій. Примѣненіе диффузіи къ опредѣленію влаги и углекислоты Сиб. 1886.

СОПРОТІВЛЕНІЕ ГАЗОВЪ ДВИЖЕНІЮ ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ.

- Mach und Satchar*. Wien. Ber. 95 (2) p. 764, 1887. 97 (2) p. 41, 1889.
Melsens. Ann. Ch. et Phys. (5) 25, 1882.
 М. Рыкачевъ. Ж. Ф. Х. О. 10 p. 124, 1878.
 Г. Суловъ. Ж. Ф. Х. О. 18 p. 79, 1886.
 И Арковский. О. Ф. Н. Об. I. Е. 3. выд. 2, стр. 34, 1890

ДИССОЦІАЦІЯ ГАЗОВЪ.

- Cannizzaro*. Sunto di un corso di filosofia chimica. Pisa, 1858.
Kopp. Chem. Ber. 1858 p. 11 и др.
St. Clair Deville. C. R. 45 p. 857, 1857. Leçons sur la dissociation. Paris, 1866.
Pebal. Lieb. Ann. 123 p. 199, 1862.
L. und L. Natanson. W. A. 24 p. 454, 1885, 27 p. 606, 1886.
Richardson. Journ. chem. Soc. 51 p. 397, 1887.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ

УЧЕНИЕ О ЖИДКОСТЯХЪ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Основные свойства и строение жидкостей.

§ 1. Основные свойства жидкостей. Жидкости, подобно газамъ, не обладаютъ самостоятельной формой, но принимаютъ форму того сосуда, въ которомъ онѣ помѣщены. Подобно газамъ онѣ также весьма мало сопротивляются измѣненію формы, т.-е. деформациямъ. Но онѣ отличаются отъ газовъ прежде всего тѣмъ, что обладаютъ определеннымъ объемомъ, попыткѣ измѣненія котораго онѣ противопоставляютъ весьма большое сопротивление, онѣ не стремятся занять возможно болѣе обширный объемъ и потому могутъ быть сохраняемы въ открытыхъ сосудахъ по крайней мѣрѣ, въ теченіе вѣкотораго промежутка времени. Жидкость, не подверженная ничѣмъ силамъ и не вращающаяся около какой либо оси принимаетъ форму шара, которая и должна считаться какъ бы за естественную ея форму.

Жидкости непрерывно и при всѣхъ условіяхъ переходятъ въ газообразное состояніе, онѣ испаряются. Быстрота этого перехода зависитъ отъ рода жидкости, отъ температуры, рода тѣлосія и движенія газа, окружающаго «свободную» поверхность жидкости, т.-е. тѣ, которая не находится въ соприкосновеніи съ твердымъ или другимъ жидкимъ тѣломъ. Если жидкость находится въ закрытомъ пространствѣ то испареніе черезъ вѣкоторое время какъ будто прекращается, въ этомъ случаѣ надъ жидкостью находится «насыщенный» ея паръ, т.-е. паръ, достигшій наибольшей, возможной при данной температурѣ, упругости. Въ открытомъ пространствѣ испареніе всякой жидкости продолжается непрерывно. Поэтому жидкая масса тогда только можетъ самостоятельно существовать въ мировомъ пространствѣ, когда она достаточно велика для того, чтобы вслѣдствіе ея при-

жидкости могла образоваться вокруг ней атмосфера ее же пара, которая у ее поверхности была бы насыщена. Жидкая масса, не удовлетворяющая этому условию, должна постепенно разбиваться и так сказать исчезнуть.

Испарение сопровождается затратой энергии, которая въ парѣ находится въ потенциальной формѣ. Если нѣтъ притока энергии къ жидкости отъ вѣншихъ тѣлъ, то жидкость при испарении охлаждается.

Подробнее мы рассмотримъ явление испарения въ учении о теплотѣ.

Идеальной или совершенною жидкостью мы называемъ такую, которая не оказываетъ никакого сопротивления вѣнней силѣ, изменяющей ея форму, и бесконечно большое сопротивление силѣ, стремящейся уменьшить ея объемъ; такая жидкость слѣд. абсолютно подвижна и несжимаема.

Жидкости слѣдуютъ закону передачи давленій, извѣстному подъ названіемъ закона Паскаля. Тѣла, погруженные въ жидкость, претерпѣваютъ какавутося потерю въ вѣсъ, определяемую закономъ Архимеда.

Подъ вліяніемъ измѣненія температуры измѣняется объемъ жидкостей, но несравненно меньше, чѣмъ объемъ газовъ. Коэффициентъ теплогого расширения для различныхъ жидкостей весьма различенъ.

§ 2. Строение жидкостей. Внутреннее строение жидкостей сложнѣе строения газовъ и притомъ усложненіе выражается двояко. Въ газообразныхъ тѣлахъ мы считаемъ молекулы свободными, двигающимися независимо другъ отъ друга если только не считать ихъ случайныхъ столкновений между собою. Въ жидкостяхъ молекулы постоянно соприкасаются, что столкновений между ними должно происходить несравненно чаще, чѣмъ въ газахъ; вѣдствие этого каждая отдѣльная молекула должна двигаться около нѣкотораго средняго своего положенія. Мыслящаяся сравнительно весьма медленно. Тѣмъ не менѣе постепенныя перемѣщенія молекулы съ одного мѣста къ другому происходятъ и въ жидкостяхъ, но гораздо медленнѣе, чѣмъ въ газахъ.

Второе различіе въ строеніяхъ жидкостей и газовъ заключается въ томъ, что на каждую молекулу жидкости дѣйствуютъ особаго рода силы, какъ бы исходящія отъ вѣсѣхъ къ ней сѣднихъ молекулъ, однако по общему не тождественныя со всемірнымъ тяготѣніемъ, которое, само по себѣ, существуетъ между молекулами жидкостей. Эти силы, законы которыхъ еще мало извѣстны и которыя имѣютъ замѣтную величину только при весьма малыхъ разстояніяхъ между молекулами называются силами сѣблиленія. Таковы силы существуютъ, какъ мы видѣли, и въ газахъ, но въ послѣднихъ онѣ весьма малы и потому большой роли не играютъ, особенно въ газахъ, далекихъ отъ насыщения. Въ жидкостяхъ, наоборотъ, существованіе этихъ силъ непрерывно обнаруживается во множествѣ разнообразныхъ явленій, и притомъ въ особенности въблизи ихъ поверхности. Дѣло въ томъ, что когда молекула *m* (рис. 248) находится внутри жидкости, то она со вѣсѣхъ сторонъ окружена другими молекулами, дѣйствующими на нее силами сѣблиленія. Вѣсѣ эти молекулы находятся внутри нѣкоторой сферы, въ центрѣ которой помѣщается разсматриваемая молекула, и радиусъ которой равенъ тому наибольшому разстоянію, на которомъ силы сѣблиленія

производить еще ощутительное действие, т.-е. действие не вполне ничтожное сравнительно с действием молекул сферичнаго. Эта сфера называется сферою частичнаго действия. Все силы сцепления, действующія на центральную молекулу m , и направленные равнодѣрно во все стороны вокруг нея, взаимно уничтожаются. Это относится ко всемъ молекуламъ внутри жидкости, идѣ стѣ, силы сцепления только регулируютъ величину средняго разстоянія между молекулами. Такимъ образомъ объемъ жидкости прежде всего опредѣляется условиемъ равновѣсія между стремленіемъ движущихся молекулъ разлетѣться и сцепленіемъ молекулъ между собою.

Сказанное о взаимномъ уравновѣшиваніи силъ сцепления, действующихъ на молекулу, перестаетъ быть вѣрнымъ для молекулы m' , находя-

Рис. 248.



щейся у самой поверхности, и окруженной только съ одной стороны другими молекулами, составляющими по ту сферу частичнаго действия. Здѣсь у поверхности жидкости все силы сцепленія складываются въ одну равнодѣствующую R , направленную во внутрь жидкости, нормально къ ея поверхности, молекула какъ бы втягивается во внутрь жидкости силою, удерживающею ее отъ выпетанія изъ жидкости. Это относится не только ко всемъ молекуламъ, находящимся у поверхности жидкости, но и къ тѣмъ, которыя находятся внутри жидкости, на разстояніи отъ ея поверхности, меньшемъ радиуса сферы частичнаго действия, какъ это видно изъ рис. 248, на молекулу m' действуют силы сцепленія, изъ которыхъ нѣкоторыя взаимно уравновѣшиваются; но остаются силы, исходящія отъ молекулъ сегмента, лежащаго ниже плоскости st , симметричной относительно центра шара съ плоскою поверхностью жидкости. Эти силы сцепленія имѣютъ нѣкоторую равнодѣствующую R' , которая однако меньше R . Плоскость MN' , находящаяся отъ поверхности MN на разстояніи радиуса сферы частичнаго действия, составляетъ нижнюю границу поверхностной пленки, частицы которой подвержены силамъ, направленнымъ во внутрь жидкости. Вся эта пленка производитъ давленіе на жидкость, которое можно уподобить давленію натянутого резинового шара на находящейся въ немъ воздуху.

Итакъ силы сцепленія должны особенно рѣзко проявляться въ поверхностномъ слое жидкости. Чѣмъ больше поверхность жидкости сравнительно съ ея массою, тѣмъ болѣешую роль должны играть эти силы; поэтому онѣ обнаруживаются особенно въ отдѣльно взятыхъ малыхъ количествахъ жидкости. Стремленіе жидкости втянуть въ себя молекулы, лежащія у ея по-

верхности, должно имѣть слѣдствиемъ кажащееся стремление жидкости принять такую форму, при которой ея поверхность была бы какъ можно меньше. Наименьшею поверхностью при данномъ объемѣ обладаетъ шаръ, поэтому малые количества жидкости, даже находясь подъ влияниемъ силы тяжести, принимаютъ форму шариковъ, какъ это напр. наблюдается на весьма малыхъ капляхъ ртути. Всякое увеличение поверхности жидкости требуетъ затраты работы, ибо оно должно сопровождаться перенесениемъ частицъ, лежащихъ ниже упомянутой поверхности и пенки въ эту пенку и даже до самой поверхности жидкости, этому перенесению противостоитъ сила K' , увеличивающаяся по мѣрѣ приближенія частицъ къ самой поверхности. Поверхностная пленка какъ будто съ одной стороны сама стремится уменьшить свою поверхность, съ другой — сопротивляется всякой внешней силѣ, стремящейся увеличить ея размеры.

§ 3. Испареніе жидкостей. Испареніе съ точки зрѣнія кинетической теор. и жидкостей объясняется тѣмъ, что отдельными молекулами, лежащими у самой поверхности и обладающими въ данный моментъ особенно большою скоростью, направленною въ вышнее пространство, удается выйти изъ сферы частичнаго дѣйствія, вылетѣть изъ жидкости несмотря на удерживающую ихъ силу ссыленія. Если надъ жидкостью находится извъ или паръ другой жидкости, то вылетающія частицы встрѣчаются съ идущими имъ на встрѣчу частицами, и отчасти ими отбрасываются обратно въ жидкость, испареніе которой по этому происходитъ очень медленно. Въ истиннѣ испареніе происходитъ гораздо быстрее и въ весьма короткій промежутокъ времени достигаетъ нѣкотораго предѣла, который опредѣляется слѣдующимъ образомъ. Надъ испаряющейся жидкостью образуется ея же паръ, частицы котораго, ударивъ въ ея поверхность, попадаютъ въ сферу частичнаго дѣйствія и удерживаются жидкостью. Предѣлъ испаренія будетъ достигнутъ когда въ единицу времени столько же частицъ вылетаетъ изъ жидкости, сколько въ нее попадаетъ изъ окружающаго пара, настаетъ своего рода подвижное равновѣсіе (стр. 380), при которомъ, несмотря на непрерывный обмѣнъ частицъ, количества жидкости и пара остаются безъ измѣненія.

Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что паръ насыщенъ. Чѣмъ выше температура, тѣмъ больше энергія движенія частицъ, и тѣмъ больше число частицъ, вылетающихъ въ данный промежутокъ времени изъ поверхности жидкости. Соответственно этому должно увеличиться и число частицъ, вступающихъ въ жидкость, т. е. должна увеличиться плотность, а слѣд. и упругость насыщеннаго пара, какъ это и наблюдается въ действительности.

Молекулы жидкости, какъ и молекулы газа, не обладаютъ въ данный моментъ одинаковыми скоростями, можетъ быть и къ нимъ применимъ законъ Максвелла (стр. 401). Наибольше шансовъ вылетѣть изъ жидкости имѣютъ молекулы, обладающія особенно большою скоростью, а потому ясно, что при испареніи должна уменьшаться средняя энергія движенія частицъ неиспарившейся жидкости, поэтому жидкости при испареніи охлаждаются. Впрочемъ это только лишь точка зрѣнія на фактъ, что при испареніи жидкости должна быть совершена работа на преодоленіе силъ сцепленія молекулъ.

частицами, и что необходимая для этой работы энергия берется из самой жидкости, если не существует внешнего к ней притока энергии. Скорость частицы, вылетающей из жидкости, уменьшается вследствие противодействия сил сближения, и потому температура пара всегда равна температуре самой жидкости.

Когда пар, охлаждаясь, ступает в жидкость, то силы сближения производят внутреннюю работу, начиная с момента, когда молекулы приблизятся друг к другу на расстояние, равно радиусу сферы частичного действия. Результатом этой работы является задержка в уменьшении скорости молекул, т. е. в охлаждении, несмотря на продолжающийся отток энергии к окружающим телам. Из пара выделяется скрытая теплота ожигения.

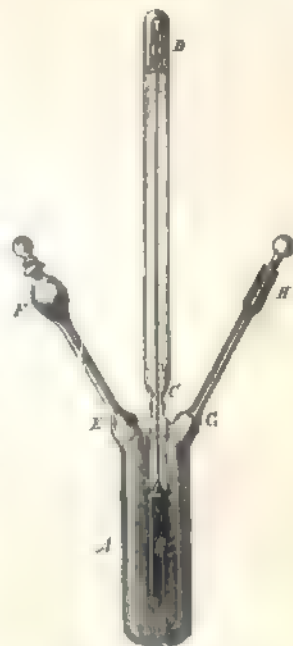
§ 4. Строение молекул жидкости. Молекула жидкости построена по всей вероятности гораздо сложнее молекулы ее же пара, особенно если последние находятся далеко от насыщения. По всей вероятности молекулы жидкости состоят из нескольких, а может быть и большого числа простых молекул, каковы газовые, соединенных в одно целое. Водной пар состоит из молекул H_2O , если допустить, что молекулы водорода и кислорода имеют состав H_2 и O_2 . Состав же молекулы воды можно изобразить формулой $(H_2O)_n$, где n неизвестное число молекул пара (газогенные по терминологии Де-Нееп'а), составляющих одну молекулу жидкости (лиридогенные). При испарении сложная молекула жидкости распадается на составные части, каковое явление можно назвать физическою диссоциацией.

При нагревании жидкости одна часть притекающей теплоты тратится на повышение ее температуры, т. е. на увеличение кинетической энергии поступательного, а может быть и вращательного движения как целых молекул, так и их составных частей т. е. молекул более простых и атомов. Вторая, вообще весьма малая часть тепла тратится на внешнюю работу расширения жидкости, она как и для газов равна $A \int p dv$, где A термический эквивалент работы, p внешнее давление и v объем жидкости. Третья часть тепла идет на внутреннюю работу, которая с одной стороны в самом общем случае вероятно распадается на три части: на работу разъединения молекул жидкости друг от друга, на работу разъединения составных частей сложных молекул жидкости, и наконец на работу перемещения атомов или групп атомов, из которых состоит простая молекула (газогенные). Эту последнюю часть тепла можно назвать скрытой теплотой химической диссоциации, а предшествующую скрытой теплотой физической диссоциации.

Для опредѣленія плотности жидкости существуетъ цѣлый рядъ способовъ, которые мы теперь и рассмотримъ. Вопросъ о болѣе точной зависимости плотности, т.-е. коэффициента α , отъ температуры мы рассмотримъ въ ученіи о теплотѣ.

§ 2. Способъ Wilson'a. Для быстрого, приблизительнаго опредѣленія плотности жидкости могутъ служить маленькіе стеклянные пустые шарики, обладающие различною среднею плотностью, которая на нихъ обозначена. Если рядъ такихъ шариковъ опустить въ жидкость, то нѣкоторые изъ нихъ опустятся на дно, другіе будутъ плавать по поверхности, и только одинъ останется почти неподвижнымъ внутри жидкости, плотности которой и равна приблизительно средней плотности этого шарика.

Рис. 252.



§ 3. Способъ сообщающихся сосудовъ. Этотъ способъ основанъ на томъ, что высоты жидкихъ столбовъ, производящихъ одинаковое давление на единицу поверхности дна, обратно пропорциональны плотностямъ влитыхъ жидкостей. Существуютъ два различныхъ приема пользоваться этимъ закономъ, они уясняются двумя рисунками 249 и 250. На рис. 250 мы имѣемъ два сообщающихся сосуда, въ длинный котѣнъ которыхъ наливаются двѣ жидкости, плотности которыхъ желаютъ сравнить, и притомъ въ такихъ количествахъ, чтобы въ обоихъ среднихъ котѣнкахъ жидкости доходили до нулевыхъ дѣлений шкалы. Въ приборѣ рис. 249 двѣ трубки, нижние концы которыхъ погружены въ сосуды съ жидкостями, наверху соединены между собою и съ маленькимъ разсѣкающимъ воздушнымъ насосомъ. Если дѣйствовать насосомъ, то жидкости поднимаются по трубкамъ, причемъ давления двухъ жидкихъ столбовъ очевидно должны быть равны между собою. Видоизмѣненія этого прибора предложилъ Bonfall.

§ 4. Способъ приѣмленія пикнометра (или флакона). Стеклянный сосудъ взвѣшивается пустой (въѣсъ P), наполненный водою (въѣсъ P_1) и наконецъ наполненный испытуемой жидкостью (въѣсъ P_2). Безъ поправокъ искомая плотность δ равна

$$\delta = \frac{P_2 - P}{P_1 - P} \dots \dots \dots (2)$$

На рис. 251 изображенъ пикнометръ простой формы, состоящий изъ двухъ болѣе широкихъ частей, соединенныхъ тонкою трубкою. На трубкѣ проведена горизонтальная черта, до которой должна доходить поверхность воды, а затѣмъ испытуемой жидкости. Верхняя часть сосуда закрывается притертою пробкою, чтобы воспрепятствовать испаренію жидкостей. Напол-

нение пикнометра производится попеременнымъ подогриваніемъ и охлажденіемъ нижней ея части, причемъ каждый разъ сперва выгоняется изъ нея воздухъ, а затѣмъ входитъ въ нее часть жидкости, налитой въ верхнюю часть. Выскачиваніе флакона, необходимое передъ замѣною одной жидкости другою, представляетъ здѣсь нѣкоторые затрудненія.

Гораздо удобнѣе пикнометръ Д. И. Менделѣева, см. рис. 252. Онъ состоитъ изъ двукрѣпкой трубки *А*, внутри которой находится резервуаръ термометра *ВД*, висящаго около *С* въ трубкѣ. Боковыя узлы трубки снабжены дѣлениями и тщательно калиброваны. Трубка *GH* плотно закрывается коническою пробкою, на концѣ трубки *EF* находится расширение съ горлышкомъ, которое также плотно закрывается притертою пробкою.

Весьма удобенъ пикнометръ Sprengel'я, въ особенности въ той формѣ, которую ему придать Ostwald, см. рис. 253. Онъ наполняется испытуемой жидкостью отъ маленькаго отверстія *b* и до черты *a*.

Формула (2) приближенная; для получения болѣе точнаго значенія плотности δ слѣдуетъ ввести нѣкоторыя поправки. При взвѣшиваніяхъ слѣдуетъ приводить все къ пустотѣ или δ есть отношеніе двухъ истинныхъ, а не двухъ кажущихся вѣсовъ. Дѣла воды и испытуемая жидкость могутъ наполнить пикнометръ при двухъ различныхъ температурахъ, которыми соответствуютъ не вполне одинаковые объемы самого пикнометра. Наконецъ если пикнометръ былъ наполненъ до черты водою при t^0 , плотность *D* которой можетъ быть найдена изъ таблицъ то для получения плотности жидкости относительно воды при t слѣдуетъ полученную по формулѣ (2) плотность помножить на *D*. Подробностей здѣсь не излагаемъ. Окончательно получается плотность жидкости при температурѣ *t*, при которой она наполняла пикнометръ до черты. Чтобы получить удѣльный вѣсъ δ при t слѣдуетъ воспользоваться формулою (1), что возможно только въ тѣхъ рѣдкихъ случаяхъ, когда коэффициентъ α извѣстенъ.

§ 5. Способъ, основанный на законѣ Архимеда. Опредѣляютъ кажущуюся потерю вѣса какого либо тѣла сперва въ испытуемой жидкости, (потеря *P*), потомъ въ водѣ (потеря *P*₁). Тѣло, которое должно тонуть въ обѣихъ жидкостяхъ, можетъ состоять изъ стекляннаго шарика или цилиндрика, содержащаго немного ртути; весьма удобно, когда къ нему непосредственно присоединенъ термометръ. Самое взвѣшиваніе можетъ происходить на обыкновенныхъ вѣсахъ съ коромысломъ, приспособленнымъ для удобнаго взвѣшиванія тѣла, висящаго на ниточкѣ внутри жидкости. Для этого одна изъ чашекъ вѣсовъ или совѣтъ снимается или привѣшивается къ коромыслу на короткихъ нитяхъ и снабжается на нижней сторонѣ крючкомъ.

Весьма удобны для не очень точныхъ опредѣленій одноплечіе вѣсы Westphal'я, которые были изображены на рис. 172 стр. 301. Мы видѣли, что плечо *Hb* раздѣлено на 10 равныхъ частей, и что при вѣсахъ имѣются

проволочные гири A_1 , A_2 , B и C , которые удобно накладываются на плечо Hh в малые зарубки, находящиеся против делений. При взвесах требуется также стеклянный цилиндрик с термометром, который в воздух уравнивается противомесой K . Веса равных гирек A_1 и A_2 подобрать так, что они как раз равнялись весу воды при 15° вытесненному этим цилиндриком. Опустив цилиндрик в воду и привесив гирю A_1 к крючку h , как показано на чертеже, мы получим равновесие. Если вес гирек A_1 и A_2 принять за единицу, то вес B равен 0.1, а вес C равен 0.01.

Если опустить цилиндрик в жидкость, которая плотнее воды, то для достижения равновесия придется прибавить еще гири, причем потери веса цилиндрика непосредственно отчитывается на делениях плеча Hh ; но так как потери веса в воде приняты за единицу, то этот отчет непосредственно дает искомую плотность жидкости. Если напр. получится распределение гирек, показанное на нижнем правом рис. 172, т.е. $A_1 (= 1)$ делит на деления 8, B (0.1) на делении 4, и C (0.01) на делении 6, при чем $A_1 (= 1)$ не снято, т.е. находится под делением 10, то потери веса цилиндрика в жидкости, а следовательно и ее плотность равна 1.846. Когда плотность жидкости меньше единицы, то и потери веса меньше принятой нами единицы веса. В этом случае A_1 должно быть снято. Если получится распределение гирек A , B и C изображенное на левом нижнем рис. 172, то это показывает, что искомая плотность жидкости равна 0.747.

Необычайной степени точности достиг Ф. Кёхляusch, определяя плотность слабых растворов по способу, основанному на законе Архимеда.

На рис. 254 изображены пружинные весы Jolly, могущие также служить для определения удельного веса жидкостей. Они состоят из спирально свернутой проволоки ab , к которой привешены одна под другой две чашечки c и d , между которыми находится плоская миска m из белого стекла. Столб A снабжен делениями, нанесенными на зеркале; положение миски определяется отчитыванием деления, около которого она покрывается, если смотреть спереди, свое изображение в зеркальной шкале. Сосуд с водою или с испытуемой жидкостью ставится на столик B .

Рис. 254



который можно перемещать вдоль A и помощью винта закреплять в желаемомъ положеніи.

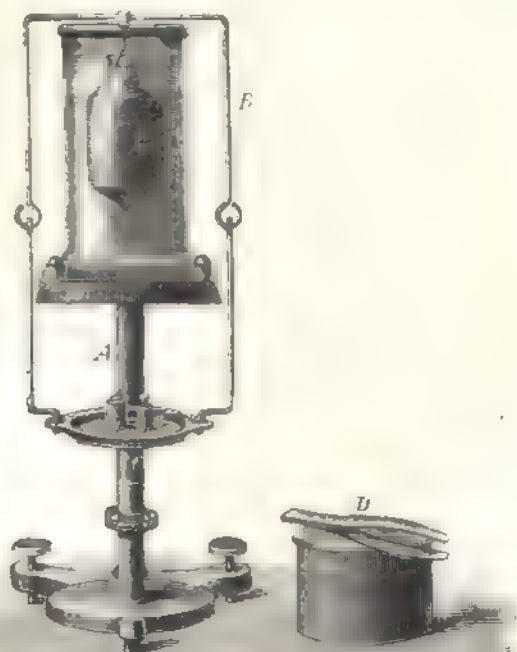
Определение δ для жидкостей производится при постоянномъ положеніи мѣтки m слѣдующимъ образомъ. Чашечка d замѣняется какимъ либо тѣломъ, напр. стекляннымъ шарикомъ, тонущимъ въ водѣ и въ испытуемой жидкости, и отчитывается дѣленіе s шкалы, противъ котораго останавливается мѣтка m .

Затѣмъ опускаютъ тѣло сперва въ воду, а потомъ въ испытуемую жидкость и определяют вѣсъ тѣла гирь p_1 и p_2 , которыя слѣдуетъ поло-

Рис. 255.



Рис. 256.



жить на чашечку c , чтобы мѣтку вновь привести къ дѣленію s шкалы. Искомая плотность равна $\delta = \frac{p_2}{p}$.

Можно пользоваться вѣсами Jolly, не употребляя вовсе гирекъ, а измѣряя перемѣщеніе s мѣтки, которое можно считать пропорциональнымъ измѣненію нагрузки p . Точнѣе p выражается формулою вида $p = As + B$, гдѣ s удлинненіе, вызванное нагрузкою p . Пренебрегая вторымъ членомъ, мы можемъ перемѣщеніе мѣтки принять за мѣру измѣненія нагрузки, а за единицу вѣса — вѣсъ той нагрузки, которая перемѣщаетъ мѣтку на одно

дѣленіе шкалы. Положимъ, что мѣтка стоитъ противъ дѣленія s , когда шарикъ находится въ воздухѣ. Когда мы снизу подведемъ сосудъ съ водою и установимъ его такъ, чтобы шарикъ находился въ серединѣ жидкости, то мѣтка остановится противъ нѣкотораго дѣленія s_1 , и противъ дѣленія s_2 , когда воду замѣнимъ другою жидкостью, причемъ B придется нѣсколько поднять или опустить.

$$\text{Искомая плотность } \delta = \frac{s_1 - s_0}{s_2 - s_0}.$$

§ 6. Ареометры. На рис. 255 изображенъ ареометръ Nicholson'a съ постояннымъ объемомъ съ придѣланной внизу чашечкой B , которою пользуются при опредѣленіи плотности твердыхъ тѣлъ. На проводкѣ D находится черта, до которой ареометръ долженъ погружаться въ воду и въ испытываемой жидкости причемъ на чашечку C приходится положить ширь, вѣсъ которыхъ обозначимъ, черезъ p_1 и p_2 . Если P вѣсъ самого ареометра, то $\delta = \frac{P + p_2}{P + p_1}$.

Рис. 257.



Явленія водосности имѣютъ большое влияние на показанія ареометра, представляя весьма существенный источникъ погрѣшностей, не дающій возможности рачаться даже за третью десятичную при опредѣленіи плотности δ жидкостей. Lohmstein построилъ ареометръ, на показанія котораго водосность не вліяетъ и который даетъ возможность опредѣлять δ съ точностью до 0.0001. Ареометръ Lohmstein'a изображенъ на рис. 256. Подое стеклянное тѣло C оканчивается около a горизонтальной плоскостью съ рѣзко отполированными краями. Оно поддерживаетъ чашку S , на которую кладутся ширь (изъ коромысла D) въ такомъ количествѣ, чтобы горизонтальная поверхность жидкости совпала съ поверхностью края a , какъ это показано на рис. 257. Передъ накладываніемъ ширь слѣдуетъ поддержать чашку S столикомъ t , который можно поднимать и опускать вращеніемъ винтовой головки e , и затѣмъ медленно опустить этотъ столикъ, чтобы избѣжать опусканія края a ниже поверхности жидкости при слишкомъ большой нагрузкѣ. При $\delta = 0.7000$ тѣло C опускается до положенія, изображеннаго на рис. 257. Въ коромыслѣ D находится 17 ширь, на которыхъ обозначены числа отъ 0.0001 до 0.3; вѣса этихъ ширь подобраны такъ, что искома плотность δ жидкости получается сложениемъ числа 0.7 съ числами, обозначенными на ширяхъ, положенныхъ на чашку S . Этотъ ареометръ даетъ возможность опредѣлять плотности жидкостей отъ $\delta = 0.7$ до $\delta = 2$.

Универсальный «денсиметръ» построилъ Courtonne.

Устройство ареометра съ постояннымъ вѣсомъ извѣстно изъ элементарнаго курса физики. Напомнимъ только, что на длинномъ его стержнѣ начертана шкала, дѣленія которой непосредственно даютъ плотность жидкости, въ которой ареометръ опускается до даннаго дѣленія. Въ ареометрахъ, назначенныхъ для жидкостей, тяжелѣйшихъ воды, дѣленіе 1.00 находится на самой верхней точкѣ шкалы, и въ самой нижней, когда ареометръ служитъ для опредѣленія плотности жидкостей, легчайшихъ воды.

Явления смачивания, которые мы рассмотримъ ниже, въ значительной степени затрудняютъ примѣненіе ареометровъ.

Vandewater построилъ ареометръ, который заставляютъ всегда плавать въ дистиллированной водѣ, между тѣмъ какъ испытуемая жидкость помещается внутри самого ареометра. Это даетъ возможность пользоваться ареометромъ для опредѣленія плотности жидкостей, имѣющихся въ небольшомъ количествѣ.

Существуетъ группа ареометровъ, имѣющихъ особую основную шкалу. Некоторые изъ нихъ служатъ для быстро распознаванія состава опредѣленныхъ смѣсей, и тѣмъ самымъ сравнительно имѣютъ достоинства и цѣнности.

Ареометръ Baumé, которымъ часто пользуются, опускается въ чистой водѣ при 12.5 Ц. до дѣленія 0, находящагося близъ верхняго конца шкалы. Въ растворѣ 15 частей поваренной соли въ 85 частяхъ воды онъ опускается до черты, противъ которой стоитъ число 15. Расстояние между дѣлениями 0 и 15 раздѣлено на 15 частей, дѣленія продолжены внизъ до 70-го дѣленія. Значеніе дѣленій по Baumé слѣдующее:

По Baumé:	0.0	13.2	24.2	33.5	41.5	48.4	54.4	59.8	64.5	68.6	72.6
Плотность:	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0

Крѣпкая серная кислота имѣетъ плотность 66 по Baumé, продажная азотная кислота—36, соляная—22.

Для жидкостей, легшихъ воды, Baumé построилъ ареометръ, опускающійся въ водѣ до дѣленія 10, находящагося недалеко отъ нижняго конца шкалы, и до дѣленія 0 въ растворѣ десяти частей поваренной соли въ 90 частяхъ воды, дѣленія идутъ снизу вверхъ до 60-ти приблизительно; ихъ значеніе слѣдующее:

По Baumé:	10.0	17.7	26.1	35.6	46.3	58.4
Плотность:	1.0	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75

Ареометры, служащіе для опредѣленія содержанія чистаго алкоголя въ продажномъ спиртѣ, называются спиртомірами. Такой приборъ построилъ Gay-Lussac, дѣленіе, до котораго онъ опускается, даетъ непосредственно содержаніе алкоголя въ процентахъ объема; дѣленіе 0 (чистая вода) находится на нижнемъ, дѣленіе 100 (чистый алкоголь) на верхнемъ концѣ шкалы. Подобное же устройство имѣетъ спиртоміръ Tralles'a. Въ приборѣ Richter'a дѣленія шкалы указываютъ вѣсовое процентное содержаніе алкоголя. Дѣленія на шкалѣ спиртоміра не равноотстоящи другъ отъ друга, такъ какъ плотность спирта не составляетъ линейной функции процентнаго содержанія алкоголя. Это происходитъ отъ того, что смѣшеніе алкоголя съ водою сопровождается значительнымъ уплотненіемъ смѣси; такъ 50 объемовъ воды и 50 объемовъ алкоголя даютъ только 96.3 объема спирта. Плотность спирта значительно мѣняется съ температурой, и потому слѣдуетъ ввести поправку къ показаніямъ спиртоміровъ, пользуясь составленными для этой цѣли табличками.

ВЪ таблицахъ IV—VII. въ концѣ книги, помѣщены числовыя величины плотности различныхъ жидкостей.

ЛИТЕРАТУРА.

- Bonfati*. Revue generale des Sciences 1896 p. 318, 418.
 История ареометровъ: *Gerhard*. W. A. 1 p. 150, 1877.
Bernard. Alcometrie. Paris, 1875.
Gau-Lussac. Instruction pour l'usage de l'alcometre. Paris, 1824.
Paquet. J. de phys. 4 p. 266, 1875.
Buignet. J. de phys. 9 p. 93, 1880.
Jolly. Münch. Ber. 1864 p. 162 Proc. Dubl. Soc. 5 p. 41, 347, 1886.
Sprengel. Pogg. Ann. 150 p. 459, 1873.
Westphal. Arch. Pharm. 10 p. 322, 1867.
Michaelis. Instr. 1883 p. 268.
Kahlbaum. W. A. 19 p. 378, 1883.
Schiff. Chem. Ber. 14 p. 2761, 1881.
Blumcke. W. A. 23 p. 404, 1884.
Mendeleev. Сжатіе спирта съ воздухомъ С-III. 1865.
Tralles. Gilb. Annal. 88 p. 349, 1811.
Kopp. Pogg. Ann. 72 p. 1, 1847.
Ostwald. J. f. pract. Chemie. 16 p. 396, 1877; Hilfsbuch für phys.-chem. Messungen, Leipzig. 1893 p. 109—110.
Lohnstein. Instr. 14 p. 164, 1893.
Courtonne. J. d. phys. (3) 3 p. 315, 1896.
Vanderwerf. J. d. phys. (3) 4 p. 569, 1895; Arch. d. sc. phys. et natur. 34 p. 409, 1895.
Kohlrausch. W. A. 56 p. 185, 1895.
Petit (плотность жидкого ацетилена). Arch. d. sc. phys. et natur. 34 p. 362, 1895.
 С. О. Макаровъ. Удельный вѣсъ морской воды. Изв. Ф. Х. О. 23 стр. 30, 1893.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Сжимаемость жидкостей.

§ 1. Коэффициентъ сжатія. Реально существующія жидкости не обладают свойствомъ абсолютной несжимаемости, которое мы приписываемъ идеальнымъ или совершеннымъ жидкостямъ. Ихъ объемъ v уменьшается, когда увеличивается внешнее давленіе p , подъ которымъ находится каждая единица поверхности жидкости. Если p увеличивается на dp , то объемъ измѣняется на некоторую величину dv , которая пропорциональна объему v и приращенію dp давленія. Обозначая множитель пропорциональности черезъ β и считая его величиною положительною, мы должны написать

$$dv = -\beta dp \dots \dots \dots (1)$$

ибо положительному dp соответствовать отрицательное dv .

Когда онъ отломилъ кончикъ трубки, такъ что внѣшнее атмосферное давленіе могло дѣйствовать на жидкость, то онъ замѣтилъ внезапное пониженіе уровня конца жидкаго столбика въ трубкѣ. Это пониженіе могло имѣть двѣ причины: сжатіе жидкости и расширеніе шарика, на который сперва дѣйствовало только внѣшнее давленіе, а потомъ и внѣшнее и внутреннее. Чтобы отдѣлить другъ отъ друга эти два дѣйствія, онъ помѣстилъ приборъ внутри колокола воздушнаго насоса, изъ котораго былъ выкачанъ воздухъ (см. рис. 258). Вода доходила сперва до некоторой черты *A*, причемъ давленіе на шарикъ изнутри и снаружи можно было считать равнымъ нулю. Когда онъ стюмилъ кончикъ трубки воды опустилась до *B*, а когда онъ затѣмъ выпустилъ воздухъ въ колоколъ, то она вновь поднялась до некоторой точки *A'*, лежащей однако ниже *A*. Canton полагалъ, что смкость шарика, находившагося теперь снаружи и изнутри опыта подѣ одинаковымъ, а именно атмосфернымъ давленіемъ, была въ концѣ опыта такая же, какъ и въ началѣ, и приписалъ опусканіе воды отъ *A* до *A'* сжатію этой жидкости. Въ дѣйствительности, однако, какъ мы увидимъ впоследствии, смкость шарика въ концѣ опыта была нѣсколько меньше, чѣмъ въ началѣ, и потому опусканіе воды въ трубкѣ еще въ большей степени, чѣмъ самъ Canton думалъ, служило доказательствомъ ея сжимаемости. Онъ нашелъ $\gamma = 0,000046$, что прекрасно согласуется съ новѣйшими изысканіями. Повторяя тѣ же опыты со ртутью и производя ихъ при различныхъ температурахъ, Canton замѣтилъ, что съ повышеніемъ температуры сжимаемость воды уменьшается, а сжимаемость ртути увеличивается.

Рис. 258.



Рис. 259.



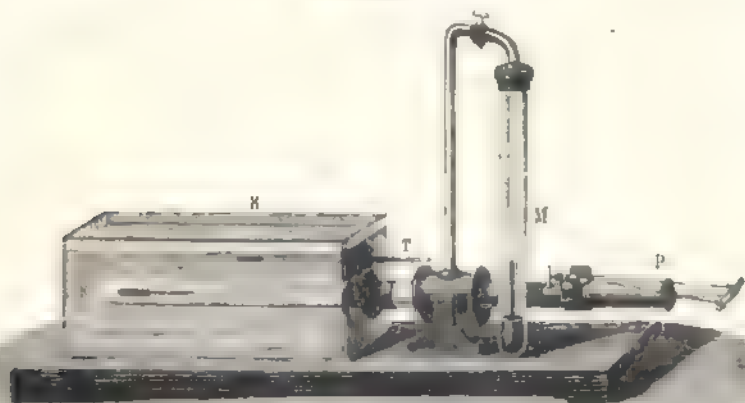
J. Perkins (1820) доказать слѣд. образомъ сжимаемость воды. Онъ устроилъ металлическій сосудъ съ толстыми стѣнками, изображенный на рис. 259. Сосудъ наполнился водою и закрывался внутреннимъ клапаномъ, который давалъ возможность водѣ войти въ сосудъ, когда наружное давленіе было больше внутренняго, но не выпускалъ ее, когда, наоборотъ, перевѣсъ былъ на сторонѣ внутренняго давленія. Весь сосудъ вставлялся и помѣщался въ толстостѣнный цилиндръ (пушку), наполненный водою, которая подвергалась сильному сжатію. Въ другихъ опытахъ сосудъ опускался въ море до извѣстной глубины, въ которой давленіе доходило до 100 атм. После этого сосудъ вновь извлекался. Онъ оказался тяжелѣе, чѣмъ онъ былъ въ началѣ, слѣд. въ него вошло нѣкоторое количество воды, когда онъ находился подѣ сильнымъ, всестороннимъ давленіемъ, при которомъ смкость сосуда даже нѣсколько уменьшалась. Это доказываетъ, что плотность воды при сжатіи увеличивается.

§ 3. Опыты Oerstedt'a (1822). Oerstedt первый построилъ приборъ, въ которомъ сжатіе жидкостей могло быть довольно точно измѣрено. Такого рода

приборы называются пнезометрами. Главная часть прибора Oerstedt'a по виду походила на термометръ съ большимъ цилиндрическимъ резервуаромъ и полосою трубкою съ дѣлениями. Испытуемая жидкость наполняла резервуаръ и часть трубки, гдѣ надъ нею находился маленькій столбикъ ртути. Весь приборъ помещался внутри вертикальнаго толстостѣннаго цилиндра, наполненнаго водою, которую можно было сжимать помощью поршня. Внутри цилиндра помещались термометръ и воздушный манометръ, величина давления была такимъ образомъ извѣстна. Когда производилось сдавливаніе, то ртутный столбикъ опускался внизъ, по величинѣ его перемѣщенія можно было судить о степени сжатія жидкости. Измѣненіемъ емкости резервуара Oerstedt пренебрегали.

Существуютъ пнезометры, въ которыхъ резервуаръ съ испытуемой жидкостью устанавливается трубкою внизъ, концы трубки погружены въ

Рис. 260.



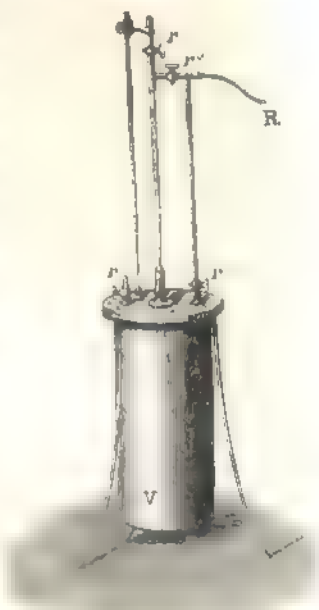
маленькій сосудъ съ ртутью, столбикъ которой находится и въ самой трубкѣ. При сдавливании ртуть въ трубкѣ поднимается.

§ 4. Опыты Sturm'a и Colladon'a (1827). Приборъ, которымъ пользовались эти ученые, изображенъ на рис. 260. Толстостѣнная стеклынная трубка *K* наполнена водою, внутри ея находится термометровидный пнезометръ, трубка котораго весьма тщательно калибрована. Въ немъ содержится испытуемая жидкость, отдѣленная отъ воды длиннымъ столбикомъ воздуха или сѣрнистаго водорода. Трубка *K* вдѣлана въ стѣнку открытаго сосуда *R*, наполненнаго водою, которая служитъ для удержаанія трубки *K* при определенной температурѣ, указываемой термометромъ *T*. Сдавливаніе производилось помощью поршня, находящагося внутри цилиндра *P*, и приводимаго въ движеніе помощью безконечнаго вѣнта и шестерни. Величина достигнутого давления указывалась воздушнымъ манометромъ *M*.

Sturm и Colladon приняли во вниманіе измѣненіе емкости самого сосуда, содержащаго испытуемую жидкость и подверженнаго одинаковому

давлению, какъ внутри, такъ и снаружи. Мы увидимъ, въ послѣдствіи, что объемы, опредѣленные внѣшнейю и внутреннею емкостью, поверхностями сосуда, въ этомъ случаѣ уменьшаются настолько же, насколько они уменьшились бы, еслибы вмѣсто сосуда мы имѣли сплошное тѣло, одинаковаго съ нимъ внѣшняго объема. Это обстоятельство играетъ весьма важную роль въ пнезометрии. Особенно при пнезирования мало сжимаемыхъ жидкостей, какова ртуть, необходимо точно знать, насколько мѣняется емкость самого пнезометра при сжатіи. Чтобы внести необходимую поправку, Sturm и Colladon изслѣдовали, какъ велико относительное удлинение α стеклиннаго стержня при его растяженіи силою, которая равна, положимъ, ps , гдѣ s площадь поперечнаго сѣченія стержня, такъ что p есть растягивающая сила, приходящаяся на единицу площади поперечнаго сѣченія. Они предположили, что если на кусокъ стекла будетъ со всѣхъ сторонъ произведено давленіе, причемъ на каждую единицу поверхности придется давленіе p , то относительное уменьшеніе объема будетъ равно 3α . Мы увидимъ, что это невярно и что потому числа, данныя Sturm'омъ и Colladon'омъ, требуютъ исправленія. Кроме того сжимаемость стекла изъ котораго былъ изготовленъ стержень, могла и не равняться сжимаемости стекла пнезометра. Они нашли слѣдующія числа (исправленныя) для коэффициента α , помноженнаго на 10^6 :

Рис. 261



	Температура.	Давленіе.	$10^6\alpha$.
Вода	0°	1—24 атм.	49.6
Ртуть	0°	1—30	3.4
Эфиръ.	0°	3—12	131.6
»	0°	18—24	120
»	11.4°	2—24	144
Алкоголь	10°	1—2	94.5
»	10°	9—10	92.0
»	10°	21—22	87.5
Азотная кислот.	0°	1—32	338.5

§ 5. Опытъ Regnault (1847). Regnault первый построилъ приборъ, дающій возможность съ точностью опредѣлить то измѣненіе емкости самого пнезометра, которое сопровождается сжатіемъ находящейся въ немъ жидкости. Его приборъ, изображенный на рис. 261, состоитъ изъ крышкаго металлическаго сосуда, наполненнаго водою; внутри него находится продолговатый сосудъ V , съ припаянной къ нему калиброванной волочной трубкой

имѣющей кранъ r' . Въ крышку наружнаго сосуда вставлены кранъ r и трубка съ краномъ r'' ; она можетъ быть соединена съ сосудомъ Vr' помощью крана r'' . Трубка R ведетъ къ резервуару сжатого воздуха, давленіе котораго обозначимъ черезъ p . (Смотря по тому, которые краны открыты, можно подвергнуть сосудъ V , содержащій испытуемую жидкость, четыремъ различнымъ комбинаціямъ давленій, а именно:

1) r'' и r''' закрыты, такъ что давленіе p вовсе не можетъ передаться къ прибору; краны r и r' открыты: снаружи и внутри давленіе равно атмосферному;

2) r и r'' закрыты, r' и r''' открыты: снаружи имѣемъ давленіе p на сосудъ V , а внутри давленіе атмосферное;

3) r и r' закрыты, r'' и r''' открыты: снаружи и внутри имѣемъ давленіе p ;

4) r' и r''' закрыты, r и r'' открыты: снаружи давленіе атмосферное, внутри давленіе p .

Итакъ, давленіе p могло или вовсе не дѣйствовать на сосудъ, или дѣйствовать только снаружи, или только изнутри, или съ обѣихъ его сторонъ. Жидкая столбъ въ капиллярной трубкѣ останавливался на различныхъ высотахъ при этихъ четырехъ случаяхъ расширенія давленій. Комбинируя результаты четырехъ наблюдений, можно вычислить, какъ сжимаемость материала, изъ котораго сдѣланъ внутренний сосудъ, такъ и сжимаемость жидкости, которою онъ былъ наполненъ. Самъ Regnault пользовался этимъ приборомъ главнымъ образомъ для измѣренія сжимаемости материала сосуда, и определялъ β только для воды ($\beta = 0,000047$) и для ртути ($\beta = 0,0000035$).

Grassi (1851) воспользовался приборомъ Regnault для опредѣленія коэффициента сжатія β различныхъ жидкостей. Вотъ нѣкоторыя изъ его числа:

	Температура	$10^6\beta$		Температура	$10^6\beta$
Вода	0°	50.2	Ртуть	0°	2.95
»	10.8	48.0	$SO_2 + 2H_2O$	14°	24.2
»	26.0	45.5	+ $3H_2O$		25.0
»	33.0	44.1	+ $4H_2O$		27.1
Эфиръ	0	111	+ $5H_2O$		27.9
»	14	140	+ $6H_2O$		28.3
Алкоголь	7.3	82.8	+ $10H_2O$	^	31.5
»	13.1	90.4			
Хлороформъ	8.5	62.5			

Ртуть обладаетъ наименьшимъ сжатіемъ изъ всѣхъ изслѣдованныхъ жидкостей. Числа Grassi подтверждаютъ, что съ повышеніемъ температуры сжимаемость воды уменьшается, а другихъ жидкостей увеличивается.

§ 6. **Различныя измѣренія сжимаемости жидкостей.** Jamin. Amaury и Descamps (1869) нашли для ртути вдвое меньшее число, чѣмъ Regnault ($10^6\beta = 1.87$), но изслѣдованія Amagat и др. не подтвер-

длин этого результата: Amagat нашелъ (1869) для ртути $10^6 = 3.92$, число близкое къ числу Sturm'a и Colladon'a (3.4). Де-Монъ (1892) нашелъ $10^6 = 3.74$.

Caillaud (1872) измѣрялъ сжимаемость различныхъ жидкостей при очень высокихъ давленіяхъ и при температурѣ около 10° . Его числа не точны, такъ какъ онъ не измѣрялъ непосредственно сжатія сосуда, содержащаго испытываемую жидкость. Приводимъ нѣкоторые изъ его чиселъ:

	Давленіе	10^6		Давленіе	10^6
Вода . .	705 атм.	46.9	Алкоголь . .	174 атм.	69.4
Эфиръ. .	630 »	145.8	» . .	305	71.9
CS_2 . .	607 »	99.8	» . .	680	74.5

Эти числа привели Caillaud къ заключенію, что сжимаемость жидкостей весьма мало мѣняется съ величиною самого давленія, между тѣмъ какъ Grassi нашелъ, что сжимаемость алкоголя, хлороформа и эфира увеличивается вмѣстѣ съ давленіемъ.

Amagat изслѣдовалъ въ первыхъ своихъ работахъ (1869) зависимость сжимаемости нѣкоторыхъ жидкостей отъ температуры. Онъ нашелъ для эфира: .

t°	13.0	25.4	63.0	78.5	99.0
10^6	168	190	296	365	552.

Для алкоголя $10^6 = 101$ при 14° , и 202 при 99.4° ; для бензола 90 при 16° , и 187 при 99.3° ; для CS_2 онъ нашелъ 87.2 при 15.6° , и 174 при 100° — во всѣхъ случаяхъ быстрое возростаніе сжимаемости съ температурой.

Опыты Pagliani и Visentini, Авенариса и Grimaldi надъ водой и эфиромъ дали слѣдующія числа для 10^6 :

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
Вода . .	51.7	48.54	46.09	44.14	42.65	41.68	41.15	41.19	41.51	42.11	43.0
Эфиръ. .	146.0	168.0	191.0	215.2	240.5	271.0	305.9	344.9	388.8	436.6	489.0.

Для воды получается минимумъ сжимаемости ($10^6 = 41.12$) при 62° .

Сжимаемость растворовъ изслѣдовалъ Dreyer (1888); оказалось, что для растворовъ $CaCl_2$ и KCl она меньше сжимаемости воды, и уменьшается съ увеличеніемъ крѣпости раствора. Для раствора $CaCl_2$ въ водѣ онъ нашелъ

Проц. содержаніе соли	5.8°	17.8°	30.2°	40.9°
10^6	39.7	31.3	25.6	21.7.

Для KCl получились числа:

Проц. содержаніе соли	2.49°	8.28°	16.75°	24.31°
10^6	42.6	38.9	34.1	30.1.

Сжимаемость большинства растворов солей въ водѣ уменьшается съ повышеніемъ температуры.

Растворы серной кислоты сжимаются меньше, чѣмъ вода; минимумъ сжимаемости наблюдается при 80° H_2SO_4 въ водѣ.

Сжимаемость различныхъ жидкостей определялъ Де-Мондъ. Онъ нашелъ для $10^6\beta$ слѣдующія числа:

Касторовое масло	47.234	Жидкій парафинъ . . .	62.690
Льняное	51.825	Вода дистиллированная .	47.430
Миндальное	53.473	Глицеринъ	22.128
Оливковое	56.266	Растворъ сахара . . . }	20.827
		(плотность 1.350) . . . }	

Сжимаемость смѣси оказалась въ некоторыхъ случаяхъ меньше, чѣмъ дасть вычислене (по правилу смѣшенія).

Татт находитъ, что коэффициентъ β , какъ функция давленія p , подл, которымъ жидкость уже находится, выражается формулою вида

$$\beta = \frac{A}{B + p} \quad (5)$$

гдѣ A и B постоянныя числа. Такъ, для воды при 0

$$\beta = \frac{0.3015}{5933 + p},$$

гдѣ p выражено въ атмосферахъ. Для растворовъ соли въ водѣ формула (5) должна быть замѣнена такою

$$\beta = \frac{A}{B + p + c},$$

гдѣ A и B имѣютъ то же значеніе, что и для воды, и гдѣ c пропорционально вѣсу соли, растворенной въ 100 частяхъ воды.

Roentgen и Schneider нашли для воды

$$\begin{array}{lll} \text{при} & 0^{\circ} & 10^6\beta = 51.2 \\ & 9^{\circ} & 10^6\beta = 48.1. \end{array}$$

§ 7. Исслѣдованія Amagat. Въ послѣдніе годы появились цѣлый рядъ работъ Amagat, разрѣшающихъ различные вопросы касательно зависимости сжимаемости жидкостей отъ температуры и отъ давленія.

Увеличивая внѣшнее давленіе, Amagat доходитъ до 3000 атмосферъ. Приборъ, которымъ онъ пользовался, имѣетъ слѣдующее устройство. Стальной толстостѣнный цилиндръ наполненъ глицериномъ; въ нижней его части находится ртуть, въ которую входитъ нижній конецъ трубки пнеуметра, содержащаго испытуемую жидкость. Когда глицеринъ подвергается сжатию, то ртуть поднималась по трубкѣ пнеуметра соответственно измѣненію объема жидкости и емкости самого пнеуметра. Чтобы опредѣлить, до какон

высоты поднялась ртуть. Амагат впаялъ въ стѣнку трубки рядъ платиновыхъ проволокъ, соединенныхъ снаружки (въ глицеринѣ) платиновыми же спиральками, составившими, такимъ образомъ, одинъ непрерывный рядъ. Последняя, первая проволока проходила черезъ стѣнку стального цилиндра, будучи отъ него изолирована непроводникомъ электрическаго тока. Электроды цѣпи, содержащей гальванометръ, были присоединены къ стѣнкѣ стального цилиндра и къ выходящей изъ нея проволоцѣ. Въ этомъ случаѣ цѣпь была замкнута: токъ проходилъ отъ стѣнки цилиндра въ ртуть и въ ртутный столбикъ, вошедшій въ трубку пнезометра, изъ ртути онъ входилъ черезъ последнюю платиновую проволочку къ спиралькѣ, изъ которой каждая имѣла сопротивление въ два ома, и наконецъ къ проволоцѣ, проходившей черезъ стѣнку стального цилиндра. Сопротивление цѣпи мѣнялось скачками на два ома каждый разъ, когда ртуть, поднимаясь по трубкѣ, достигала слѣдующей проволоки, такъ какъ при этомъ изъ цѣпи исключалась одна изъ спиралей и замѣнялась ртутнымъ столбикомъ, сопротивлениемъ котораго можно было пренебречь. Соответственно уменьшенно сопротивленія, увеличивалась сила тока, измѣряемая гальванометромъ. Отсюда поытно, какимъ образомъ по наблюденной силѣ тока можно было опредѣлить до которой изъ платиновыхъ проволокъ, впаянныхъ въ трубку пнезометра, дошелъ ртутный столбикъ, а затѣмъ и объемъ, до котораго была сжата испытываемая жидкость.

Стальной цилиндръ съ пнезометромъ помещался въ большой мѣдный сосудъ, наполненный точнымъ льдомъ или водой известной температуры, которую принимала и испытываемая жидкость; этимъ устранялось влияние нагревания, сопровождающаго сильное сжатие жидкостей.

Въ слѣдующей таблицѣ помѣщены величины 10^{13} для четырехъ жидкостей при 0 и давленіяхъ, возрастающихъ до 3000 атм.

Давленіе.	Вода.	Эфиръ.	Алкоголь.	CS ₂ .
1— 500 атм.	47.5	107.2	76.9	65.7
500—1000 „	41.6	70.8	56.6	52.7
1000—1500 „	35.8	53.7	45.8	42.9
1500—2000 „	32.4	45.2	38.5	36.7
2000—2500 „	29.2	37.1	33.1	32.0
2500—3000 „	26.1	31.7	28.4	29.0

Для всѣхъ четырехъ, а также для остальныхъ восьми жидкостей, изслѣдованныхъ Амагатъ, сжимаемость съ увеличеніемъ давленія уменьшается. При этомъ обнаруживается, что при весьма сильныхъ давленіяхъ какъ бы сглаживаются индивидуальныя свойства жидкостей, но коэффициенты сжатія, весьма различныя при слабыхъ давленіяхъ, принимаютъ близкія другъ другу числовыя значенія при наибольшихъ достигнутыхъ давленіяхъ.

Амагатъ изслѣдовалъ также зависимость сжимаемости жидкостей отъ ихъ температуры. Для эфира онъ получилъ слѣдующія числа для 10^{13}

Давленіе.	0°	20°	50°	100°	198°
50—100 атм.	132,9	158,4	226,6	393,4	—
200—300 »	108,8	125,0	150,4	240,8	364,5
500—600 »	83,5	93,1	110,5	146,4	244,1
900—1000 »	65,4	70,6	80,1	97,4	143,6
1500—2000 »	45,2	47,7	52,6	—	—
2500—3000 »	31,7	33,8	36,6	—	—

Сжимаемость эфира увеличивается съ повышеніемъ температуры; съ увеличеніемъ давленія она уменьшается и дѣлается менѣе зависимою отъ температуры.

Для воды Amagat находитъ при слабыхъ давленіяхъ уменьшеніе сжимаемости при возростаніи температуры до 50° прилизительно; при дальнѣйшемъ повышеніи температуры сжимаемость увеличивается. Чѣмъ сильнѣе давленіе, тѣмъ слабѣе выраженъ этотъ минимумъ; при весьма сильныхъ давленіяхъ онъ почти исчезаетъ и сжимаемость воды съ повышеніемъ температуры увеличивается, какъ и въ случаѣ другихъ жидкостей.

Amagat произвелъ весьма замѣчательныя изслѣдованія надъ вліяніемъ давленія на коэффициенты тепловаго расширенія жидкостей. Мы возвратимся къ этому вопросу въ учени о теплотѣ. Укажемъ здѣсь лишь вкратцѣ на результатъ.

Коэффициентъ расширенія α жидкостей вообще уменьшается съ увеличеніемъ давленія; для воды же онъ увеличивается. При громадныхъ давленіяхъ эти коэффициенты, весьма различные для различныхъ жидкостей, принимаютъ оцнзку другъ къ другу значенія. Индивидуальныя особенности жидкостей и въ этомъ отношеніи сглаживаются, а можетъ быть въ концѣ концовъ и исчезаютъ при весьма большихъ давленіяхъ.

Съ повышеніемъ температуры t уменьшается возростаніе коэффициента тепловаго расширенія α воды, наблюдаемое при увеличеніи давленія; при 50° этотъ коэффициентъ почти не зависитъ отъ давленія, а при $t > 50^\circ$ коэффициентъ α уменьшается при увеличеніи давленія. Это видно изъ слѣдующей таблички, въ которой помѣщены числа $10^6\alpha$:

Давленіе.	0°—10°	10—20°	40—50°	60—70°	90°—100°
1 атм.	14	150	422	556	719
100 »	43	165	422	548	—
200 »	72	183	426	539	—
500 »	149	236	429	523	661
900 »	229	289	437	514	621

Коэффициентъ α для воды при всѣхъ давленіяхъ растетъ съ температурой, это вѣрно даже при 3000 атм., какъ видно изъ слѣдующихъ чиселъ:

	0° 0—10° 1	20° 4—29° 45	40° 45—48° 85
$10^6\alpha =$	391	433	496

Температура наибольшей плотности воды которая при нормальном давлении равна 4°, понижается при увеличении давления. Она при

давлении 41.6 атм. равна 3^о.3

» 93.3 » » 2^о.0

» 144.9 » » 0^о.6.

При еще болѣе сильныхъ давленіяхъ вполне исчезаетъ сжатіе воды при нагреваніи ея выше 0°.

ЛИТЕРАТУРА.

- Canton*. Philos. Trans. 1763 и 1764; *Pogg. Ann.* 12 p. 39, 1828.
Perkins. Philos. Trans. 72, 1820; *Pogg. Ann.* 9 p. 547, 1827.
Oerstedt. Danske Vid. Selsk. Forhndl. 9, 1822; *Ann. ch. et phys.* (2) 21 p. 99, 1822; 22 p. 192, 1823; 38 p. 326, 1828; *Pogg. Ann.* 9 p. 605, 1827.
Despretz. C. R. 21, 1845.
Celladon et Sturm. *Ann. ch. et phys.* (2) 36 p. 113, 225, 1827; *Pogg. Ann.* 12 p. 93, 1828.
Regnault. Mém. de l'Ac. Franc. 21 p. 429, 1847.
Aimé. *Ann. ch. et phys.* (3) 8 p. 257, 1843.
Grassi. *Ann. ch. et phys.* (3) 31 p. 437, 1851.
Jamen, Amaury et Descamps. C. R. 68 p. 1564, 1869.
Quinke. W. A. 19 p. 401, 1883.
Schumann. W. A. 31 p. 14, 1887.
Roentgen und Schneider. W. A. 29 p. 165, 1886; 31 p. 1000, 1887; 33 p. 644, 1888; 34 p. 531, 1888.
Braun. Ber. bayr. Acad. 1886 p. 208; W. A. 30 p. 264, 1887.
Amagat. *Ann. ch. et phys.* (5) 11 p. 520, 1877; (6) 22 p. 137, 1891; 29 p. 505, 1893; J. de Phys. (2) 8 p. 199, 1889; (3) 2 p. 449, 1893, C. R. 68 p. 1170, 1869; 115 p. 638, p. 919, p. 1041, p. 1238, 1893; 116 p. 779, p. 946, 1893.
Paquani et Vicentini. N. Cim. (3) 16 p. 27, 1884; J. de phys. (2) 2 p. 461, 1883.
Tait. Proc. R. Soc. Edinb. 12 p. 46, 1883-84; 20 p. 63, 141, 1892.
Cailletet. C. R. 75 p. 77, 1872.
Roentgen. W. A. 44 p. 1, 1891.
De-Metz. W. A. 41 p. 664, 1890; 47 p. 706, 1892; Ж. Ф. X. О. 22 стр. 126, 1890.
Drecker. W. A. 20 p. 870, 1883; 34 p. 954, 1888.
Dupré and Page. Phil. Trans. 159 p. 619, 1869.
Dupré and Page. *Pogg. Ann. Erg. Bd.* 5 p. 237, 1871.
Gilbault. C. R. 114 p. 209, 1892.
De-Heen. Bull. de l'Acad. Roy. de Belg. (3) 9, 1885.
Barus. Sill. J. (3) 39 p. 478, 1890.
Еленевъ. Ж. Ф. X. О. 5 стр. 109, 1873.
Grimaldi. N. Cim. (3) 19 p. 212, 1886.
Avenarius. Bull. de l'Acad. de St. Petersburg 10, 1877.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Поверхностное натяжение жидкостей.

§ 1. Давление поверхностного слоя. Формула Laplace'a. На стр. 411 мы указали на то, что частицы поверхностной пленки всякой жидкости подвержены силамъ сдѣлания, равнодѣствующимъ которымъ не равна нулю, и направлена во внутрь жидкости, нормально къ ея поверхности. Жидкость какъ бы стремится втянуть въ себя частицы, находящіяся на ея поверхности или, что то же самое, во возможности уменьшить свою поверхность.

Всякое уменьшеніе поверхности жидкости сопровождается потому работою силъ сдѣлания; всякое же увеличеніе — работою внѣшнихъ силъ,

Рис. 262.



результатомъ которой является запасъ потенциальной энергіи жидкости, зависящей, такимъ образомъ, отъ величины ея поверхности. Внезапное уменьшеніе поверхности жидкости влечетъ за собою освобожденіе запаса потен-

циальной энергіи, и, обыкновенно, переходъ ея въ кинетическую энергію движенія самой жидкости. Примѣръ мы видимъ, когда при сильномъ волненіи происходитъ опрокидываніе верхушки волны на ея боковую поверхность. Уменьшеніе свободной поверхности воды сопровождается значительнымъ увеличеніемъ энергіи видимого движенія, чѣмъ и объясняется появленіе такъ называемыхъ гребней при волненіи.

Силы сдѣлания, дѣйствующія на частицы поверхностной пленки, складываются въ одно давленіе, величину котораго мы для единицы поверхности обозначимъ черезъ P . Это давленіе должно зависѣть отъ вида поверхности. Если его величину для плоской поверхности обозначить черезъ K , то на выпуклой поверхности давленіе P больше, а на вогнутой — P меньше, чѣмъ K . Для доказательства рассмотримъ, какія силы дѣйствуютъ на частицы m , m' и m'' (рис. 262). Дѣлання на равныхъ разстояніяхъ отъ плоской st , вогнутой $s't'$ и выпуклой $s''t''$ поверхностей жидкости. Окруживъ m , m' и m'' сферами частичнаго дѣйствія и проведя поверхности mu , $u'r'$ и $u''r''$, симметричныя съ st , $s't'$ и $s''t''$ относительно центровъ сферъ, мы видимъ, что дѣйствія всѣхъ частицъ, заключающихся внутри объемовъ $stmu$, $s't'r'u'$ и $s''t''r''u''$ на соответствующія центральныя частицы, по симметріи равны нулю, такъ что равнодѣйствующія всѣхъ силъ сдѣланія, дѣйствующихъ на m , m' и m'' можно

себя представить проходящими только отъ частицъ, лежащихъ внутри отрезковъ uv , $u'v'u'$ и $u''v''u''$, причемъ наибольшая толщина этихъ отрезковъ около u , u' и u'' одна и та же, и равна радиусу сферы частичнаго дѣйствія минусъ разстоянiе частицъ m , m' и m'' отъ поверхности жидкости. Ясно, что $u'v'u' < uv$ и что $u''v''u'' > uv$, следовательно сила, дѣйствующая на m'' , больше, а на $m' =$ меньше силы, дѣйствующей на m .

То же самое, въ сущности, разсужденiе можно вести и нѣсколько иначе. Пусть m (рис. 263) частица, лежащая вблизи поверхности жидкости, которая можетъ быть или вогнутая A_1B_1 , или плоская AB , или выпуклая A_2B_2 . Проведемъ черезъ m плоскость $MN \parallel AB$. Частицы, лежащiе подлѣ MN тянутъ m во внутрь жидкости; частицы же, расположенныя выше MN , даютъ силу, направленную отъ m къ поверхности жидкости; чѣмъ больше эта сила, тѣмъ меньше равнодѣйствующая f всѣхъ силъ содѣленiя, дѣйствующихъ на m . Сравнивая случаи вогнутой и выпуклой поверхностей со случаемъ поверхности плоской, мы видимъ, что въ первомъ случаѣ находится надъ MN больше, во второмъ, меньше частицъ, чѣмъ при плоской поверхности. Отсюда ясно, что f при выпуклой поверхности больше, а при вогнутой меньше, чѣмъ при поверхности плоской.

Разница проходить отъ дѣйствiя частицъ, расположенныхъ въ пространствѣ, ограниченномъ плоскостью AB и поверхностью A_1B_1 или A_2B_2 . Вычислимъ это дѣйствiе. Laplace (1807) вывелъ слѣдующую формулу для величины нормальнаго давленiя P , производимаго поверхностнымъ натяженiемъ жидкости

$$P = K + \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

Здѣсь K и H двѣ постоянныя, зависящiя отъ рода жидкости и ея физическаго состоянiя; R_1 и R_2 радиусы кривизны двухъ главныхъ нормальныхъ сѣченiй поверхности жидкости, они считаются положительными, когда они направлены во внутрь жидкости. Введемъ новую величину

$$\alpha = \frac{H}{2} \dots \dots \dots (2)$$

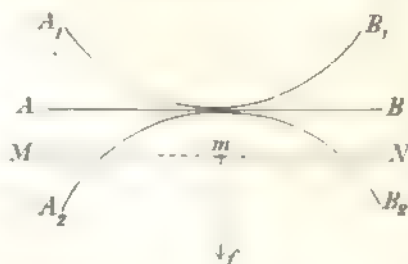
мы получаемъ для P выраженiе вида

$$P = K + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \dots \dots \dots (3)$$

Для плоской поверхности имѣемъ $R_1 = R_2 = \infty$ и слѣд.

$$P = K.$$

Рис. 263.



Для увеличения поверхности должна быть затрачена работа, какъ будто сама поверхность сопротивляется своему увеличению, или выражаясь, какъ должно казаться сначала, чисто картинно, а не соответственно сущ-
дѣла, — какъ будто поверхностная пленка жидкости сопротив-
ляется своему растяжению. Отсюда явился своеобразный взглядъ на
эту пленку, какъ на нѣчто, аналогичное натянутой перепонкѣ или обо-
лочкѣ изъ упругаго, растяжимаго вещества, напр. изъ резины. Если такая
перепонка равномерно растянута, и мы проведемъ по ея поверхности въ
произвольномъ мѣстѣ и въ какомъ угодно направленіи линію, длина которой z ,
то къ этой линіи пришлось бы приложить силы, перпендикулярныя къ ней
и лежащія въ плоскостяхъ, касательныхъ къ перепонкѣ, чтобы удержать
въ неизмѣнномъ натянутомъ состояніи часть, лежащую по одну сторону
отъ линіи z , если часть, лежащая по другую ея сторону, будетъ отнята.
Пусть α היא та сила, которую слѣдуетъ распределить вдоль линіи, длина
которой $z = 1$. Эту силу назовемъ натяженіемъ перепонки или оболочки.

Чтобы растянуть упругую перемычку, необходимо произвести работу, которую легко найти для бесконечно малых изменений поверхности перемычки. Увеличение поверхности S получится, если мы лишь ε , лежащую вдоль ее контура или где-нибудь на ней, переместим параллельно самой себе на отрезок ε' . Если ε не принадлежит контуру поверхности S , то предполагается, что часть перемычки, ограниченная линией ε и лежащая с той стороны, куда ε перемещается, остается при неизменном натяжении. Сумма сил, которые придется приложить к ε , равна $\alpha\varepsilon$; точки приложения этих сил переместятся по направлению сил на отрезок ε' , след. совершаемая работа $dr = \alpha\varepsilon\varepsilon'$. Но $\varepsilon\varepsilon' = dS$, т. е. равно увеличению поверхности; отсюда окончательно

[illegible]

Эта формула тождественна с формулой (5) Гаусса. Если, поэтому, проводить аналогию между поверхностной пленкой жидкости и наткнутой упругой оболочкой, то величина α в формуле (5) Гаусса обозначает натяжение поверхностной пленки, т.е. величину, измеряемую силой, действующей вдоль единицы длины произвольной линии, расположенной на поверхности жидкости, перпендикулярно к этой линии. Сила f , действующая вдоль линии σ , равна

[illegible]

Величину γ назовем поверхностным натяжением жидкости. Къ понятию о такомъ «натяжении» поверхностнаго слоя жидкости мы пришли, проводя аналогию между этимъ слоемъ и упругою оболочкою; эта аналогія существенно опиралась на то, что увеличеніе поверхности жидкости возможно только при затратѣ нѣкоторой работы.

Существует, однако, весьма большой ряд явлений, указывающих на то, что мы здесь имеем дело больше, чем с просто аналогией, что поверхностный слой жидкости по внутренней своей структуре действительно

отличается от остальных, глубже лежащих частей жидкости. Полагают, что онъ обладаетъ большою плотностью, и тѣмъ самымъ по многимъ своимъ свойствамъ можетъ быть уподобленъ натянутой, упругой оболочкѣ. Первый, сравнившій поверхностный слой жидкости съ упругой натянутой оболочкой, былъ Segner (1752); но основателемъ учения о поверхностномъ натяжении жидкостей слѣдуетъ признать Young'a (1805). Весьма большое число различныхъ явленій объясняется наиболее просто, если допустить существованіе поверхностнаго натяженія, которое, какъ ниже будетъ доказано, находится въ простой связи съ величиною поверхностнаго давления. Эта связь и выражается формулою (3) Laplace'a, въ которой P поверхностное давление, а α , какъ было сказано, тождественное съ α въ формулѣ (5) Gauss'a, есть поверхностное натяженіе. На это указала намъ путемъ аналогіи формула (7). Однако объясненіи тѣ или другія явленія поверхностнымъ натяженіемъ жидкости, и вообще особыми свойствами поверхностной пленки, не слѣдуетъ забывать, что это натяженіе, если оно вообще существуетъ, представляется лишь слѣдствіемъ основной причины всѣхъ сюда относящихся явленій, а именно взаимнаго сближенія частицъ жидкостей и непосредственно вызваннаго имъ поверхностнаго давленія, величина котораго выражается формулою (3) Laplace'a, и стремленія жидкости принять какъ можно меньшую поверхность, т.-е. приблизиться къ формѣ шара. Толкованіе величины α въ формулѣ Laplace'a какъ натяженіе остается все-таки проблематичнымъ, какъ и самое существованіе столь плотнаго поверхностнаго слоя, сопротивляющагося разрыву, растяженію и т. д.

Толкованіе объясненія причинъ возникновенія плотнаго поверхностнаго слоя въ жидкостяхъ до сихъ поръ не существуетъ. Одно присутствіе въ этомъ слое силъ, направленныхъ во внутрь жидкости, не можетъ служить объясненіемъ уплотненія этого слоя. Такиѣ силы должны вызвать давленіе, которое по основнымъ законамъ гидростатики передается чрезъ жидкость по всѣмъ направленіямъ, и вызываетъ одинаковое уплотненіе во всей ея массѣ. Напротивъ нѣкоторые разсужденія скорѣе приводятъ къ тому, что плотность поверхностной пленки меньше плотности остальной массы жидкости, по крайней мѣрѣ въ направленіи нормальномъ къ поверхности. Существованіи попытки объяснить особые свойства поверхностной пленки жидкостей сводятся къ доказательствамъ, что въ такой пленкѣ частицы должны быть сближены по направленію, параллельному самой поверхности: но эти доказательства весьма неудобны. Мы ничего не знаемъ, ни о причинахъ возникновенія, ни о законахъ дѣйствія силъ сближенія, намъ неизвѣстно, какъ устанавливается среднее разстояніе между частицами, съ одной стороны подъ вліяніемъ этихъ силъ, съ другой — въ зависимости отъ характера и скорости движенія частицъ. Неудивительно, что мы не можемъ дойти до сколько-нибудь яснаго представленія о распредѣленіи частицъ въ поверхностномъ слое жидкости.

Хотя, такимъ образомъ, ученіе о поверхностномъ натяженіи жидкостей, цѣлкомъ основанное на проведеніи аналогіи между свойствами поверхностной пленки и свойствами упругой натянутой оболочки, и лишено

твердо установленнаго научнаго фундамента, это учение оказалось, однако, весьма полезнымъ, какъ дающее возможность большую группу разнородныхъ явлений привести къ одному общему началу: оно служитъ крайне удобною руководящею нитью для уразумѣнія и описанія многихъ явлений. Вопросъ о реальности поверхностнаго натяженія можно оставить открытымъ. Теоріей возникновенія поверхностнаго натяженія занимается въ особенности van der Mensbrugghe. Онъ и нѣкоторые другіе ученые полагаютъ, что поверхностный слой жидкости обладаетъ не большею, но, напротивъ, меньшею плотностью, чѣмъ остальные части жидкости. Van der Mensbrugghe подвергъ различнымъ соображеніямъ относящимся теоріи весьма рѣзкой критикѣ, состоявшейся, между прочимъ, на работы гельсингфорскаго ученаго Mellberg'a и Worthington'a.

§ 3. Опыты, подтверждающіе существованіе поверхностнаго натяженія жидкостей. Въ этомъ параграфѣ укажемъ лишь на нѣкоторые изъ этихъ опытовъ. Далѣе мы въ этой и въ слѣдующихъ главахъ познакомимся еще со многими явленіями, наиболѣе просто объясняемыми допущеніемъ поверхностнаго натяженія.

Рис. 264



1. Если устроить плоскій сосудъ, одна изъ сторонъ CD (рис. 264) котораго могла бы вращаться около ребра C ; подпереть ее деревянкой и ниткой DE привязать къ выступу E ; затѣмъ налить въ сосудъ воды и пережечь нить DE то сторона CD приподнимется, принимая положеніе CD' . Натяженіе поверхности AD является какъ бы причиною этого явленія.

2. Если на поверхность ртути, налитой въ глубокій сосудъ, посыпать какой-либо порошокъ, и затѣмъ погрузить во ртуть вертикальную толстую стеклянную палочку, то весь порошокъ увлекается въ то углубленіе, которое образуется вокругъ палочки, какъ будто бы ртуть была покрыта кожей, неразрывающейся при погруженіи палочки во ртуть. Этотъ же опытъ удается и съ водою, если палочку предварительно нѣсколько смазать жиромъ или масломъ, или если ее замѣнить стеариновой свѣчкой.

3. Капля, висѣщая на нижнемъ концѣ вертикальной тонкой трубки, содержащей жидкость, имѣетъ совершенно ту же форму, какую принимаетъ тонкій каучуковый листъ, на который наливается вода, заставляющая его принять форму мыльчека. Если прибавлять воды, то этотъ мыльчекъ постепенно удлинняется, постоянно напоминая форму мало-по-малу удлинняющейся капли.

4. Стальную иглу можно осторожно положить на поверхность воды; она будетъ какъ бы лежать на упругой, поддерживающей ее перепонкѣ. Възбъ нѣкоторыхъ насекомыхъ (водомерокъ) на поверхности воды напоминая движеніе по упругой перепонкѣ.

5. Возьмемъ ареометръ или другой, положимъ на него сосудъ, плавающий въ вертикальномъ положеніи по поверхности воды, выходя немного паружу. Прикрѣпимъ къ верхнему концу трубки прибора короткую вертикальную проволоку, а къ ней горизонтальное проволочное колечко или ве-

большой кусочек проволоочной сѣтки и погрузимъ весь приборъ въ воду. Онъ начнетъ всплывать, но когда кольцо или сѣтка дойдетъ до поверхности, то онъ остановится, какъ будто встрѣчая у самой поверхности сопротивление не пропускающей его пленки. Если же его нѣсколько приподнять изъ воды и затѣмъ предоставить самому себѣ, то онъ будетъ плавать, причемъ кольцо или сѣтка можетъ оказаться значительно выше поверхности воды.

6. Мы увидимъ, что поверхностное натяженіе различныхъ жидкостей весьма различное, такъ оно у эфирнаго эфира гораздо меньше, чѣмъ у воды. Если эфиръ, хотя бы въ минимальномъ количествѣ попадетъ на поверхность воды, то поверхностное натяженіе значительно уменьшается. Когда въ предыдущемъ опытѣ приборъ остановится, держа вернымъ кольцомъ до поверхности воды, то достаточно опустить каплю эфира на эту поверхность, чтобы приборъ оказался въ состояніи преодолѣть уменьшившееся поверхностное натяженіе, прорвать поверхностную пленку, и принудиться до того положенія, которое онъ принимаетъ, плавая по водѣ.

7. Насыпемъ на поверхность воды плавающего сѣмени (*semen licopodi*), нальемъ въ стаканъ нѣсколько капель эфира, которыми смочимъ дно и стѣнки стакана, а остатокъ выльемъ, въ стаканѣ останутся пары эфира. Если затѣмъ изъ этого стакана выплывать тягучие пары эфира на поверхность воды, то порошокъ быстро во все стороны расползется отъ того мѣста, на которое попадаютъ пары эфира: явленіе весьма эффектное, такъ какъ самые пары не видны и кажется, что мантия лироизма производится съ пустымъ стаканомъ. Объясняется оно тѣмъ, что въ той части поверхности воды, на которую попадаютъ пары эфира, уменьшается поверхностное натяженіе, вслѣдствіе чего остальная часть поверхностной пленки, сохранившая свое натяженіе, быстро сокращается, улетая за собою и насыпанный на нее порошокъ.

Капли воды, висѣщая у нижняго конца вертикально поставленной трубки, спадаютъ, если вблизи ея помѣстить эфиръ.

8. Жидкости могутъ принимать форму тонкихъ пленокъ, находясь въ такъ наз. пластинчатомъ состояніи, которое будетъ ниже разсмотрѣно подробно. Пока замѣтимъ, что трудно получать пленки изъ чистой воды; зато изъ мыльной воды онѣ получаются легко: для этого достаточно опустить въ такую воду проволоочное кольцо; если его затѣмъ осторожно вынуть, то оно окажется затянутымъ жидкою, весьма тонкою пластинкою. На такой жидкой пластинкѣ особенно рѣзко замѣчаются явленія поверхностнаго натяженія, дѣйствующаго на обѣихъ ея сторонахъ. Если пластинку образовать на краю воронки, то она сама начнетъ перемѣщаться во внутрь воронки, причемъ ея поверхность будетъ постепенно уменьшаться.

Нетрудно наложить на горизонтальную жидкую пластинку маленькое колечко изъ предварительно смоченной нитки. Это колечко приметъ какую-нибудь совершенно неправильную форму (см. рис. 265 слѣва). Если, однако, прорвать часть пленки, находящуюся внутри нити, такъ что жидкая пластинка останется только между нитью и наружной проволокой, то нить

подъ влиянием натяжения жидкой пленки приметъ форму окружности какъ показано на рис. 265 справа.

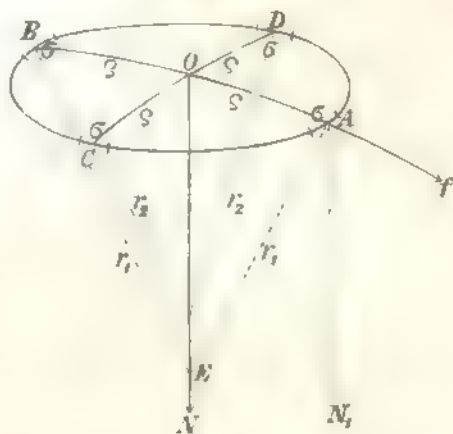
9. Подобное же явление обнаруживается если колечко изъ вити положить на поверхность воды, налитой въ сосудъ и затѣмъ во внутрь колечка опустить нѣсколько капель спирта или эфира. наружное натяжение, получивъ перевѣсъ надъ внутреннимъ, заставитъ колечко принять форму круга.

10. Маленький кусочекъ камфоры, брошенный на чистую поверхность воды, приходитъ въ быстрыя и неправильныя движенія. Объясняется это странное на видъ явление тѣмъ, что камфора растворяется въ водѣ, вследствие чего уменьшается поверхностное натяжение, а такъ какъ растворение

Рис. 265.



Рис. 266.



не происходитъ равномерно со всѣхъ сторонъ, то кусочекъ камфоры и увлекается въ ту сторону, съ которой поверхностное натяжение больше.

§ 4. Связь между нормальнымъ давлением P и поверхностнымъ натяжениемъ α . Допустимъ существованіе поверхностнаго натяженія α , определяемого формулою (8) стр. 457, т.е. α сила, распределенная вдоль линіи σ перпендикулярно къ ней и касательно къ поверхности жидкости. или формулою (7), определяющею величину работы $d\alpha$, которая затрачивается при увеличеніи поверхности на dS .

Формула (3) Laplace'a даетъ въ этомъ случаѣ связь между нормальнымъ давлениемъ P и поверхностнымъ натяженіемъ α . Докажемъ теперь эту формулу.

Считая поверхностный не плоскій слой жидкости за натянутую упругую пленку и вычисляя давление, которое она производитъ, мы получимъ избытокъ нормальнаго давления P надъ тѣмъ давлениемъ K , которое существуетъ при плоской поверхности, т.е. величину $P - K$. Пусть O (рис. 266) точка на поверхности жидкости, опишемъ вокругъ нея кривую на поверхности, всѣ точки которой лежали бы на одномъ и томъ же разстояніи ρ отъ точки O . При безконечно маломъ ρ мы можемъ эту кривую принять за окружность. Вліяніе поверхностнаго натяженія, по принятому нами воз-

зрѣнію, сводится къ дѣйствию силъ, равномерно распределенныхъ вдоль этой окружности, причемъ на единицу длины приходится сила α .

Проведемъ нормаль ON къ поверхности и черезъ нее двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости, которыя пересѣкутъ поверхность по кривымъ AB и CD . Около точки A возьмемъ элементъ ε окружности и проведемъ линію AE нормально къ поверхности въ точкѣ A . При безконечно маломъ ε , разстояніе AE имѣетъ своимъ предѣломъ радиусъ кривизны r_1 нормального сѣченія AB (стр. 40). Къ элементу ε приложена сила натяженія $f = 2\alpha$ по направленію, перпендикулярному къ ε и къ AE . Эта сила даетъ слагаемую, параллельную ON , чѣмъ и вызывается увеличеніе нормальнаго давленія при выпуклой, и уменьшеніе при вогнутой поверхности. Величина слагаемой равна $f \cos(f, AN)$; но такъ какъ $f \perp AE$, то она равна также $f \sin OAE = 2\alpha \frac{\varepsilon}{r_1}$. Совершенно такую же нормальную слагаемую даетъ натяженіе, дѣйствующее на элементъ ε окружности, расположенный около точки B . Обѣ силы даютъ вмѣстѣ нормальное давленіе $2\alpha \frac{\varepsilon}{r_1}$. Обозначая черезъ r_2 радиусъ кривизны нормальнаго сѣченія CD , перпендикулярнаго къ AB , получаемъ для нормальнаго давленія, вызваннаго натяженіемъ въ элементахъ ε , расположенныхъ около C и D , величину $2\alpha \frac{\varepsilon}{r_2}$. Всѣ четыре силы даютъ давленіе $2\alpha \varepsilon r \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$. На основаніи известной теоремы, сумма $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ равна суммѣ $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, гдѣ R_1 и R_2 радиусы кривизны главныхъ сѣченій поверхности. Такимъ образомъ четыре силы, приложенныя къ элементамъ ε въ точкахъ A, B, C и D даютъ нормальное давленіе

$$p = 2\alpha \varepsilon r \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Полное нормальное давленіе, вызванное натяженіемъ вдоль окружности, получится, если мы возьмемъ сумму величинъ p для всехъ группъ ε , по четыре каждый разъ исчерпывающихъ всю окружность. Такъ какъ $\sum 4\varepsilon = 2\pi r$, то $\sum \varepsilon = \frac{1}{2} \pi r$ и слѣд.

$$\sum p = 2\alpha r \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sum \varepsilon = \alpha \pi r^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Мы получимъ нормальное давленіе $P - K$ отнесенное къ единицѣ поверхности, раздѣливъ только что найденное давленіе $\sum p$ на поверхность πr^2 ; итакъ

$$P - K = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

отсюда формула Laplace'a

$$P = K + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Итакъ, дѣйствительно, существованіе разницы между нормальнымъ давленіемъ при плоской и при неплоской поверхностяхъ можетъ быть объяснено вліяніемъ поверхностнаго натяженія. Формула (10) показываетъ, что чѣмъ больше поверхностное натяженіе жидкости, тѣмъ больше разность между нормальнымъ давленіемъ при плоской и при неплоской поверхностяхъ жидкости.

Способы опредѣленія численнаго значенія поверхностнаго натяженія α будутъ разсмотрѣны въ слѣдующей главѣ. Замѣтимъ только, что по теоріи Laplace'a K и α имѣютъ слѣдующее значеніе:

$$K = \frac{2\pi\delta}{3g} \int_0^{\infty} \rho^3 f(\rho) d\rho; \quad \alpha = \frac{7\delta}{2g} \int_0^{\infty} \rho^4 f(\rho) d\rho \quad (11)$$

Здѣсь δ плотность жидкости, ρ разстояніе двухъ молекулъ жидкости, дѣйствующихъ другъ на друга съ силою F , равною

$$F = mm'f(\rho) \quad (12)$$

§ 5. Абсолютная величина нормальнаго давленія K . Мы изложимъ въ слѣдующей главѣ способы опредѣленія поверхностнаго натяженія α . Разсмотримъ теперь величину нормальнаго давленія K при плоской поверхности. На стр. 136 уже было упомянуто, что эта величина непосредственно измѣрена быть не можетъ, и что косвенные способы ея опредѣленія приводятъ къ весьма солиднымъ величинамъ этого давленія.

Укажемъ на двѣ попытки опредѣленія величины K . Первая изъ нихъ принадлежитъ van der Waals'у. На стр. 361 мы познакомились съ его формулою (9) состоянія газовъ, въ которой членъ $\frac{a}{v^2}$ изображаетъ уменьшеніе давленія газа, происходящее вследствие сближенія газовыхъ частицъ. Эта величина есть ничто иное какъ поверхностное давленіе газовъ. Van der Waals допускаетъ, что его формула

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (13)$$

приложима и къ жидкостямъ, для которыхъ мы слѣд. имѣемъ

$$K = \frac{a}{v^2} \quad (14)$$

Измѣримъ p въ атмосферахъ, и принявъ за единицу объема объемъ одного килограмма газа при 0° и давленіи въ 1 атм. получаемъ для углекислоты на основаніи ея отступленій отъ закона Бойля-Мариотта $a = 0.00874$. Объемъ $v = \frac{1}{500}$, когда углекислый газъ перешелъ въ жидкое состояніе, а потому для жидкой углекислоты поверхностное давленіе равно

$$K = \frac{a}{v^2} = 2180 \text{ атмосфер.}$$

Подобнымъ образомъ получаются слѣдующія числа.

	K
Эфиръ	1300—1430 атм.
Алкоголь	2100—2400 „
Вода	10700 „

Итакъ, внутренняя масса воды находится при давленіи въ 10000 атм., что равняется 100 килогр. на кв. миллим. поверхности.

Stefan (1889) основываетъ опредѣленіе K на совершенно другихъ соображеніяхъ. Онъ разсуждаетъ такъ: чтобы перевести молекулу жидкости изъ внутренней массы въ самую поверхность, т.е. на нее дѣйствуетъ уже лишь полусфера, см. рис. 248 стр. 433, слѣдуетъ произвести половину той работы, которая потребна, чтобы молекулу изъ внутренней массы жидкости вывести въ наружное пространство, наполненное насыщенными парами той же жидкости. Эту послѣднюю работу легко найти, зная величину скрытой теплоты испаренія. Stefan получаетъ слѣдующую формулу

$$(K - p)r = \frac{1}{2} Q.$$

гдѣ p — плотность насыщенн. паровъ, r — объемъ одного грамма жидкости и Q — скрытая теплота испаренія, выраженная въ механическихъ единицахъ. Для эфира Stefan получаетъ $K = 1284$ атм.

§ 6. Форма, принимаемая жидкой массой подъ вліяніемъ поверхностнаго натяженія. Опыты Plateau. Для равновѣсія жидкой массы, не подверженной вліянію вѣшнихъ силъ, необходимо, чтобы давленіе, подѣляющееся на площадь, имѣло бы одно и то же значеніе во всѣхъ точкахъ ея поверхности. Формула (10) Laplace'a даетъ условие

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{Const.} \quad (15)$$

Поверхность жидкости должна во всѣхъ точкахъ имѣть одну и ту же среднюю кривизну. Такихъ поверхностей существуетъ безконечное множество.

Plateau (1843—1863) какъ способъ получения жидкихъ массъ, находящихся какъ бы только подѣляемъ поверхностнаго натяженія. Для этого слѣдуетъ помѣстить жидкость въ другую, съ которою она бы не смѣшивалась и которая имѣла бы одинаковую съ нею плотность. Простейшій примѣръ представляетъ масло (пашу, прованское), омывенное въ смѣсь воды и алкоголя, которую не трудно подобрать такъ, чтобы маленькая капля масла въ ней не тонзла и не плавала. Полезно подкрасить масло, которое внутри смѣси принимаетъ форму шара (рис. 267). Смѣсь бензола съ бромистымъ этиленомъ, для удобства наблюденія слегка подкрашенная іодомъ, принимаетъ также форму шара внутри воды, въ которой растворено подходящее количество поваренной соли.

Если черезъ жидкій шаръ, полученный такимъ образомъ, провести вертикальную металлическую ось, которую затѣмъ быстро вращать, то и шаръ

начать вращаться. Онъ при этомъ сплюсчивается, а при большой скорости вращения отъ него отдѣляется экваториальный слой, образуя кольцо. Значеніе этихъ опытовъ для космогоніи повѣстно и всѣмъ извѣстно.

Чтобы получить жидкія массы другой формы, слѣдуетъ ихъ привести въ соприкосновеніе съ различными проволоочными фигурами. Такъ около проволоочнаго кольца можетъ образоваться жидкая масса въ видѣ чечевицы *A*, рис. 267. Если помѣстить жидкій шаръ на кольцо *C*, поддерживаемое треножникомъ, коснуться этого шара сверху другимъ кольцомъ *C*, и поднять послѣднее, то можно придать маслу форму прямого цилиндра, основанія котораго представляютъ сегменты шаровъ; радиусы r этихъ сегментовъ равны диаметру основанія цилиндра $2R$. Послѣднее соотношение

Рис. 267.

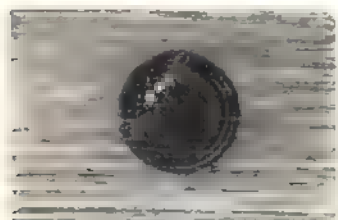
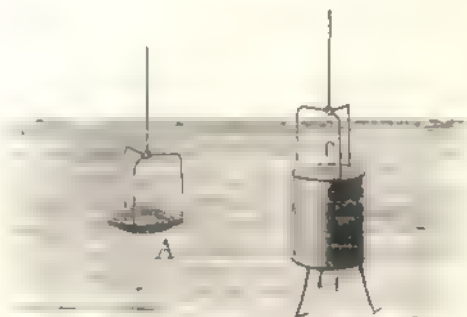


Рис. 268.



прямо вытекаетъ изъ условія (15). На боковой поверхности $R_1 = \infty$, $R_2 = R$; на выпуклыхъ основаніяхъ $R_1 = R_2 = r$; условіе (15) даетъ $\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$, откуда $r = 2R$.

Если верхнее кольцо *C* еще болѣе поднять, то получается форма суженная посрединѣ, напоминающая однополый гиперболоидъ. При нѣкоторомъ разстояніи кольцо получаетъ поверхность съ плоскими основаніями, для которыхъ $R_1 = R_2 = \infty$; отсюда слѣдуетъ, что на боковой поверхности $R_1 = R_2$. Такая поверхность называется катеноидомъ. Она можетъ быть получена вращеніемъ кривой линіи около нѣкоторой прямой. При дальнѣйшемъ подниманіи верхняго кольца получается рядъ суженій (андалондъ), и если вдоль оси помѣстить жесткую проволоку, то можно получить форму, мало отличающуюся отъ ряда шаровъ; эта форма неустойчивая.

Прямой цилиндръ также неустойчивъ, когда его длина въ π разъ превышаетъ его диаметръ. Онъ распадается на шары, между которыми помѣщается по одному или по нѣсколько маленькихъ шариковъ, образующихся изъ тѣхъ жидкихъ янтъ, которыя до полнаго разрыва всего столба соединяють образующіеся шары.

Plateau получалъ также жидкіе многогранники, помѣщая масло въ

проволочной основѣ, воспроизводящей ребра многогранника. (Отнимая лишнее масло пипеткой, онъ нашелъ, что все стороны одновременно дѣлались плоскими, какъ это и требуется условиемъ (15).

§ 7. Пластинчатое состояніе жидкостей. Мыльные пузыри. Приводя въ § 3 примѣры опытовъ, подтверждающихъ существованіе поверхностнаго натяженія, мы упомянули о пластинчатомъ состояніи, въ которомъ жидкости легко получаютъ на замкнутыхъ проволочныхъ фигурахъ. Для этихъ опытовъ особенно пригодна мыльная вода, къ которой прибавленъ глицеринъ или растворъ сахара.

Когда жидкая пленка замкнута и не состоитъ изъ плоскихъ частей, то воздухъ внутри нея долженъ имѣть большую упругость, чѣмъ воздухъ наружный. Дѣйствительно, такая пленка имѣетъ на наружной выпуклой сторонѣ давленіе

$$P_1 = K + 2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

а на внутренней вогнутой давленіе

$$P_2 = K - 2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Отсюда слѣдуетъ, что она производитъ давленіе

$$P = 2\pi\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

во внутреннюю сторону, и на такую величину должна упругость воздуха внутри замкнутой пленки превышать упругость наружнаго воздуха. Такъ, какъ эта разность не можетъ быть различною въ различныхъ мѣстахъ замкнутой пленки, то мы получаемъ для поверхности пленки условіе

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{Const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

т. е. то же самое, какое мы имѣли для поверхности жидкости въ предыдущемъ параграфѣ, см. (15) стр. 464.

Поверхность незамкнутой пленки, подверженной одинаковому давленію съ двухъ сторонъ ($P = 0$), должна удовлетворить условію

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

т. е. она должна составлять часть поверхности, во всѣхъ точкахъ которой кривизна нуль. Такихъ поверхностей существуетъ безконечное множество; одна изъ нихъ получается напр., когда жидкую пленку образовать между двумя непараллельными прямыми проволоками. Въ частномъ случаѣ пленка можетъ быть плоская ($R_1 = R_2 = \infty$) и только такая можетъ образоваться на плоской проволочной фигурѣ. Единственная поверхность вращения, удовлетворяющая условію (18), кромѣ плоскости, есть катеноидъ, см.

иде R радиусъ шара. Это давление обратно пропорціонально радиусу шара, и потому давление внутри очень малыхъ жидкихъ пузырьковъ, изъ какихъ-либо, можетъ быть, состоятъ облака, должно быть весьма велико. Если образовать мыльный пузырь на концѣ трубки, то онъ самъ собою начинаетъ уменьшаться, причемъ струя воздуха съ большою силою выходитъ изъ другого конца трубки.

Соединяя внутреннее пространство шара съ манометромъ можно измѣрить величину давления P .

Если на двухъ концахъ трубки, имѣющей форму \sqcap помѣстить два мыльных пузыря различной величины, то меньшій изъ нихъ начинаетъ еще болѣе уменьшаться въ объемѣ, и воздухъ перейдетъ изъ него въ болѣе большой пузырь, который увеличивается въ объемѣ.

Изъ мыльного пузыря можно помощью проволочныхъ колецъ получить нѣтъ тѣ формы поверхностей постоянной кривизны, см. (17), которыя

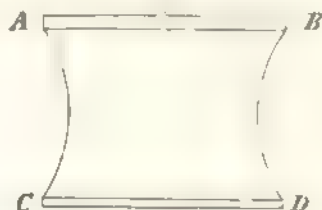
Рис. 273.



Рис. 274.



Рис. 275.



при подобныхъ же манипуляцияхъ принимаетъ жидкость, см. рис. 268. Если мыльный пузырь положить на кольцо C , рис. 276, сверху коснуться его вторымъ кольцомъ и приподнять, то послѣднее, то получается сперва форма съ выпуклою боковой поверхностью и основаниями; далѣе получается цилиндръ съ шаровыми сегментами на основанияхъ ($r = 2R$, см. стр. 465). Затѣмъ катеноидъ съ плоскими основаниями, для котораго кривизна $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = 0$ и наконецъ подолъ съ сильно вогнутой боковой поверхностью и вогнутыми основаниями. Если прорвать пленки на самихъ кольцахъ, то боковая поверхность очевидно представить катеноидъ.

Толщина жидкой пленки можетъ быть весьма мала, она определяется наблюденіемъ явленія цѣтковъ тонкихъ пластинокъ, съ которыми мы познакомимся во второмъ томѣ. Plateau наблюдалъ мыльный пузырь, толщина стѣнокъ котораго равнялась 0.0001134 мм. Отсюда слѣдуетъ, что радиусъ сферы частичнаго дѣйствія не превышаетъ $\rho = 0.0000567$ мм., ибо стѣнка должна по крайней мѣрѣ состоятъ изъ двухъ пленокъ, толщина каждой изъ которыхъ равна ρ .

Не всякая жидкость одинаково легко получается въ пластничатомъ состояніи. По изслѣдованіямъ Plateau здѣсь играетъ роль особая повер-

ностная вязкость, неодинаковая для различных жидкостей. Онь из-слѣдовать ее, наблюдая время, въ теченіе котораго магнитная стрѣлка, отклоненная на 90° отъ магнитнаго меридіана, поворачивается на 45° , сперва при полномъ погруженіи стрѣлки въ жидкость, а потомъ, когда она только касается нижнею стороною поверхности жидкости. Для воды въ первомъ случаѣ потребовалось 2.37 сек., во второмъ 4.59 сек.; однако стрѣлка у поверхности воды на 8° переходила черезъ положеніе равновѣсія, а внутри воды только на 3.7° . Это кажется противорѣчіе объяснилось, когда Plateau обсыпалъ поверхность воды мелкимъ порошкомъ. Оказалось, что часть поверхности, какъ нѣчто цѣлое, перемѣщалась вмѣстѣ со стрѣлкою. Изъ этихъ опытовъ Plateau заключилъ, что поверхностная вязкость воды больше, чѣмъ ея вязкость внутренняя. То же самое относится къ глицерину.

Рис. 276.

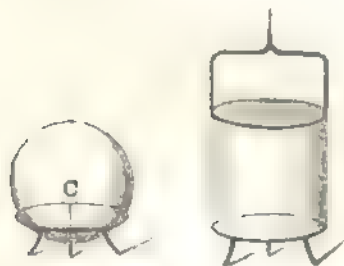
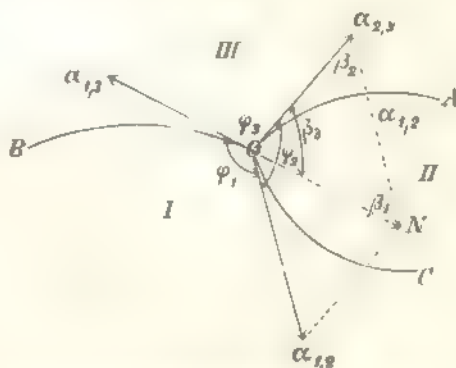


Рис. 277.



къ насыщенному раствору соды и т. д. Въ другихъ жидкостяхъ, наоборотъ, поверхностная вязкость меньше внутренней, сюда относятся алкоголь, эфиръ, сероуглеродъ, терпентинное и оливковое масла. Растворъ сапонины обладаетъ особенно большою поверхностною вязкостью. Позднѣйшія изслѣдованія Oberbeck'a, Reitz и др. подтвердили наблюденія Plateau. Жидкости, обладающія большою поверхностною вязкостью при не очень большомъ поверхностномъ натяженіи сильно плинются и легко приводятся въ пластичное состояніе.

§ 8. Поверхностное натяженіе при соприкосновеніи нѣсколькихъ срединъ. Опредѣляя, какимъ силамъ подвержена частица, расположенная на самой поверхности жидкости, мы на стр. 433 (рис. 248) предполагали, что на такую частицу m'' дѣйствуютъ только молекулы самой жидкости, расположенныя въ полусферѣ частичнаго дѣйствія, и что слѣд. надъ жидкостью нѣтъ частицъ, которыя бы дѣйствовали на m' по направленію снизу вверхъ. Такое разсужденіе можетъ быть допущено, когда надъ жидкостью находится газъ плотность котораго невелика. Но когда надъ нею имѣется среда болѣе плотная, то надъ m' оказывается другая полусфера частичнаго дѣйствія, имѣющая, можетъ быть, другой радиусъ и дѣйствующая съ силою, имѣющею направленіе внѣшней нормали къ поверхности жидкости. Отсюда

следует, что поверхностное давление P , а след. и натяжение α уменьшаются, когда над жидкостью находится другая жидкая или твердая среда. Поверхностное натяжение α_{12} на границе двух жидкостей не равно разности $\alpha_1 - \alpha_2$ поверхностных натяжений каждой из жидкостей в воздухе; это уже видно из того, что для смешивающихся жидкостей $\alpha_{12} = 0$, между тем как α_1 и α_2 могут быть и неравны.

Составим условия, которым должны удовлетворять натяжения в трех поверхностях раздела трех сред, из которых одна может быть и воздухом. Пусть на рис. 277 изображены три средины I, II и III; их поверхности соприкосновения суть OA , OB и OC . Эти поверхности пересекаются по некоторой кривой, касательная къ которой въ O перпендикулярна къ плоскости рисунка. Поверхностные натяжения $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ и $\alpha_{2,3}$ можно рассматривать как силы, приложенныя къ точкѣ O (точнѣе къ единицѣ длины кривой) по направлению касательныхъ къ поверхностямъ OC , OB и OA . Наконец, обозначимъ черезъ φ_1 , φ_2 и φ_3 углы между касательными къ этимъ поверхностямъ. Для равновѣсія частицы, лежащей вдоль кривой раздела трехъ средъ, необходимо, чтобы три силы $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ и $\alpha_{2,3}$ взаимно уравновѣсивались, т.-е. чтобы каждая изъ нихъ была равна по величинѣ и противоположна по направлению равнодействующей двухъ другихъ. Пусть ON равнодействующая силъ $\alpha_{1,2}$ и $\alpha_{1,3}$, тогда должно быть $\alpha_{2,3} = ON$. Углы β_1 , β_2 и β_3 въ треугольникѣ $O\alpha_{1,2}N$ равны

$$\beta_1 = \pi - \varphi_1; \beta_2 = \pi - \varphi_2; \beta_3 = \pi - \varphi_3. \quad (20)$$

Отсюда следует, что если построить треугольникъ, стороны котораго равны натяжениямъ $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ и $\alpha_{2,3}$, то внѣшние углы этого треугольника будутъ равны угламъ между поверхностями раздела трехъ средъ. Очевидно $\alpha_{1,2} : \alpha_{1,3} : \alpha_{2,3} = \sin \beta_3 : \sin \beta_2 : \sin \beta_1$; след. (20) даетъ

$$\frac{\alpha_{1,2}}{\sin \varphi_3} = \frac{\alpha_{1,3}}{\sin \varphi_2} = \frac{\alpha_{2,3}}{\sin \varphi_1}. \quad (21)$$

Далѣе

$$\alpha_{1,2}^2 = \alpha_2^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha_2\alpha_1\cos\beta_3,$$

откуда

$$\cos \beta_3 = -\cos \varphi_3 = -\frac{\alpha_2^2 + \alpha_1^2 - \alpha_{1,2}^2}{2\alpha_2\alpha_1}. \quad (22)$$

Наиболѣе важное слѣдствіе изъ всего предыдущаго заключается однако въ томъ, что каждое изъ трехъ натяжений должно быть меньше суммы двухъ остальныхъ, такъ напр.

$$\alpha_{1,2} < \alpha_{2,3} + \alpha_{1,3} \quad (23)$$

Когда среда III есть воздухъ, то это неравенство даетъ условіе для

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Явленія смачиванія и волосности.

§ 1. Соприкосновеніе жидкостей съ твердыми тѣлами. Силы сцепленія дѣйствуютъ также между частицами жидкаго и твердаго тѣла, находящихся въ соприкосновеніи. Поэтому поверхностное давление P , а слѣд. и поверхностное натяженіе α жидкости должны измѣниться, когда жидкость граничитъ съ твердымъ тѣломъ. Недостающая полусфера около частицы m''

Рис. 279.

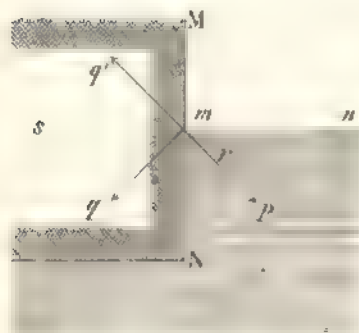
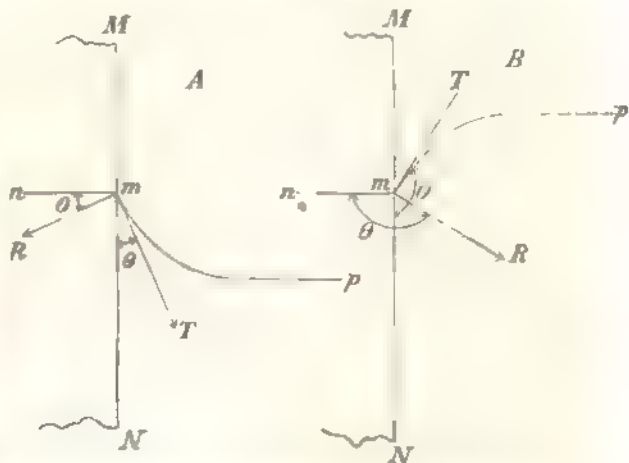


Рис. 280.



на рис. 248 (стр. 433) въ томъ случаѣ существуетъ, заполненная частицами твердаго тѣла.

Смотря по относительной величинѣ сцепленія между однородными частицами жидкости, и сцепленія между частицами твердаго и жидкаго тѣла, слѣдуетъ отличать два случая, которые характеризуются явленіями смачиванія и несмачиванія твердаго тѣла жидкостью. Съ чисто вишней стороны эти явленія заключаются въ слѣдующемъ. Когда твердое тѣло смачивается жидкостью, то послѣдняя къ періоду пристаётъ. Капли жидкости расплывается по поверхности твердаго тѣла тѣло, опущенное въ жидкость и затѣмъ вынутое, оказывается покрытымъ тонкимъ слоемъ жидкости, медленно стекающей и образующей на виланемъ концы капли; если погрузить часть тѣла въ жидкость, то поверхность послѣдней дѣлается волнutoй, т.-е. приподнятой около поверхности твердаго тѣла. Такъ напр., чистое стекло смачивается водою.

Когда жидкость не смачиваетъ твердаго тѣла, то первая ко второму не пристаётъ. Капля жидкости не расплывается по поверхности твердаго тѣла, но получаетъ выпуклую боковую поверхность приближающуюся

къ поверхности шара по мѣрѣ уменьшения капли; если тѣло погрузить въ жидкость и затѣмъ вынуть, то на немъ не оказывается слоя жидкости; поверхность жидкости, граничащая съ твердымъ тѣломъ, въ всею отчасти погруженнымъ, оказывается выпуклой, т.-е. опускающейся внизъ около вертикальной поверхности твердаго тѣла. Такъ напр. стекло не смачивается ртутью, и тѣла, покрытыя тонкимъ слоемъ жира или парафина не смачиваются водою.

§ 2. Краевой уголъ. Элементарное объясненіе измѣненія горизонтальной поверхности жидкости m (рис. 279) на границѣ твердаго тѣла MN заключается въ слѣдующемъ. На частицу m дѣйствуютъ съ одной стороны сила p сцепленія соседнихъ жидкихъ частицъ, съ другой — силы q и q' притяженія двухъ половинокъ твердаго тѣла MN . Равнодѣйствующая R всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на m , можетъ быть направлена во внутрь твердаго тѣла (рис. 280 А) или во внутрь жидкости (рис. 280 В).

Для равновѣсія жидкостей необходимо, чтобы въ каждой точкѣ поверхности сила, дѣйствующая на ея частицы, была нормальна къ этой поверхности. Отсюда слѣдуетъ что въ первомъ случаѣ касательная mT къ поверхности жидкости въ m составитъ острый уголъ $\theta = \angle TmN$ съ погруженною поверхностью тѣла, и слѣд. сама поверхность mn жидкости оказывается погнутою и приподнятою. Это тотъ случай, когда дѣйствіе твердаго тѣла на жидкость велико, когда происходитъ смачиваніе. Уголъ θ , который равенъ углу nmK между внутренними нормальными къ поверхностямъ жидкаго и твердаго тѣла, называется краевымъ угломъ. Его величина зависитъ отъ положенія силы R , т.-е. исключительно только отъ рода жидкости и твердаго тѣла. Когда жидкость смачиваетъ твердое тѣло, то краевой уголъ острый.

Во второмъ случаѣ, когда перевѣсъ на сторонѣ силъ взаимнаго сцепленія частицъ жидкости, и равнодѣйствующая R направлена во внутрь жидкости, рис. 280 В, краевой уголъ θ между касательной mT и погруженною частью твердаго тѣла, равный углу nmK между внутренними нормальными mn и mK , будетъ тупой. Поверхность mn жидкости выпуклая. Въ этомъ случаѣ твердое тѣло не смачивается жидкостью.

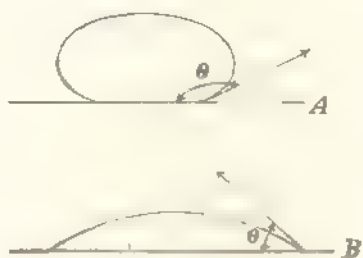
Разсмотримъ точнѣе условія равновѣсія трехъ соприкасающихся срединъ (рис. 281), изъ которыхъ одна твердая (I), вторая (II) жидкая, а третья (III) можетъ быть жидкой или газообразной. Обозначимъ черезъ α_2 натяженіе въ поверхности соприкосновенія твердаго тѣла I и жидкости II; черезъ α_1 натяженіе на границѣ жидкости II и газа или жидкости III, наконецъ, черезъ α_1 натяженіе на поверхности твердаго тѣла I и газа или жидкости III. Мы допускаемъ, такимъ образомъ, натяженіе и на поверхности твердаго тѣла ограниченного газомъ или пустою, оставляя открытымъ вопросъ о физическомъ значеніи и о реальности такого натяженія. Частица m жидкости какъ бы притягивается массою твердаго тѣла по направленію mM въ случаѣ смачиванія твердаго тѣла жидкостью. Слѣдовательно по аналогіи мы можемъ и здѣсь допустить существованіе натяженія α_1 . Quinke указываетъ на то, что если жидкая масса обладаетъ поверхностнымъ натяженіемъ то нѣтъ причины

почему такое должно исчезнуть при ее затвердѣваніи. Въ отдѣлѣ шестомъ мы познакоимся съ явленіемъ, указывающимъ на существованіе въ поверхностномъ слое твердаго тѣла чего-то аналогичнаго натяженію въ жидкостяхъ. Впрочемъ, поверхностное натяженіе $\alpha_{1,2}$ можемъ приписать и слою ступеннаго водяного пара, покрывающаго поверхность mM твердаго тѣла, если среда III воздухъ.

Рис. 281.



Рис. 282.



Нормальная къ MN сила α_2 уничтожается сопротивленіемъ твердаго тѣла и потому условіе равновѣсія частицы m будетъ

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} \cos \theta. \quad (1)$$

откуда

$$\cos \theta = \frac{\alpha_{1,3} - \alpha_{1,2}}{\alpha_{2,3}}. \quad (2)$$

Если $\alpha_{1,3} > \alpha_{1,2}$, то краевой уголъ острый, поверхность mp вогнутая; если же $\alpha_{1,3} < \alpha_{1,2}$, то краевой уголъ тупой и поверхность mp выпуклая. Когда $\alpha_{1,3} - \alpha_{1,2} > \alpha_{2,3}$, то краевой угла не существуетъ и жидкость тонкимъ слоемъ распространяется по поверхности твердаго тѣла; это случай полнаго смачиванія.

Если опустить каплю жидкости на горизонтальную поверхность твердаго тѣла, то она принимаетъ форму, изображенную на рис. 282. А, когда $\alpha_{1,3} < \alpha_{1,2}$, и форму В, когда $\alpha_{1,3} > \alpha_{1,2}$.

Когда поверхность жидкости со всѣхъ сторонъ окружена твердымъ тѣломъ, то она во всѣхъ направленіяхъ будетъ ограничена вогнутой или выпуклой частью. Когда размѣры поверхности весьма малы, то вполнѣ исчезаетъ средняя плоская часть и мы получаемъ вогнутый или выпуклый менискъ. Такой случай представляется, когда жидкость находится внутри достаточно узкой трубки. На рис. 283 показана форма поверхности жидкости внутри трубки, состоящей изъ материала, смачиваемаго жидкостью;

n и n' касательныя къ поверхности жидкости. R , R' , R'' , R направления нормалей, т. е. равнодѣйствующихъ силъ въ различныхъ точкахъ. Когда материалъ трубки не смачивается жидкостью (стекло и ртуть), то жидкий столбъ ограничивается сверху выпуклымъ менискомъ. Чѣмъ уже трубка, тѣмъ больше вогнутость или выпуклость мениска.

Вслѣдствіе измѣненія вида поверхности, мѣняется и поверхностное давление P , согласно формулѣ Laplace а (стр. 462). На вогнутой поверхности

Рис. 283.

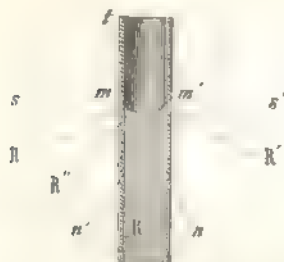
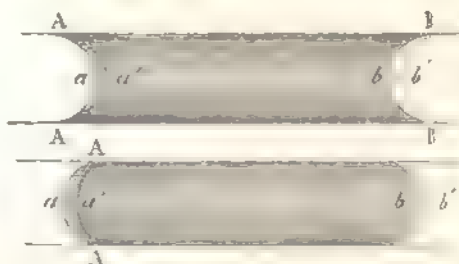


Рис. 284.



давление меньше, на выпуклой больше давления K на плоской поверхности. На этомъ основана обширная группа явлений капиллярности, которые мы рассмотримъ ниже. Теперь укажемъ на интересный опытъ, также основанный на измѣненіи поверхностнаго давления вслѣдствіе измѣненія вида поверхности жидкости, окруженной твердымъ тѣломъ. Если дно коробочки сдѣлать изъ металлической сѣтки съ отверстиями въ толщину иголки средней величины, и налить въ нее воды, то вода, конечно, будетъ протекать, ибо металлическая проволока смачивается водою, которая легко пройдетъ черезъ отверстія. Но если сѣтку опустить въ расплавленный парафинъ, вынуть и стряхнуть, такъ, что отверстія сѣтки останутся открытыми и только проволоки окажутся покрытыми тонкимъ слоемъ парафина, то можно наполнить коробку водою, подложивъ предварительно листъ бумаги на ее дно. Вынувъ осторожно бумагу, мы замѣтимъ, что вода будетъ держаться въ коробкѣ, не протекая черезъ отверстія сѣтки. Объясняется это тѣмъ, что вода не смачиваетъ парафина и слѣд. она въ каждомъ отверстіи имѣетъ выпуклую внизъ поверхность. Увеличенное поверхностное давление достаточно, чтобы поддержать слой воды.

§ 3. Сопротивленіе и движеніе капель въ трубкахъ. Если въ трубкѣ находится рядъ капель (столбиковъ) какой-либо жидкости, то требуется весьма большое давленіе, чтобы ихъ передвигать вдоль трубки, безразлично, смачиваютъ или не смачиваютъ онѣ стѣнки трубки. На рис. 284 изображена сверху капля ab жидкости, смачивающей трубку; если сдѣлавать увеличивать давленіе, то поверхность a переходитъ въ a' , b въ b' . Первая дѣлается болѣе, вторая — менѣе вогнутой; вслѣдствіе этого поверхностное давленіе въ b' больше, чѣмъ въ b ; является давленіе справа на лѣво, противоудѣйствующее внѣшней силѣ. Когда капля ab не смачиваетъ стѣнокъ сосуда (см. рис. 284 внизу), то давленіе сдѣла въ каплѣ

форму $a'b'$, причемъ большая выпуклость въ b' вызываетъ опять давленіе справа налѣво.

Сопротивленіе смачивающихъ капель еще болѣе увеличивается, когда каналъ трубки попеременно суживается и расширяется, какъ показано на рис. 285 наверху и въ увеличенномъ видѣ внизу. Капли AB , CD помѣстятся въ суженныхъ частяхъ (см. причину ниже, рис. 287). Давленіе со стороны M вызоветъ сильное увеличеніе волнатысти (a) слѣва и уменьшеніе ея (b) справа; появится большой перепадъ давленія въ b справа

Рис. 285.

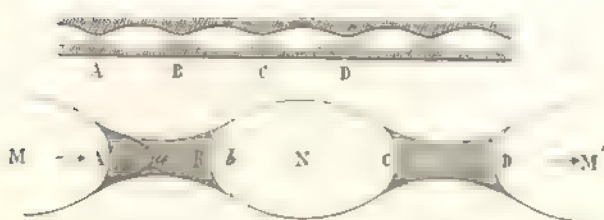


Рис. 286.



налѣво. Трубку вида ABC , рис. 286, легко наполнить водою до черты MM' . Если сжатымъ воздухомъ медленно выдавливать воду изъ колѣна MN такъ, чтобы въ суженныхъ мѣстахъ α , β и т. д. оставались капли, то потребуются большое давленіе, чтобы довести уровень до черты N . Между тѣмъ вода даже подъ слабымъ давленіемъ легко заполняетъ вновь столбъ NM , захватывая и поглотивъ одну каплю за другою. Отсюда мы видимъ, что черезъ каплю, имѣющую внутреннія неровности и содержащую воздухъ и жидкость, легко проходить эта жидкость, между тѣмъ какъ для воздуха каналъ почти непроницаемъ.

Столбикъ жидкости AB (рис. 287), помѣщенный въ коническую трубку, самъ движется къ болѣе узкой части, когда онъ смачиваетъ стѣнки трубки, ибо меньшей волнатысти въ A соответствуетъ большее давленіе. Когда капля не смачиваетъ трубки (рис. 288), то капля сама перегибается въ сторону болѣе широкую, ибо на болѣе выпуклой поверхности B дѣйствуетъ большее давленіе.

§ 4. Волосность. Если въ жидкость, помещенную въ широкое сосуди, опустить узенькую трубку AB (рис. 289) изъ материала, смачиваемаго жидкостью, то послѣдняя поднимется въ трубкѣ; если же жидкость не смачиваетъ трубки, то ея уровень внутри трубки будетъ находиться ниже, чѣмъ въ наружномъ сосуди (рис. 290). Для наблюденія пониженія удобнѣе сообщающіеся сосуди, въ родѣ изображенныхъ на рис. 291. Указанное здѣсь явленіе называется волосностью или капиллярностью.

Элементарное объяснение этого явления заключается въ следующемъ.

Въ наружномъ сосудѣ можно считать поверхность жидкости плоскою и потому нормальное давление равнымъ K , по формулѣ Laplace'a, стр. 462.

Рис. 287.

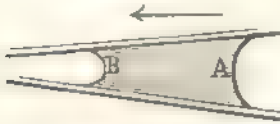


Рис. 288.



На вогнутой поверхности жидкости, смачивающей трубку, дѣйствуетъ давленіе

$$P = K - \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ R_1 и R_2 положительные радиусы кривизны поверхности. Такимъ образомъ получается избытокъ p наружнаго давленія, равный

$$p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Подъ влияніемъ этого давленія жидкость должна подняться по трубкѣ на такую высоту h , чтобы давленіе приподнятаго жидкаго столба на единицу площади, лежащей на высотѣ наружной горизонтальной поверхности жидкости, сдѣлалось равнымъ p . Величина p зависитъ однако только отъ

Рис. 289.

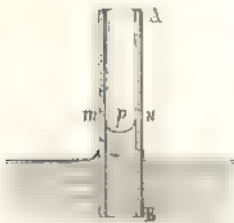


Рис. 290.

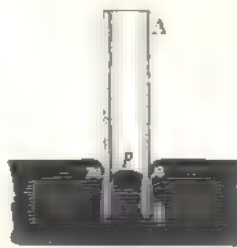
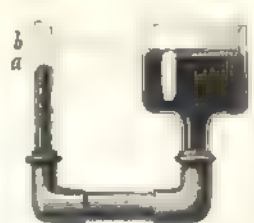


Рис. 291.



поверхностнаго натяженія γ и отъ радиусовъ кривизны, которые съ своей стороны зависятъ отъ диаметра трубки въ томъ мѣстѣ, гдѣ находится менискъ. Отсюда слѣдуетъ, что высота h столба жидкости, который можетъ держаться внутри трубки, не зависитъ отъ размѣровъ тѣхъ частей этой трубки, которыя лежатъ ниже мениска. Такъ напр. жидкость удерживается на одинаковой высотѣ въ трубахъ AB и CD (рис. 292), если ширина канала въ CD и въ AE одна и та же. Понятно, что въ CD жидкость сама поднимется, а въ AB она должна быть сперва приподнята выше точки E вытягиваніемъ воздуха изъ вернаго отверстия трубки. Та же высота h получилась бы, еслибы нижняя часть трубки CD была уже верхней.

Когда жидкость не смачивает трубки, то на ней образуется выпуклый менискъ съ поверхностнымъ давлениемъ

$$P = K + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

гдѣ R_1 и R_2 опять положительные радиусы кривизны. Избытокъ p давления, величина котораго выражается прежнею формулою (4), заставляетъ уровень жидкости въ трубкѣ понизиться на такую величину h , при которой гидростатическое давление наружной жидкости уравновѣшиваетъ избытокъ дав-

Рис. 292.

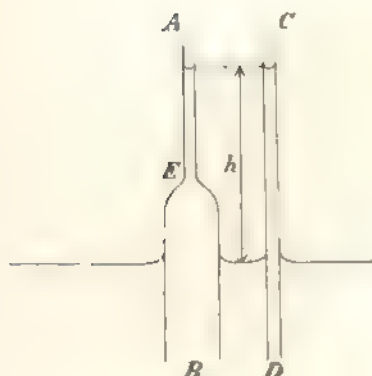
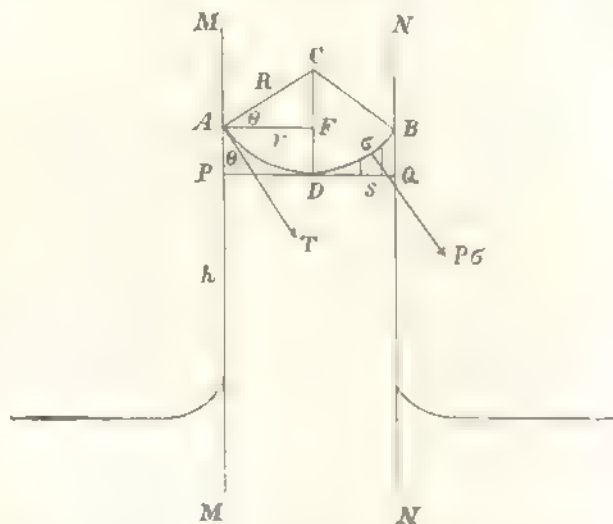


Рис. 293.



ления p на выпуклой поверхности. И въ этомъ случаѣ пониженіе h зависитъ только отъ ширины трубки въ томъ мѣстѣ, гдѣ образуется менискъ.

§ 5. Законъ Jurin'a (1718). Подъ этимъ названіемъ извѣстенъ законъ, еще раньше Jurin'a высказанный въ 1670 г. Borelli: высота h поднятія или опусканія жидкости въ волосной трубкѣ обратно пропорциональна диаметру d или радиусу r канала трубки.

Высота h можетъ быть вычислена двумя путями.

Пусть $MM'NN'$ (рис. 293) трубка, внутренний радиусъ которой r , ADB поверхность жидкости, которую можно принять за часть сферической поверхности съ центромъ въ C и съ радиусомъ $R = AC$. Краевой уголъ обозначимъ черезъ $\theta = \angle PAT = \angle CAF$; мы видели, что онъ зависитъ только отъ рода жидкости и твердаго тѣла, когда ихъ поверхности совершенно чисты. Ниже будетъ сказано, какимъ образомъ можно сдѣлать $\theta = 0$, когда стѣнка трубки смачивается жидкостью. Полагая въ (4) $R_1 = R_2 = R$, имѣемъ

$$P = K - \frac{2\alpha}{R} \dots \dots \dots (5)$$

На каждый элемент σ поверхности ADB действует нормальное давление P_2 , вертикальная составляющая которого очевидно равна $P_2 \cos \alpha$, где α проекция элемента σ на горизонтальную плоскость. Полное вертикальное давление на единицу горизонтальной плоскости PQ равно $P = K \frac{2\sigma}{R}$. На наружной горизонтальной поверхности имеем давление K на единицу поверхности, след. давление жидкого столба на единицу поверхности его горизонтального основания должно равняться $\frac{2\sigma}{R}$. Давление столба равно $h\delta$, где δ плотность жидкости; след. $\frac{2\sigma}{R} = h\delta$. Но $R = \frac{r}{\cos \alpha}$, след.

[illegible]

откуда

$$\dot{r} = \frac{21}{5} \cdot \frac{\cos 4}{r} = \frac{42}{5} \cdot \frac{\cos 4}{d} \dots \dots \dots (7)$$

гдѣ $d = 2r$ діаметръ трубки.

Покажем другой вывод. На единицу длины контура AB мениска действует натяжение α по направлению касательных к поверхности жидкости; полное натяжение равно $2\pi\alpha r$, а его вертикальная составляющая равна $2\pi\alpha r \cos \theta$. Представим себе, что это натяжение поддерживает столб жидкости, высота которого h , площадь поперечного сечения πr^2 и плотность δ . Тогда имеем

$$2\pi r \cos b = \pi r^2 h z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

откуда опять получается формула (7). Та же формула выражает понижение жидкости, не смачивающей стенок трубки, и не трудно оба вывода приложить и кь этому случаю.

Въ случаѣ полнато сжигиванія имѣемъ $\theta = 0$ и $\sigma = 1$.

$$h = \frac{2z}{\delta} \cdot \frac{1}{g} = \frac{4z}{\delta} \cdot \frac{1}{d} \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad (9)$$

Формула (7) подтверждает законь Jurin'a.

§ 6. Названія и обозначенія постоянныхъ. Къ сожалѣнію до сихъ поръ не установились ни обозначенія ни даже что особенно неудобно названія тѣхъ величинъ, съ которыми мы имѣемъ дело въ учении о кривизнѣ и родственныяхъ имъ явленіяхъ. Оказывается, что главную роль играютъ двѣ величины.

1. Первая величина—это α въ основной формулѣ Laplace'a. (10) стр. 462, которую самъ Laplace пишетъ въ видѣ $\frac{H}{l}$; это сила натяжения, приходящаяся на единицу длины липп. начертанной на поверхности. Ее принято выражать въ миллигр. на миллиметръ длины. Нередко α принимаютъ за одну изъ двухъ т. наз. капиллярныхъ постоянныхъ. Для избежанія возможныхъ недоразумѣній, мы величину α только и будемъ называть поверхностнымъ натяженіемъ.

Итакъ

$$\left(\frac{H}{2}\right)_{\text{Laplace}} \alpha = \text{«поверхностное натяжение»} \quad (10)$$

Размѣръ α равенъ, см. (6) стр. 456,

$$[\alpha] = \left[\frac{\text{мгр.}}{\text{мм.}}\right] = \frac{ML}{T^2} : L = \frac{M}{T^2} \quad (11)$$

Такъ какъ С. Г. С. единица натяженія будетъ

$$1 \frac{\text{динъ}}{\text{сантим.}} = \frac{1,02 \text{ миллигр.}}{10 \text{ мм.}} = 0,102 \frac{\text{миллигр.}}{\text{мм.}}$$

то ясно, что численное значеніе величинъ α въ С. Г. С. единицахъ получится отъ умноженія обыкновенно приводимыхъ численныхъ значеній (въ $\frac{\text{мгр.}}{\text{мм.}}$ единицахъ) на 9,84.

II. Вторая величина, которую принято обозначать черезъ a^2 , равна

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta} \quad (12)$$

гдѣ δ плотность жидкости, равная числу граммъ вѣса въ куб. сантим. или числу миллигр. въ куб. миллиметрѣ. Размѣръ величины δ равенъ

$$[\delta] = \left[\frac{\text{вѣсъ}}{\text{объемъ}}\right] = \frac{ML}{T^2} : L^3 = \frac{M}{T^2 L^2} \quad (13)$$

Отсюда размѣръ величины a^2 :

$$[a^2] = [\alpha] : [\delta] = \frac{M}{T^2} : \frac{M}{T^2 L^2} = L^2 \quad (14)$$

Величина a^2 размѣра L^2 ; принято выражать ее въ кв. миллиметрахъ. Величину a^2 часто называютъ удѣльнымъ сцепленіемъ, считая ее какъ бы за вторую капиллярную постоянную.

Мы условимся только величину a^2 называть капиллярною постоянною.

Замѣтимъ, что Gauss обозначаетъ величину $\frac{1}{2} a^2 = \frac{\alpha}{2\delta}$ черезъ α^2 . Формулы (9) и (12) даютъ

$$a^2 = hr \quad (15)$$

или, если принять, что при $r = 1$ получается $h = h_1$,

$$a^2 = h_1 \quad (16)$$

Капиллярная постоянная данной жидкости численно равна высотѣ подъема этой жидкости въ трубкѣ, радиусъ канала

которой равенъ 1 мм. и стѣнки которой жидкостью вполне смачиваются ($\theta = 0$ въ (7)).

На основаніи формулы (15) произведеніе изъ диаметра $2r$ трубки на высоту h подъема должно быть постояннымъ для данной жидкости. Это подтверждается опытами Gay-Lussac'a, какъ видно изъ слѣдующихъ чиселъ

Жидкость.	Диаметръ трубки $2r$.	Высота подъема h .	$2rh$.
Вода {	1,274 мм.	23,739 мм.	30,262
	1,903	15,903	30,263
Алкоголь { $\delta = 0.8196$	1,294	9,398	12,164
	1,903	6,389	12,158

§ 7. Явленія волосности въ нецилиндрическомъ пространствѣ.

I. Параллельныя пластинки. Если опустить въ жидкость двѣ параллельныя пластинки, разстояние которыхъ d , то жидкость между ними поднимется или опустится на высоту h , которую легко опредѣлить. Жидкость сверху будетъ ограничена частью поверхности цилиндра, образующая котораго параллельны пластинкамъ. Положимъ, что на рис. 293 MM и NN двѣ пластинки, $PQ = d$ ихъ разстояние. Давленіе P на единицу поверхности ADB равно, какъ всегда, $K - \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, но для цилиндра $R_1 = \infty$, $R_2 = R - AC$, такъ что $P = K - \frac{\alpha}{R}$. Аналогично прежнему мы видимъ, что теперь давленіе $h\delta$ приподнятаго слоя жидкости должно равняться избытку давленія K на наружной плоской поверхности надъ давленіемъ P , т. е.

$$h\delta = \frac{\alpha}{R} = \frac{\alpha \cos \theta}{r} = \frac{2\alpha \cos \theta}{d};$$

итакъ

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\delta d} \dots \dots \dots (17)$$

Сравнивая эту формулу съ (7), мы видимъ, что высота подъема жидкости между параллельными пластинками равна половинѣ высоты подъема въ трубкѣ, когда разстояние пластинокъ равно диаметру трубки. Когда жидкость вполне смачиваетъ пластинки, то, см. (12),

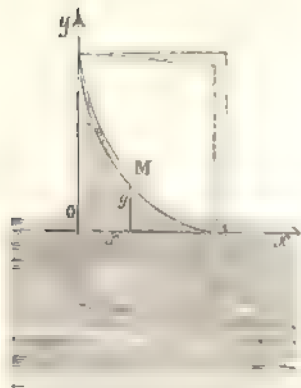
$$h = \frac{2\alpha}{\delta d} = \frac{\alpha^2}{\delta} \dots \dots \dots (18)$$

Высота подъема жидкости между параллельными пластинками обратно пропорціональна ихъ разстоянію.

II. Не параллельныя пластинки. Если въ жидкость опустить двѣ пластинки, образующія двугранный уголъ φ (рис. 294), то жидкость поднимется тѣмъ выше, чѣмъ меньше разстояние d пластинокъ, т. е. чѣмъ ближе она находится къ ребру двуграннаго угла. Поверхность жидкости ограничена нѣкоторой кривою, уравненіе которой легко опредѣлить. При-

немъ ребро двуграннаго угла за ось y -овъ, начало координатъ O у поверхности жидкости и ось x -овъ по направлению прямой, дѣлящей пополамъ горизонтальный уголъ φ . Точка M имѣть координаты x и y , высота поднятія y определяется формулою (17), въ которой d разстояніе пластинокъ въ точкахъ, находящихся на разстояніи x отъ ребра Oy . Если черезъ M провести горизонтальную плоскость, то въ сѣченіи получится равнобедренный треугольникъ съ вершиною на ребрѣ Oy , съ основаниемъ d , высотой y и угломъ φ при вершинѣ. Ясно, что $d = y \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$. Вставивъ это въ (17), и положивъ y вмѣсто h , получаемъ

Рис. 294.



откуда

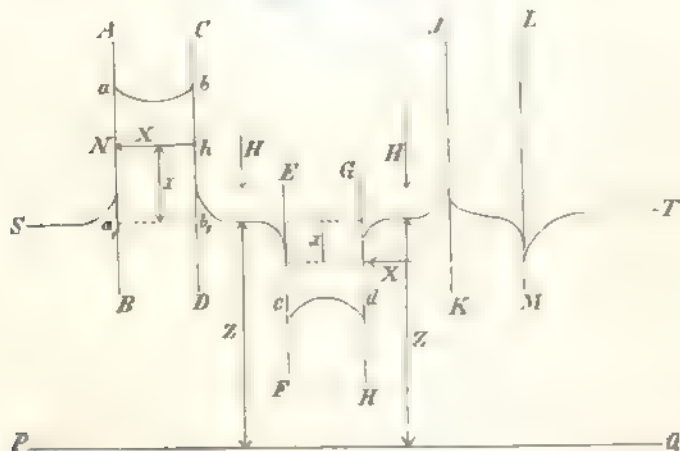
$$y = \frac{x \cos \theta}{\delta x \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{x \cos \theta}{\delta x y \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} \quad (19)$$

Вся правая сторона постоянная, и потому искомое уравненіе имѣть видъ $xy = \text{Const}$. Это уравненіе гиперболы. Когда жидкость вполне смачиваетъ пластинки, то въ (19) $\cos \theta = 1$.

§ 8. Кажущееся притяженіе и отталкиваніе тѣлъ, отчасти погруженныхъ въ жидкость. Два тѣла плавающихъ, или висѣщихъ на нитѣхъ

Рис. 295.



и отчасти погруженныхъ въ жидкость стремятся сближиться, когда оба смачиваются или оба не смачиваются жидкостью; они стремятся удалиться другъ отъ друга, когда одно изъ нихъ смачивается, другое не смачивается.

Это явление легко объясняется гидростатическими давленіями. Пусть ST (рис. 295) поверхность жидкости. AB и CD двѣ пластинки, вполнѣ смачиваемыя жидкостью, которая между ними поднялась на высоту h до ab ; атмосферное давленіе обозначимъ черезъ H . Давленіе подъ наружной горизонтальной поверхностью равно $H - K$, а подъ вогнутой поверхностью ab оно равно $H - K - \frac{a}{R}$ (см. § 7). Проведемъ горизонтальную плоскость PQ ниже пластинокъ на разстояніи z отъ поверхности. Давленіе p на единицу этой поверхности должно быть вездѣ одинаковое. Подъ горизонтальной поверхностью оно равно $H + K + \delta z$, гдѣ δ плотность жидкости; подъ ab оно равно $H + K - \frac{a}{R} + (\delta + h) \delta$. Итакъ

$$p = H + K + \delta z = H - K - \frac{a}{R} + (z + h) \delta,$$

откуда поперечному $\delta h = \frac{x}{R}$. Опредѣлимъ давленіе X на стѣнку AB въ точкѣ N на высотѣ x надъ уровнемъ ST . Давленіе p_z внутри жидкости въ этомъ мѣстѣ равно $p_z = p - (x + z) \delta = H - K - x \delta$; искомое же давленіе $X = p_z - K$, но давленіе K на стѣнку не передается. Такимъ образомъ

$$X = H - x \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Это давленіе меньше наружнаго давленія H , и потому пластинка AB будетъ стремиться передвигаться направо, точно также CD перемѣстится лѣво и пластинки какъ будто притянутся. Если l ширина пластинки, то вѣсн сила F , дѣйствующая на нее, равна

$$F = l \delta \int_0^h x dx = \frac{l \delta}{2} h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Когда пластинки EF и GH не смачиваются, то очевидно, что на разстояніи x отъ поверхности ST дѣйствуетъ наружное давленіе $X = H - \delta x$; избытокъ надъ внутреннимъ давленіемъ H и здѣсь равенъ δx .

Если наконецъ JK смачивается, а LM не смачивается, то жидкость на наружной сторонѣ отъ JK поднимается выше, а на наружной сторонѣ отъ LM опустится ниже, чѣмъ на сторонахъ внутреннихъ. Въ этомъ случаѣ JK будетъ находится какъ бы въ положеніи CD , она движется лѣво, между тѣмъ какъ LM , находясь въ положеніи EF , перемѣстится направо. Произойдетъ кажущееся отталкиваніе между JK и LM .

Этимъ объясняется склоненіе въ одну кучу тѣлъ, плавающихъ на поверхности жидкости, которою они смачиваются, какъ напр. пузырьковыя тѣлеса въ на прудахъ и т. под.

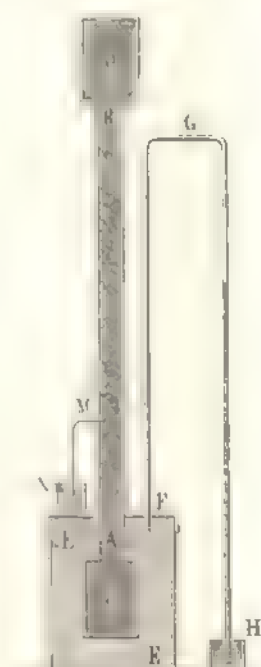
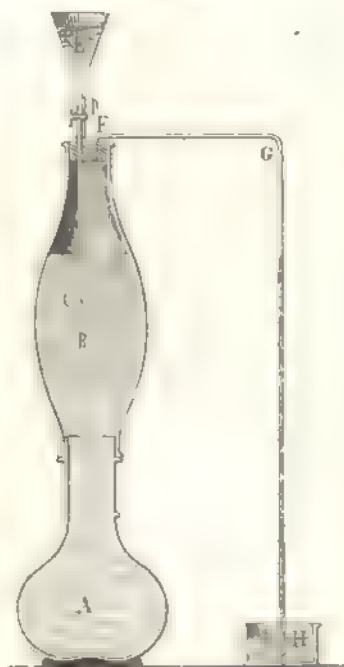
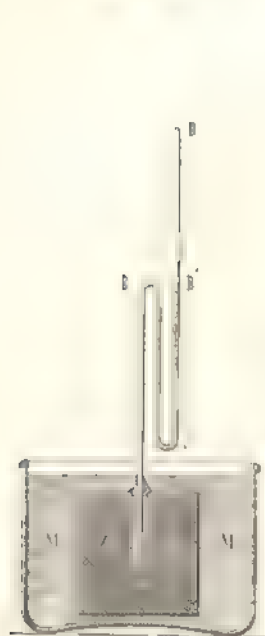
§ 9. Всасываніе жидкостей пористыми тѣлами. На волосности основано безчисленное множество разнообразныхъ явленій всасыванія жидкостей пористыми тѣлами. Губка, сахаръ, пропускная бумага, песокъ, мѣлъ, дерево, литографскій камень и т. д. съ большою силою какъ бы втягиваютъ въ себя жидкости. На рис. 296 показанъ приборъ Jamina, имѣющій слѣ-

дующее устройство. Въ сосудъ съ водою *ММ* опущенъ кусокъ мѣла *АА*, въ которомъ просверлено цилиндрическое углубленіе. Изогнутая трубка *ОВСВ'D*, содержащая ртуть или подкрашенную воду въ части *BCD*, и служащая манометромъ, вставлена нижнимъ концомъ въ это углубленіе, залитое сверху сургучемъ. Вода, всасываемая мѣломъ, вытѣкаетъ воздухъ, содержащійся въ его порахъ, въ небольшое пространство *О*, и затѣмъ въ трубку. Если конецъ *D* запаянъ, то можно наблюдать сдвигиваніе воздуха до 3-хъ и болѣе атмосферъ. На рис. 297 изображенъ другой приборъ

Рис. 296.

Рис. 297.

Рис. 298.



Ламин'а. Глиняные немурованные сосуды *АВ* наполняются прокипяченою водою черезъ воронку *Е*. Трубка *FGH* опущена въ чашечку со ртутью. Вода, непрерывно просачиваясь черезъ стѣнки сосудовъ, испаряется на нихъ наружной стороной. Надъ водою происходитъ разреженіе воздуха и ртуть поднимается по трубкѣ *HG*. Поднятіе можетъ доходить до 600 и болѣе мм.

Явленіи волосности играютъ большую роль въ жизни растений.

На рис. 298 изображенъ интересный приборъ Ламин'а, разъясняющій эту роль, а также влияніе испаренія воды на поверхности листьевъ. *D* и *C* пористыя банки, наполненныя гипсомъ: *AB* гипсовый столбъ, окруженный жестяной трубкой. Поверхность банки *D* соответствуетъ поверхности листьевъ, на ней происходитъ испареніе воды, поднимающейся изъ герметически закрытаго сосуда *Е*. Трубка *FGH* опущена нижнимъ концомъ *H*

въ ртуть, а трубка MN въ воду. Испарение въ D вызываетъ весьма значительное поднятие ртути въ трубкѣ HG , и довольно быстрое всасываніе воды изъ N по трубкѣ NM .

§ 10. Способы опредѣленія поверхностнаго натяженія α и капиллярной постоянной $a^2 = \frac{2\alpha}{\delta}$ (гдѣ δ плотность жидкости).

I. Способъ капиллярныхъ трубокъ (опредѣленіе a^2). Мы имѣли формулу (8) стр. 479, выражающую, что натяженіе $2\pi r \cos \theta$ поддерживаетъ вѣсъ жидкаго столба $\pi r^2 h \delta$. Полагая, что h есть высота жидкаго столба до нижней точки мениска, мы должны еще прибавить вѣсъ самого мениска. Когда жидкость вполне смачиваетъ стѣнки трубки, имѣемъ $\theta = 0$, и объемъ мениска, ограниченный поверхностью полушарія, равенъ объему цилиндра, высота и радиусъ основанія котораго r , безъ объема полушара, т.-е. онъ равенъ $\pi r^2 r - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi r^3$. Поэтому (8) слѣдуетъ написать въ видѣ (при $\theta = 0$):

$$2\pi r \alpha = \pi r^2 h \delta + \frac{1}{3} \pi r^3 \delta = \pi r^2 \delta \left(h + \frac{1}{3} r \right) \quad (22)$$

откуда

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta} = r \left(h + \frac{1}{3} r \right) \quad (23)$$

Для болѣе широкихъ трубокъ Poisson далъ для второго множителя выраженіе $h + \frac{1}{3} r - \frac{r^3}{3a^2} (1q + 1)$, или иначе $h + \frac{1}{3} r - 0,1288 \frac{r^3}{h}$. Hagen и Desains ввели вмѣсто $h + \frac{1}{3} r$ въ (23) множитель $h + b$, гдѣ

$$b = \frac{3a^2 r}{3a^2 + r^2} \quad (24)$$

Измѣривъ r и h , и вводя поправку по одной изъ указанныхъ формулъ, можно измѣрить капиллярную постоянную a^2 , а зная плотность δ , получить натяженіе α . Величины r и h должны быть выражены въ миллиметрахъ.

Чтобы имѣть возможность пользоваться формулой (23), мы должны устроить наблюденіе такъ, чтобы краевой уголъ $\theta = 0$. Это достигается предварительнымъ покрываніемъ поверхности канала трубки слоемъ испытуемой жидкости, которую всасываніемъ поднимаютъ на высоту болѣеую, чѣмъ h , и затѣмъ даютъ ей свободно опуститься. Въ этомъ случаѣ смачиваніе полное и краевой уголъ равенъ нулю.

Этимъ способомъ опредѣляли капиллярную постоянную Gay-Lussac, Desains, Simon de Metz, Quet, Д. Н. Менделѣевъ, De Heen, Quinke, Frankenheim и друг. Н. Пильчиковъ видоизмѣнилъ этотъ способъ, наблюдая разность высотъ жидкости въ сообщающихся капиллярныхъ трубкахъ различнаго діаметра.

Приводимъ таблицу чиселъ a^2 и α для нѣкоторыхъ веществъ.

ВЕЩЕСТВО.	$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta}$	$\alpha = \frac{\gamma a^2}{2}$ втр. мм
Ртуть	7.0	17.0
Вода (0°)	16.4	8.18
Алкоголь (0°)	6.06	2.58
Эфиръ (0°)	5.43	1.97
Бензолъ (15°)	6.82	2.88
Хлороформъ (12.5°)	3.80	2.81
Скипидаръ	—	3.03
Сѣроутлеродъ	—	3.27
Оливковое масло	7.16	3.27

Итакъ напр. натяжение воды равно 8.18 миль на каждый миллиметр длины. Числа, даваемые различными наблюдателями, вообще сильно расходятся между собою. Важную роль играет чистота поверхности жидкости. Такъ натяжение α для воды почти вдвое увеличивается, если ее поверхность некачественно очистить. Verschaffelt изслѣдовать этимъ способомъ капиллярныя свойства жидких CO и N_2O .

II. Способъ параллельныхъ пластинокъ (опредѣленіе a^2). Мы вывели (17), стр. 481, полагая, что h высота слоя жидкости, приподнявшейся между пластинками, расстояние которыхъ d . Здѣсь поправку къ h получимъ, прибавляя къ вѣсу $dh\delta$ жидкаго столба, ширина котораго единица, еще вѣсъ цилиндрическаго мениска, равнаго вѣсу призмы $d \cdot \frac{1}{2} d\delta$ безъ вѣса $\frac{1}{2}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \delta$ полуцилиндра. Приподнятый вѣсъ следовательно равенъ $d\delta \left(d + \frac{1}{2}d - \frac{\pi}{8}d\right)$. Очевидно (18) даетъ $\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = 0.107\right)$

$$a^2 = \frac{\alpha}{\delta} = d(h + 0.107d) \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Пользуясь этой формулой, многие ученые опредѣляли величину a^2 .

III. Способъ Wilhelmy (опредѣленіе α). Если отчасти опустить вертикальную пластинку въ жидкость, то вдоль ее контура приподнимется нѣкоторое количество жидкости. Вѣсъ которой на единицу длины контура равенъ $\alpha \cos \theta$, т.-е. вертикальной составляющей силы натяженія. Если l ширина, d толщина пластинки, то $2(l+d)\alpha \cos \theta$ будетъ вѣсъ приподнятой жидкости, а потому кажушаяся потеря вѣса пластинки будетъ равна

$$p = ldh\delta - 2(l+d)\alpha \cos \theta \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

гдѣ h глубина, на которую пластинка погружена въ жидкость.

Если устроить такъ, чтобы было $\theta = 0$, то эта формула можетъ служить для опредѣленія величины α .

Wilhelmy полагать, что изъ его опытовъ можетъ быть опредѣленъ особый коэффициентъ сгущенія жидкости у поверхности твердаго тѣла.

Поздѣйше опыты Roentgen'a и Schleiermacher'a однако не подтвердили существованія такого сгущенія.

IV. Способъ отрыванія пластинокъ (опредѣленіе α и α^2). Горизонтальная пластинка, поверхность которой S , и контуръ s , доводится до соприкосновенія съ поверхностью жидкости. Привѣсивая ее къ одному изъ плечъ коромысла вѣсовъ, опредѣляютъ тотъ вѣсъ P , который необходимъ, чтобы ее оторвать отъ поверхности жидкости. Увеличивая постепенно нагрузку, мы замѣтимъ, что жидкость вмѣстѣ съ пластинкою приподнимется на нѣкоторую высоту z , которую мы для момента разрыва, т. е. когда она достигнетъ наибольшаго своего значенія, обозначимъ черезъ h . Пусть θ уголъ между касательной плоскостью къ поверхности жидкости около контура соприкосновенія ея съ твердымъ тѣломъ и вертикальною плоскостью, проходящей черезъ контуръ (или къ нему касательной). Вѣсъ приподнятой жидкости равенъ $Sz\delta$, вертикальная составляющая натяженія равна $s\alpha\cos\theta$, и потому нагрузка p будетъ равна

$$p = Sz\delta + s\alpha\cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Въ моментъ разрыва $\theta = 0$, $p = P$ и $z = h$, такъ что

$$P = Sz\delta h + s\alpha$$

По теоріи Laplace'a см. ниже (33), высота $h = a = \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}}$ и слѣд.

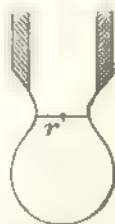
$$P = S\sqrt{2\alpha\delta} + s\alpha \quad Sz\delta a = \frac{s\delta a^3}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Опредѣливъ P , можно вычислить α^2 или α .

V. Способъ взвѣшиванія капель (опредѣленіе α). Когда жидкость, наполняющая узкую вертикальную трубку, медленно выходитъ изъ ея нижняго конца, то образуются капли, которыя, достигнувъ опредѣленнаго вѣса p , спадаютъ. Передъ отпаденіемъ капли имѣютъ форму, изображенную на рис. 299; она поддерживается натяженіемъ вдоль периметра нѣсколько суженной части. Обозначая черезъ r радиусъ горизонтальнаго сѣченія въ этой части, имѣемъ равенство

$$p = 2\pi r\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Рис. 299



Наблюдая p и r , находимъ α ; p опредѣляется взвѣшиваніемъ опредѣленнаго числа n капель. Труднѣе опредѣлить r , которое нѣсколько меньше радиуса канала трубки. Капли можно получать также на нижнемъ концѣ палочки, по поверхности которой жидкость медленно стекаетъ.

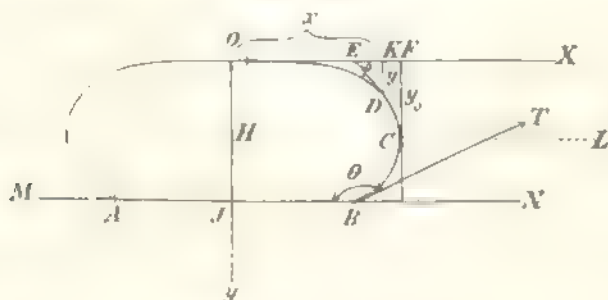
Duclaux устроилъ спиртомѣръ въ видѣ шпетки, емкость которой равна 5 куб. см., съ отверстіемъ, изъ котораго наполняющая ее жидкость вытекаетъ по каплямъ. Число капель, получаемыхъ при опоражниваніи

пинетки, указываетъ, по готовой таблицѣ, на процентное содержаніе чистаго алкоголя; такъ напр. чистая вода дасть 100 капель, 10⁰/₁₀₀ спиртъ 145 капель, 90⁰/₁₀₀ спиртъ 259 капель. Quincke пользовался методомъ капель для опредѣленія поверхностнаго натяженія α расплавленныхъ металловъ и другихъ тѣлъ, накаливая концы стержней или проволокъ, и опредѣляя вѣсъ образующихся и спадающихъ при этомъ капель. Такъ онъ для *Ag* находить $\alpha = 42.75$. Опредѣляя затѣмъ $a^2 = \frac{2\alpha}{\delta}$, гдѣ δ плотность жидкаго вещества, онъ находить, что тѣла раздѣляются на группы, для которыхъ a^2 опредѣленное кратное отъ 4.3:

- a^2 около 4.3 для *Se, Br, S, P, NaBr, KBr, AgBr, KJ*;
 a^2 „ 4.3 · 2 = 8.6 для *Hg, Pb, Ag, Bi, Sb, NaNO₃, KNO₃, NaCl, AgCl, CuCl₂*, для воска, парафина, сахара и др.;
 a^2 „ 4.3 × 3 = 12.9 для *Au*;
 a^2 „ 4.3 × 4 = 17.2 для *Pt, Cd, Sn, Na₂CO₃, K₂CO₃, K₂SO₄, H₂O*, для стекла и др.
 a^2 „ 4.3 × 6 = 25.8 для *Pd, Zn, Fe*;
 a^2 „ 4.3 × 12 = 51.6 для *Na*;
 a^2 „ 4.3 × 20 = 86 для *K*.

VI. Способъ измѣренія размѣровъ капель и пузырей. На горизонтальной поверхности *MX* (рис. 300) расположена столь большая капля

Рис. 300.



AOB, что недалеко отъ выпуклаго ея края можно пренебречь кривизною горизонтальныхъ сѣченій. Возьмемъ начало координатъ въ вершинѣ *O* капли, ось *x*-овъ проведемъ горизонтально, ось *y*-овъ вертикально; какая-либо точка *D* меридиана капли имѣть координаты *x* и *y*. Давленіе въ *O* равно $K + H$, гдѣ *H* внѣшнее давленіе, *K* нормальное давленіе въ формулѣ Laplace'a. Если δ плотность жидкости, то давленіе, переданное изнутри капли къ точкѣ *D*, равно $K + H + y\delta$. Оно должно уравновѣшиваться давленіемъ въ *D*, которое по формулѣ Laplace'a равно $H + K + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. Но по предположенію радиусъ кривизны горизонтальнаго сѣченія капли

въ D безконечно великъ, слѣд. $R_1 = \infty$. $R_2 = R$ равенъ радиусу кривизны меридіана $OC'B$ въ точкѣ D . Равенство двухъ давленій въ точкѣ D дастъ

$$K + H + y^2 = K + H + \frac{a}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

или

$$y = \frac{a}{R} \cdot \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Для кривизны $\frac{1}{R}$ имѣемъ

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Вставляя это въ (31), получаемъ по умноженіи на $dy = \frac{dy}{dx} dx$

$$y dy = \frac{a}{2} \frac{\frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dy}{dx} dx}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{2} d \left\{ \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Проведемъ въ D касательную DE , и пусть $\angle DEc = \varphi$; тогда $tg \varphi = \frac{dy}{dx}$ и слѣд.

$$y dy = -\frac{a}{2} d \cos \varphi$$

Изъ двухъ знаковъ слѣдуетъ взять (—), ибо при $\varphi < \frac{\pi}{2}$, $d \cos \varphi < 0$.

Интегрируя получаемъ

$$\int_0^y y dy = -\frac{a}{2} \int_0^\varphi d \cos \varphi$$

или

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{a^2}{2} (1 - \cos \varphi) \\ y &= \sqrt{\frac{a^2}{2} (1 - \cos \varphi)} \\ y &= \sqrt{a^2 (1 - \cos \frac{\varphi}{2})} \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Для точки C , въ которой вертикальная плоскость касается края капли, имѣемъ $\varphi = 90$, и слѣд. для ея ординаты $CF = y_0$ имѣемъ

$$y = \sqrt{\frac{a^2}{2} (1 - \cos \frac{\varphi}{2})} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

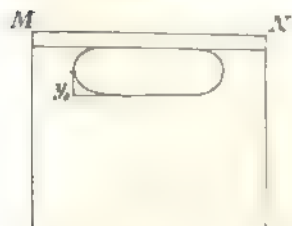
Не трудно обобщить этотъ результатъ: вертикальное разстояніе двухъ элементовъ поверхности жидкости, изъ которыхъ одинъ горизонталенъ, другой вертикаленъ, равно корню

квадратному изъ капиллярной постоянной жидкости. Теперь понятно, почему мы при выводѣ (28) положили $h = a$. Формула (33) даетъ

$$\left. \begin{aligned} a &= y, \\ \alpha &= \frac{\gamma y}{2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (34)$$

Рис. 300 относится къ случаю капли, не смачивающей поверхности твердаго тѣла MN ; легко понять, что (34) должно относиться и къ случаю пузыря воздуха, помещеннаго въ жидкости подъ какою-либо пластинкою MN (рис. 301).

Рис. 301.



Для измѣренія разстоянія $CF = y_0$, Lippmann помещаетъ въ L свѣтящуюся точку и устанавливаетъ трубку катометра на фокальную свѣтлую линію, видную около C , какъ въ выгнутомъ зеркалѣ. Ошибка въ установкѣ L на 1 мм. въ вертикальномъ направленіи влечетъ за собою перемѣщеніе фокальной линіи всего въ 0.001 мм. Quincke произвелъ многія опредѣленія величины α по изложенному здѣсь способу лежащихъ капель и воздушныхъ пузырей. Н. Кастильонъ пользовался небольшими каплями, для которыхъ онъ развилъ теорію болѣе точную, чѣмъ та приближенная, которая лежитъ въ основаніи рассмотрѣннаго здѣсь метода Quincke.

VII. Измѣреніе α для жидкостей, находящихся въ пластинчатомъ состояніи. Изъ различныхъ способовъ укажемъ только на тотъ, который основанъ на формулѣ (19) стр. 467. Измѣряя радиусъ и внутреннее давленіе пузыря (шар. мыльнаго) находимъ α .

VIII. Измѣреніе натяженія α_1 на границѣ двухъ средъ. Способъ VI непосредственно прилагается и здѣсь. Положимъ, что на рис. 300 находится другая жидкость, или что на рис. 301 мы имѣемъ не пузырь воздуха, но каплю жидкости, плавающую въ другой жидкости. Въ такомъ случаѣ (30) замѣняется формулой

$$K + H + y(\delta_1 - \delta_2) = K + H + \frac{\alpha_{12}}{R} \quad \dots \dots \dots (35)$$

гдѣ δ_1 и δ_2 плотности двухъ жидкостей и $\delta_1 > \delta_2$. Очевидно, что (35) даетъ намъ вмѣсто (34) теперь формулу

$$\alpha_{12} = \frac{y}{2} (\delta_1 - \delta_2) \quad \dots \dots \dots (36)$$

Этимъ способомъ Quincke опредѣлялъ величину α_{12} для различныхъ сочетаній двухъ жидкостей. Приводимъ нѣкоторые изъ чиселъ, которые онъ получалъ для натяженія α_{12} .

	α_1	α_2	α_{12}
Ртуть-вода	55,03	8,25	42,58
Ртуть-алкоголь	55,03	2,60	40,71
Ртуть-хлороформъ . . .	55,03	3,12	40,71
Ртуть- CS_2	55,03	3,27	37,97
Ртуть-оливковое масло .	55,03	3,76	34,19
Вода- CS_2	8,25	3,27	4,26
Вода-хлороформъ	8,25	3,12	3,01
Вода-оливковое масло .	8,25	3,76	2,09.

Величина α_{12} иногда быстро убываетъ послѣ приведенны жидкостей въ соприкосновение, что объясняется образованиемъ слоя, содержащаго смѣсь жидкостей.

IX Измѣреніе краевого угла θ . Краевой уголъ θ можетъ быть измѣренъ непосредственно способомъ, аналогичнымъ способу измѣренія двугранныхъ угловъ кристалловъ (стр. 277), т. е. наблюдая отраженіе луча съ краяго элемента жидкости. Уголъ θ можетъ быть также вычисленъ изъ наблюдений надъ высотой h мениска или надъ высотой H большой и тонкой капли.

Еслибы KD на рис. 300 изображала вертикальную стѣнку, то мы имѣли бы $KD = h$ и $\theta = 180^\circ - \angle EPK \approx 180^\circ - (90^\circ - \varphi) = 90^\circ + \varphi$ и слѣд. $\varphi = \theta - 90^\circ$. Формула (32) дала бы

$$h = a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} (37)$$

Для точки B имѣемъ $y = H$ и $\varphi = \theta$, слѣд.

$$H = a \sqrt{1 - \cos^2 \theta} (38)$$

Уравненія (37) и (38) даютъ a^2 и θ . Для ртути получается $\theta = 138^\circ$.

Кромѣ перечисленныхъ збѣдъ, существуютъ и другіе способы опредѣленія величинъ α и α^2 , напр. интересный способъ Senti's'a для ртути, на поверхности которой она заставляетъ плавать жемчужную призму. По величинѣ удлиненія, вызваннаго призмою, она могъ вычислить величины α и α^2 .

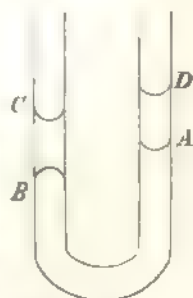
§ 11. Дальнѣйшіе результаты измѣренія α и α^2 . Роль температуры. Мы уже привеи нѣкоторыя численныя значенія величинъ α и α^2 . Укажемъ еще на нѣкоторые слѣдствія, вытекающія изъ этихъ чиселъ, а также на нѣкоторые дальнѣйшіе результаты.

Таблица на стр. 486 показываетъ, что натяженіе хлороформа больше натяженія эфира, но меньше натяженія воды. Плотность хлороформа 1,52, а эфира 0,74. Если въ изогнутую трубку (рис. 302) налить хлороформъ AB и на него воду BC и эфиръ AD , то въ B образуется выпуклый, въ A вогнутый менискъ.

Quincke и др. опредѣляли α и α^2 для растворовъ солей и кислотъ въ водѣ и алкоголь. Оказывается, что натяженіе α растеть для многихъ растворовъ приблизительно пропорціонально числу y эквивалентовъ соли, растворенныхъ въ 100 эквивалентахъ воды. Такъ для раствора $NaCl$

$$\alpha = 7.36 + 0.157y.$$

Рис. 302.



Съ повышеніемъ температуры a^2 стремится къ нулю и при нѣкоторой температурѣ $t = t_1$, которая опредѣляется равенствомъ

$$t_1 = \frac{1}{\dots} \dots \dots (42)$$

имѣемъ $a^2 = 0$. жидкость въ капиллярной трубкѣ вовсе не поднимается и между ея частицами исчезаетъ то особое сдѣленіе, которое характерно для жидкаго состоянія, она перестаетъ отличаться отъ газа. На стр. 358 мы назвали эту температуру критическою; и дѣйствительно для эфира (41.а) и (42) даютъ $t_1 = 191^\circ$, что вполне согласно съ непосредственными наблюденіями критической температуры эфира (193°). Для воды получается $t_1 = 332^\circ$ (вмѣсто 365°) и т. д.

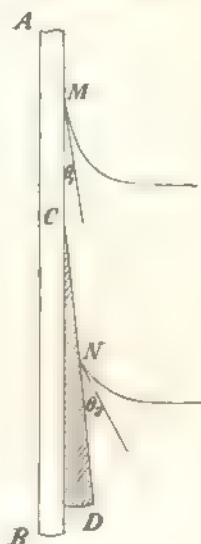
§ 12 О величинѣ радиуса ρ сферы частичнаго дѣйствія. Разсмотримъ нѣкоторыя попытки опредѣленія величины ρ .

На стр. 468 мы уже упоминали, что Plateau на основаніи наблюденій толщины мыльно-глицериноваго пузыря вывести, что ρ не болѣе 0.06 микрона, что приблизительно равно 0.1 длины волны желтаго свѣта.

Quincke опредѣлилъ ρ слѣдующимъ способомъ: онъ покрывалъ стеклянную пластинку AB (рис. 303) тонкимъ кривообразнымъ слоемъ серебра CD , опускалъ ее до разныхъ глубинъ въ воду, и измѣрялъ краевой уголъ θ . Въ M , на чистомъ стеклѣ получалось одно значеніе θ_1 угла, въ N при достаточно толстомъ слой серебра другое значеніе θ_2 . Начиная отъ C внизъ, краевой уголъ постепенно переходилъ отъ θ_1 до θ_2 , принимая промежуточные значенія, что доказываетъ наличность влияния массы стекла черезъ слой серебра. Quincke опредѣлялъ толщину слоя серебра въ томъ мѣстѣ, въ которомъ краевой уголъ принимать постоянное значеніе θ_2 ; эта толщина и должна равняться искомому ρ . Вмѣсто воды онъ бралъ и ртуть, причемъ серебро было замѣнено коллоидомъ, AqJ или Aq_2S . Quincke находитъ ρ близкимъ къ 0.05 микрона и только для стекло-коллоидумъ—ртуть получаетъ $\rho = 0.08$ микрона.

Въ таблицахъ XI, XII и XIII, въ концѣ этой книги, помѣщены числовые значенія величинъ a^2 и α для различныхъ жидкостей.

Рис. 303.



ЛИТЕРАТУРА.

ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНІЕ И ВОЛОСНОСТЬ.

Исторія: Gehler, Physikal. Wörterb. II, Capillarität.

Jurin, Phil. Trans. 30 № 353, 363, 759, 1083 (1718 г.).

Young, Phil. Trans. 1805, I p. 65. Lectures on natural philosophy. II, p. 649, 1807.

Laplace, Supplém. au X livre du Traité de mécanique céleste. Oeuvres, T IV, p. 389.

- Gauss* Principia generalia и т. д. Сочинения, Т. 5, стр. 9. (Изд. 1867 г.).
- Poisson*. Nouvelle theorie de l'action capillaire.
- Weinstein*. (Сравнение теорій). Wied. Ann. 27 p. 544, 1886
- Stahl*. Pogg. Ann. 139 p. 239, 1870.
- Quet*. Progrès de la capillarité. Paris. 1867.
- Segner*. Commentationes Soc. sc. Goettingensis. I, 1752.
- Bertrand*. Journ. de Liouville. 13, 1842; 9, p. 117, 1844.
- Van der Mensbrugghe*. Bull. de l'Acad. de Belgique (2) 22 p. 272, 1866; 39 p. 375, 1875; (3) 11 p. 338, 1886; 24 p. 343, 1892; 25 p. 233, 1893; 26 p. 37, 1893. Annales de la Soc. scient. de Bruxelles T. 18, 1 partie. Mem. couronnées de l'Acad. de Belg. 34, 1869.
- C. R.* 115 p. 1059; 121 p. 461.
- Mellberg*. Om Ytspänningen hos vätskor. Helsingfors. 1871.
- Worthington*. Phil. Mag. (5) 18 p. 334, 1884.
- Quincke*. Pogg. Ann. 134 p. 355, 1868; 135 p. 621, 1868; 137 p. 402, 1869; 139 p. 1, 1870; 160 p. 371, 1877; Ann. d. chem. et phys. (4) 16 p. 302, 1869. W. A. 27 p. 222, 1886; 52 p. 1, 1894.
- Б. Срезневский*. Сдѣленіе водныхъ растворовъ хлористаго цинка. Ж. Ф. Х. О. 13 стр. 242, 1881.
- Duclaux*. Theorie elem. de la capillarité. Paris. 1872.
- P. Hersch*. Methoden zur Bestimmung der Oberflächenspannung. Iserlohn. 1893.
- И. Громова*. Къ теоріи капиллярныхъ явленій. Казань. 1886.
- Plateau*. Mem. de l'Acad. de Belg. 1843—1863. Statique des liquides soumis aux seules forces molécul. Gand et Paris. 1873.
- Simon* (de Metz). C. R. 12 p. 892 (1841); Ann. ch. et phys. (3) 32 p. 5, 1851.
- Van der Waals*. Continuitat des gasformigen und flüssigen Zustandes. (Переводъ *Rotha*). Leipzig. 1881 p. 103.
- Stefan*. Sitzber. Wien. Acad. 94, II. 1886; W. A. 29 p. 655, 1886.
- Boys*. Мыльные пузыри. (C. V. Boys, Seifenblasen. Нѣмецк. пер. Leipzig. 1893).
- Oberbeck*. W. A. 11 p. 634, 1880.
- Itati*. Nuov. Cim. (3) 3, 1878. (Beibl. 1878 p. 381).
- Jamin*. Leçons sur les lois de l'équilibre et du mouvement des liquides dans les corps poreux.
- Hagen*. Pogg. Ann. 67 p. 1, p. 170, 1846.
- Désains*. Ann. ch. et phys. 51 p. 385, 1832.
- Dr. Heen*. Recherches touchant la phys. comparee. Paris. 1888 p. 77.
- Frankenhein*. Die Lehre von der Cohesion. Breslau 1835. Pogg. Ann. 72 p. 177, 1847.
- Wadswort*. Pogg. Ann. 119 p. 186, 1864; 121 p. 44, 122 p. 1; 1864.
- Duclaux*. Ann. ch. et phys. (4) 21 p. 366, 1870.
- Brunner*. Pogg. Ann. 70 p. 486, 1847.
- Wolf*. Pogg. Ann. 98 p. 643, 1856; 101 p. 550, 102 p. 571, 1857.
- Вейнбергъ*. Zischr. phys. Ch. X p. 34, 1892; Ж. Ф. Х. О. 24, стр. 13 и 44, 1892. (Содержитъ подробное указаніе литературы по вопросу объ опредѣленіи величинъ α и α^2).
- Галанкинъ*. Капиллярныя свойства соляныхъ растворовъ. Казань. 1893.
- Кастерикъ*. Обь измѣненіи сдѣленія жидкостей съ температурой. Ж. Ф. Х. О. 24, Отд. физ., стр. 196, 1892; 25, стр. 51, стр. 203, 1893.
- Lord Rayleigh*. Phil. Mag. (5) 33 p. 363, 1892.
- Eötvös*. W. A. 27 p. 448, 1886.
- Hall*. Phil. Mag. (5) 36 p. 385, 1893.
- Sandis*. C. R. 118 p. 1132, 1894; J. de phys. (2) 6 p. 571, 1887; 9 p. 384, 1890.
- Volkman*. Wied. Ann. 11 p. 187, 1880; 56 p. 457, 1895.
- Marsden*. J. de phys. (3) 2 p. 68, 1893.
- Klaproth*. Math. und naturwiss. Ber. aus Ungarn. 5 p. 101, 1887; Beibl. 12 p. 750, 1888.
- Пильниковъ*. Ж. Ф. Х. О. 20, Отд. Физ., стр. 83, 1888.
- Sohncke*. W. A. 40 p. 344, 1890.

Verschaaffelt. Zittingsverslag. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam. 1895—1896, p. 74; Beibl. 20 p. 343, 1896.

Краевичъ. Ж. Ф. Х. О. 7 стр. 129, 1875.

Куликинъ. Подъемъ водныхъ растворовъ въ капиллярныхъ трубкахъ. Ж. Ф. Х. О. 23 стр. 122, 1891.

Куликинъ. Капиллярныя постоянныя насыщенныхъ растворовъ. Ж. Ф. Х. О. 23 стр. 468, 1891.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Растворы твердыхъ и жидкихъ тѣлъ.

§ 1. Общая замѣчанія о растворахъ. Когда твердое тѣло находится въ соприкосновеніи съ жидкостью, то оно, или часть его, также переходитъ въ жидкое состояніе, и образуетъ съ данною жидкостью однородную смѣсь, называемую растворомъ. Количество твердаго вещества, могущее раствориться въ данномъ количествѣ жидкости, имѣетъ предѣлъ, зависящій отъ рода взятыхъ двухъ веществъ, отъ температуры, давленія и вообще отъ физическихъ условій, при которыхъ совершается раствореніе. Когда этотъ предѣлъ достигнутъ то говорятъ, что растворъ насыщенъ.

Понятіе о растворимости, къ сожалѣнію, до сихъ поръ опредѣляется плохо, отъ чего легко происходить недоразумѣнія. Растворимостью или коэффициентомъ растворимости называютъ:

1. Вѣсовое количество S вещества, могущее раствориться въ 100 вѣсовыхъ частяхъ растворителя (воды, алкоголя и т. д.).

2. Вѣсовое количество P вещества, которое содержится въ 100 вѣсовыхъ частяхъ насыщеннаго раствора.

Связь между S и P легко найти, если S частей вещества включается въ 100 частей растворителя, то онѣ же содержатся въ $100 + S$ частяхъ раствора, а потому въ 100 частяхъ раствора имѣемъ

$$P = \frac{100S}{100 + S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

частей раствореннаго вещества. Наоборотъ

$$S = \frac{100P}{100 - P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Коэффициентъ S чаще дается; онъ можетъ мѣняться отъ нуля до какихъ угодно чиселъ. Коэффициентъ P не можетъ достигнуть предѣльнаго значенія 100, которое соответствовало-бы безконечной растворимости ($S = \infty$).

Когда рѣчь идетъ о ненасыщенныхъ растворахъ, то ихъ составъ опредѣляется величинами s и p , имѣющими тѣ же значенія, какъ S и P (максима отъ s и p), и связанными тѣми же равенствами (1) и (2). Въ рѣдкихъ

случаяхъ растворимость опредѣляется не въсовыми, но объемными соотношеніями растворителя, растворимаго и раствора.

При соприкосновѣніи двухъ жидкостей, не смѣшивающихся по бѣхъ пропорціяхъ, также образуются растворы.

Вѣроятно всякое вещество растворяется, хотя бы въ нѣкоторомъ количествѣ, во всякой жидкости. Когда это количество весьма мало или вовсе не поддается опредѣленію, то говорить о нерастворимости одного вещества въ другомъ.

Раствореніе представляетъ явленіе крайне сложное и въ немъ играть роль нѣкій рядъ различныхъ факторовъ. Вопросъ о растворахъ составляетъ въ настоящее время одинъ изъ главныхъ отдѣловъ обширной науки, развившейся подъ названіемъ физической химіи. Основатели этой науки суть: Д. И. Менделѣевъ, Ostwald, Arrhenius, Raoult, van't Hoff, Nernst, Pfeffer и другіе. Этой наукѣ специально посвящены обширные учебники, и для ея преподаванія назначаются отдѣльныя лекціи и даже особыя кафедры при университетахъ. Здѣсь въ курсѣ физики, мы ограничимся краткимъ указаніемъ на нѣкоторыя важнѣйшія стороны ученія о растворахъ.

Когда твердое вещество растворяется, то оно прежде всего переходитъ въ жидкое состояніе, а затѣмъ распространяется по всей массѣ растворителя. Переходъ изъ одного состоянія въ другое, а также расширеніе вещества сопровождается затратою работы, обыкновенно на счетъ теплоной энергіи самихъ веществъ. Поэтому раствореніе весьма часто сопровождается охлажденіемъ.

При раствореніи играть большую, можетъ быть и первенствующую роль химизмъ, и притомъ его проявленія разнообразны. Во-первыхъ, на самый раствор, во многихъ случаяхъ можно смотрѣть, какъ на своего рода непрочное химическое соединеніе между растворителемъ и растворимымъ. Измѣненіе плотности раствора, о которомъ ниже будетъ сказано, можетъ служить прямымъ указаніемъ на то, что раствореніе не должно быть разсматриваемо, какъ простое смѣшеніе растворителя съ охлажденнымъ твердымъ веществомъ. Раствореніе въ водѣ солей, кислотъ и т. д. можетъ, далѣе, сопровождаться распаденіемъ или образованіемъ въ растворѣ различныхъ гидратовъ. Наконецъ, и это одна изъ самыхъ интересныхъ сторонъ ученія о растворахъ, въ настоящее время нѣкая школа ученыхъ придаетъ огромное значеніе диссоціаціи (стр. 427) раствореннаго вещества. Предполагается, что въ слабыхъ растворахъ почти всѣ молекулы раствореннаго вещества диссоциированы, т. е. разложены на составныя части, а именно на тѣ, которыя выделяются изъ раствора на электродахъ при пропусканіи черезъ него электрическаго тока, и которыя называются іонами. Къ ученію о свободныхъ іонахъ намъ придется еще часто возвращаться. Замѣтимъ вообще, что мы не намѣреваемся въ этой главѣ собрать все, что касается растворовъ, на кое-что уже раньше было нами указано, какъ напр. на сжимаемость растворовъ (стр. 449) и на ихъ поверхностное натяженіе (стр. 441). Въ послѣдующихъ отдѣлахъ мы познакомимся еще съ нѣкоторыми изъ свой-

ствами, напр. со свойствами оптическими, тепловыми и, въ особенности, съ ихъ электропроводностью.

Нѣкоторые свойства растворовъ, будучи выражены численными величинами, оказываются такими, каковыми ихъ можно было бы ожидать, если считать растворъ за простую смѣсь двухъ веществъ. Такие свойства Ostwald предпочелъ называть «аддитивными».

§ 2. Отдѣленіе растворителя отъ растворимаго и обратно. Сущест­вуютъ три способа для раздѣленія частей раствора.

1. Нагрѣваніе раствора, причемъ жидкій растворитель переходитъ въ парообразное состояніе, и въ отдѣльности можетъ быть полученъ при охлажденіи, если только растворенное вещество нелетуче, т.-е. при нагрѣвании само не превращается въ пары. Если же и растворенное вещество при нагрѣвании испаряется, но имѣетъ другую точку кипѣнія, чѣмъ раство­ритель (напр. алкоголь и вода), то болѣе или менѣе полное раздѣленіе раствора достигается многократною фракционированною перегонкою, причемъ перегнанное вещество съ каждою новою перегонкою дѣлается все богаче тою составною частью, точка кипѣнія которой ниже.

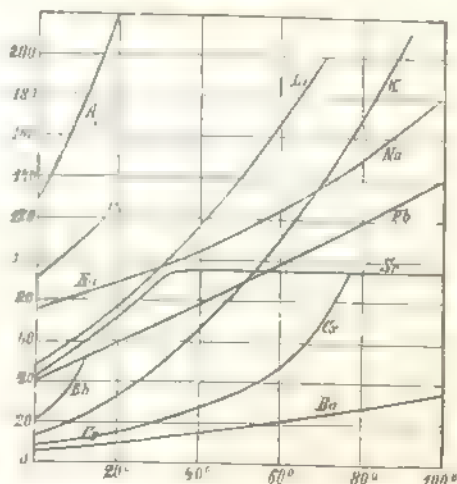
2. Охлажденіе раствора. При охлажденіи кристала раствора ка­кого-либо вещества изъ жидкости это вещество вообще выделяется, и при­томъ весьма часто въ кристаллическомъ видѣ; при охлажденіи слабыхъ раство­ровъ изъ воды вообще выделяется чистый ледъ. Къ этому интересному яв­ленію мы возвратимся въ ученіи о теплотѣ.

3. Добавленіе къ раствору третьяго вещества, не могущаго служить растворителемъ весьма часто приводитъ къ выдѣленію части раствореннаго вещества.

§ 3. Зависимость растворимости отъ температуры. Съ повышеніемъ температуры растворимость вообще увеличивается, изъ этого правила су­ществуютъ однако исключенія. Мно­гие ученые выражали растворимость эмпирическими функциями темпера­туры, причемъ опять таки нѣкоторые дали формулы для S другие для P . Нагляднѣе всего изображаетъ зависимость растворимости отъ тем­пературы кривыми линиями. Такъ на рис. 304 изображена эта зависи­мость для азотнокислыхъ солей

Ag , Ca , Na , Li , Sr , Pb , Rb , K , Cs и Ba . На оси абсциссъ отложены температуры, на оси ординатъ величины S , т.-е. вѣсовые количества соли, растворяющіяся въ 100 частяхъ воды. Мы видимъ изъ этихъ кривыхъ напр., что особенно пра­вильно возрастаетъ съ температурою растворимость $Pb(NO_3)_2$; что при низкихъ температурахъ $NaNO_3$ болѣе растворима, чѣмъ $LiNO_3$ и KNO_3 .

Рис. 304.



а при болѣе высокихъ она растворяется менѣе, чѣмъ послѣднія двѣ соли; мы видимъ, что особенно быстро возрастаетъ растворимость KNO_3 съ температурой, и что растворимость $Sr(NO_3)_2$ представляетъ странную особенность: она растетъ отъ 0° примѣрно до 33°, и затѣмъ дѣлается почти постоянной.

Изъ солей, растворимость которыхъ въ водѣ графически изображается линией, мало уклоняющейся отъ прямой, и для которыхъ поэтому S выражается линейною функциею температуры, укажемъ на слѣдующие:

$$\begin{aligned} BaCl_2 & \dots S = 30.62 + 0.2711 t \\ KCl & \dots S = 28.5 + 0.29 t \\ K_2SO_4 & \dots S = 8.36 + 0.1741 t \\ KBr & \dots S = 54.43 + 0.5128 t \\ KJ & \dots S = 126.23 + 0.8088 t. \end{aligned}$$

Для другихъ солей получается вообще болѣе сложныя эмпирическия формулы. Укажемъ напр. на формулу Д. И. Менделѣева для растворимости KNO_3 въ водѣ.

$$S = 13.3 + 0.574 t + 0.01717 t^2 + 0.0000036 t^3.$$

Nordenskjöld далъ цѣлый рядъ эмпирическихъ формулъ вида

$$\lg S = a + b \left(\frac{t}{100} \right) + c \left(\frac{t}{100} \right)^2 \dots \dots \dots (3)$$

напр.

$$Ba(NO_3)_2 \dots \lg S = 0.7207 + 1.2495 \left(\frac{t}{100} \right) - 0.4307 \left(\frac{t}{100} \right)^2.$$

Étard выразилъ P для опредѣленнаго промежутка температуръ отъ t_1 до t_2 эмпирическими формулами, въ которыхъ $\theta = t - t_1$. Приведемъ нѣкоторые примѣры:

$$CaCl_2 \dots P_{50^\circ-170^\circ} = 54.5 + 0.0755 \theta$$

$$AgNO_3 \dots P_{55^\circ-198^\circ} = 81.0 + 0.1328 \theta$$

$$ZnSO_4 \dots P_{(-5^\circ)-81^\circ} = 27.6 + 0.2604 \theta.$$

Для нѣкоторыхъ веществъ растворимость съ повышениемъ температуры сперва увеличивается, достигаетъ максимума и затѣмъ опять уменьшается. Сюда относится сода: $Na_2CO_3 + 10H_2O$ имѣетъ максимумъ растворимости при 38°, а именно $S = 1112.17$; для безводной соли имѣемъ

t°	10°	20°	30°	32°,5	34° до 79°	100°
S	12,6	21,4	38,1	59,0	46,2	45,4.

Примѣръ неправильнаго измѣненія растворимости съ температурою представляетъ желѣзный купоросъ $FeSO_4 + 7H_2O$, для котораго Etard даетъ формулы

$$P_{(-2)^{\circ}-65^{\circ}} = 13.5 + 0.3784\theta$$

$$P_{65^{\circ}-96^{\circ}} = 38.8$$

$$P_{96^{\circ}-156^{\circ}} = 38.8 - 0.6685\theta$$

$$P_{156^{\circ}} = 0.$$

$3CdSO_4 + 8H_2O$ имѣть максимумъ растворимости при 68° ; $MnSO_4$ при 57° ; $ZnSO_4$ (безводный) при 81° .

Замѣчательно мало мѣняется растворимость $NaCl$ въ зависимости отъ температуры:

$t^{\circ} =$	-15°	0°	40°	80°	100°
$S =$	32.73	35.52	36.64	38.22	40.35.

Для промежутка отъ 0° до 10° Д. П. Менделѣевъ даетъ формулу

$$S = 35.7 + 0.024t + 0.0002t^2.$$

Для тростниковаго сахара имѣемъ

t°	0°	25°	50°	75°	100°
S	179.2	211.4	260.4	339.9	487.2
P	64.18	67.89	72.25	77.27	82.97.

Въ 1894 г. появилось обширное изслѣдованіе Etard'a о растворимости большого числа различныхъ солей въ водѣ и въ цѣломъ рядѣ органическихъ жидкостей. Мы не можемъ останавливаться на интересныхъ результатахъ этого изслѣдованія.

Растворимость веществъ, весьма мало растворяющихся въ водѣ, изслѣдовали F. Kohlrausch и Rose, а также Hellmann. Приводимъ нѣкоторые изъ результатовъ, найденныхъ послѣднимъ изъ названныхъ ученыхъ. Одна вѣсовая часть соли растворяется въ N частяхъ воды

	N	t°
$BaSO_4$. . .	429700 . . .	$18^{\circ}.4$
$AgBr$. . .	1971650 . . .	$20^{\circ}.2$
AgJ . . .	1074040 . . .	$28^{\circ}.4$
$BaCO_3$. . .	64070 . . .	$8^{\circ}.8$
$SrCO_3$. . .	121760 . . .	$8^{\circ}.8$
$CaCO_3$. . .	99500 . . .	$8^{\circ}.7.$

Растворимость веществъ въ различныхъ органическихъ растворителяхъ изслѣдовалъ также В. Тимофеевъ.

§ 4. Растворение въ смѣсахъ нѣсколькихъ жидкостей и растворимость смѣсей въ одной жидкости. Если къ раствору прилить жидкость, плохо растворяющую данное вещество, то часть этого вещества выделяется: напр. если прилить алкоголь ко многимъ растворамъ солей въ водѣ. Вообще можно сказать, что растворимость въ смѣси жидкостей меньше суммы растворимостей вещества въ отдельныхъ жидкостяхъ. На это уже было указано въ § 2. III стр. 497. Вопросомъ о распредѣленіи вещества между двумя смѣшанными (напр. взвѣшываемымъ) жидкостями занимались Berthelot и Jungfleisch, Hoff, Rikke, Aulich, Nernst и Яковкинъ. Последний изучалъ раствореніе *J* и *Br* въ смѣскахъ воды и CS_2 , воды и $CNBr$, воды и CCl_4 .

Bodlander занимался интереснымъ вопросомъ о растворимости данной соли въ смѣси такихъ двухъ жидкостей, изъ которыхъ только одна растворяетъ эту соль въ значительномъ количествѣ. Онъ находитъ, что вещество, нерастворимое въ алкоголь, растворяется въ смѣси воды и алкоголя въ количествѣ, пропорциональномъ кубу процентнаго содержанія воды въ растворѣ. Точно также растворимость нѣсколькихъ солей въ одной жидкости меньше суммы растворимостей отдельныхъ частей смѣси. Въ некоторыхъ случаяхъ образуются растворы, въ которыхъ количества растворенныхъ веществъ находятся въ опредѣленномъ отношеніи. Сюда относятся KNO_3 и $Ph(NO_3)_3$; Na_2SO_4 и $CaSO_4$; $NaCl$ и $CaCl_2$, KJ и KCl $NaCl$ и KCl , NH_4Cl или $NaNO_3$.

Другія соли вытѣсняютъ другъ друга изъ растворовъ, такъ, что можно получить насыщенные растворы съ различнымъ относительнымъ содержаніемъ солей.

§ 5. Пересыщенные растворы. Если медленно охлаждать насыщенный растворъ, то во многихъ случаяхъ растворенное вещество изъ него не выделяется, несмотря на то, что во содержанію въ растворѣ оказывается гораздо болѣе этого вещества, чѣмъ соответствуетъ насыщенію при новой болѣе низкой температурѣ. Такой растворъ называется пересыщеннымъ. Особенно хорошо это явленіе удается обнаруживать, если растворить 4 части Na_2SO_4 въ 1 части кипящей воды и медленно охладить растворъ, который можно довести до того, что онъ будетъ содержать въ 8 разъ болѣе соли, чѣмъ соответствовало бы непосредственному его насыщенію при достигнутой температурѣ. Соль быстро начинаетъ выделяться, когда въ растворъ попадетъ малѣйшая крупинка соли $Na_2SO_4 + 10H_2O$. Эта соль содержится въ пыли, носящейся въ комнатномъ воздухѣ, и потому пересыщенный растворъ довольно быстро кристаллизуется на открытомъ воздухѣ. Въ запаянномъ сосудѣ или при доступѣ только очищеннаго воздуха пересыщенный растворъ можетъ сохраняться весьма долго. Loewel и Gernez выяснили механизмъ образованія этихъ пересыщенныхъ растворовъ. Дело въ томъ, что слѣдуетъ отличать три соли, безводную Na_2SO_4 и соли $Na_2SO_4 + 7H_2O$ и $Na_2SO_4 + 10H_2O$, которыя обладаютъ различною растворимостью, а именно соль съ 7-ю молекулами воды болѣе растворима, чѣмъ соль, содержащая 10 H_2O . При охлажденіи насыщеннаго раствора $Na_2SO_4 + 10H_2O$ часть соли переходитъ въ $Na_2SO_4 + 7H_2O$. Прибавка къ раствору кристалла послѣдней

соли не вызывает выделения растворенной соли, которое немедленно начинается в присутствии избыточной частицы $Na_2SO_4 + 10H_2O$.

Вообще выделение соли из пересыщенного раствора вызывается присутствием твердой частицы той же соли или другой, с ней изоморфной (см. Отдѣлъ шестой, Гл. 1), т. е. кристаллизующейся въ аналогичной съ ней формѣ. Такъ напр. $Na_2SO_4 + 10H_2O$ заставляет кристаллизаться пересыщенный раствор $Na_2CO_3 + 10H_2O$.

Существуют соли, которыя могут кристаллизаться въ двухъ формахъ, незначительно различающихся другъ отъ друга; однако растворы этихъ двухъ разновидностей одного и того же вещества отличаются другъ отъ друга своими оптическими свойствами, одинъ вращаетъ плоскость поляризации свѣта (см. Томъ II, Глава семнадцатая) направо, другой нѣтъ. Если въ пересыщенный растворъ, содержащій оба разновидности, бросить кристаллы одной изъ нихъ, то изъ раствора выделяются кристаллы только этого же рода вещества, между тѣмъ какъ соль другого рода остается въ растворѣ. Быстрое выделение вещества изъ пересыщенного раствора сопровождается иногда весьма значительнымъ развитіемъ тепла.

§ 6. Плотность растворовъ. Растворение почти всегда сопровождается сжатыемъ вещества, т. е. объемъ раствора меньше суммы объемовъ растворителя и раствореннаго вещества. Д. И. Менделѣевъ посвятилъ этому вопросу обширное сочиненіе, озаглавленное «Исследование водныхъ растворовъ по удѣльному вѣсу» (С.-Петербургъ 1887 г., къ которому и отсылаемъ читателей, желающихъ ближе ознакомиться съ этимъ интереснымъ вопросомъ).

Сжатіемъ называется относительное уменьшеніе объема при раствореніи. Если v_1 объемъ жидкости, v_2 объемъ растворяемаго вещества и V объемъ раствора, то сжатіе k равно

$$k = \frac{v_1 + v_2 - V}{v_1 + v_2} = 1 - \frac{V}{v_1 + v_2} \quad (4)$$

Если соответствующія вѣсовые количества суть p_1 , p_2 и P , а плотности d_1 , d_2 и D , то $v_1 = \frac{p_1}{d_1}$, $v_2 = \frac{p_2}{d_2}$ и $V = \frac{P}{D}$, такъ что

$$k = 1 - \frac{\frac{P}{D}}{\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2}} \quad (5)$$

Wueller растворилъ 21.522 куб. сант. соли (44.293 гр.) въ 554.077 куб. сант. воды, объемъ раствора оказался равнымъ 570.838 куб. см., а не $554.077 + 21.522 = 575.599$. Отсюда $k = \frac{4.761}{575.6} = 0.00827$.

Съ возрастаніемъ количества раствореннаго вещества сжатіе вообще увеличивается, достигая наибольшаго значенія при некоторомъ опредѣленномъ составѣ раствора. Такъ наибольшее сжатіе раствора $SrCl_2$ въ водѣ соответствуетъ случаю $S = 100$ или $P = 30$ (равныя вѣсовые количества соли и воды). Геричъ находитъ для уменьшенія δ объема воды, получаемого при

образованіи 100 гр. раствора, содержащаго p процентов соли, слѣдующее выраженіе:

$$\delta = C(100 - p)p.$$

гдѣ C величина постоянная относительно p , но зависящая отъ температуры.

Наибольшее сжатіе соответствуетъ $p = 50$.

Въ связи съ сжатіемъ находится явленіе набухания или охлажденія, которое сопровождается разбавленіемъ растворовъ чистою водою. Если смѣшать равные объемы насыщеннаго раствора и чистой воды, то замѣчается повышеніе температуры для растворовъ KCl , $ZnSO_4$, уксуснокислыхъ солей натрия и цинка и пониженіе для растворовъ Na_2SO_4 , KNO_3 , HNO_3 и т. д.

Valson открылъ замѣчательное правило для вычисленія плотности «нормальныхъ» растворовъ, содержащихъ эквивалентныя количества соли въ равныхъ объемахъ воды, а именно 1 граммъ-молекулу въ одномъ литрѣ. Исходною точкою служитъ плотность 1.015 нормальнаго раствора NH_4Cl (53,5 гр. въ 1 литрѣ). Плотность нормальнаго раствора другихъ солей оказывается «аддитивнымъ» свойствомъ (стр. 497), получающимся отъ сложения частей, зависящихъ отдѣльно отъ металла и отъ кислоты, которымъ соответствуютъ опредѣленные «модули». Эти модули суть для металловъ:

<i>K</i>	<i>Na</i>	<i>Ca</i>	<i>Mg</i>	<i>Sr</i>	<i>Ba</i>	<i>Mn</i>	<i>Fe</i>	<i>Zn</i>	<i>Cu</i>	<i>Cd</i>	<i>Pb</i>	<i>Ag</i>
30	25	27	20	55	73	37	37	41	42	61	103	105

для кислотъ:

<i>HBr</i>	<i>HJ</i>	<i>H₂SO₄</i>	<i>HNO₃</i>	<i>H₂CO₃</i>
34	64	20	15	14

Эти модули слѣдуетъ прибавить къ третьей десятичной числа 1.015, чтобы получить плотность нормальнаго раствора. Такъ напр. плотность нормальнаго раствора $Ca(NO_3)_2$ равна $1.015 + \frac{27+15}{1000} = 1.057$. Bender (1883) расширилъ правило Valson'a и для кратво-нормальныхъ растворовъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ раствореніе сопровождается расширеніемъ, т. е. объемъ раствора больше суммы объемовъ растворителя и раствореннаго. Это явленіе замѣтили впервые для раствора нашатыря въ водѣ Michel и Krafft (1854), а затѣмъ Schiff (1859), Gerlach (1859), Nicol (1883) и Lecoq de Boisbaudran. Обширное изслѣдованіе произвели Schiff и Monsacchi (1896). Они нашли значительное расширеніе при раствореніи NH_4NO_3 въ водѣ (до 4° при 63° растворѣ), въ азотной кислотѣ, въ растворѣ селитры и въ растворѣ нашатыря. Раствореніе же въ метиловомъ и въ этиловомъ спиртѣ сопровождается сжатіемъ. Далѣе они нашли расширеніе при раствореніи NH_4Cl , NH_4Br въ водѣ, между тѣмъ какъ раствореніе NH_4J въ водѣ сопровождается сжатіемъ. Нѣкоторые вещества ($NH_3 \cdot OHCl$, $Na_2S_2O_3 + 5H_2O$) обнаруживаютъ сжатіе у слабыхъ и расширеніе у болѣе крѣпкихъ растворовъ.

§ 7. Обзор некоторых дальнейших свойств растворов. Счита-
ется не лишним упомянуть о некоторых наиболее важных свойствах
растворов, къ которымъ мы отчасти впоследствии еще возвратимся.

I. Давление увеличиваетъ растворимость тѣхъ веществъ, растворе-
ніе которыхъ сопровождается сжатіемъ; наоборотъ, когда при раствореніи
происходитъ увеличеніе объема ($V > v_1 + v_2$ и слѣд. $k < 0$), то раство-
римость уменьшается съ возрастаніемъ вѣшняго давления. Этотъ резуль-
татъ нашелъ Sorby. Такъ напр. растворимость поваренной соли увеличивается
почти на $\frac{1}{2}\%$, при давлении въ 121 атм., а растворимость напатыри
уменьшается болѣе, чѣмъ на 1% , при давлении въ 164 атм.

Braun далъ слѣдующую теоретическую формулу для измѣненія рас-
творимости, вызваннаго увеличеніемъ вѣшняго давления на одну единицу:

$$\epsilon = \frac{\eta^2}{Q} F,$$

гдѣ ϵ та масса соли, которая растворяется въ насыщенномъ растворѣ на-
ходящемся подъ давлениемъ p , когда p растетъ на единицу; η та масса
соли, которая растворяется въ насыщенномъ растворѣ, когда абсолютная
температура T растетъ на 1° , φ увеличеніе объема и Q поглощенная
теплота (въ механическихъ единицахъ) при раствореніи 1 гр. соли въ почти
насыщенномъ растворѣ. E. Stackelberg изслѣдовалъ вліяніе давления на
растворимость NaCl , NH_4Cl и квасцовъ.

II. Явленія всасыванія растворовъ нерѣдко сопровождаются вы-
дѣленіемъ раствореннаго вещества. Песокъ и уголь удерживаютъ, при про-
хожденіи черезъ нихъ растворовъ солей, часть послѣднихъ. Подобное отно-
сится къ клееной бумагѣ; она быстра въ всасывать воду, чѣмъ раство-
ренныя въ ней соли.

III. Упругость p' пара раствора меньше упругости p пара раство-
рителя. Относительное пониженіе упругости пара равно

$$\frac{p - p'}{p} = \frac{M_1}{M} S \quad (6)$$

гдѣ M_1 и M молекулярныя вѣсы растворителя и раствореннаго вещества;
 S , какъ и выше, число вѣсовыхъ частей вещества приходящихся на 100
частей растворителя. Формулу (6) можно написать и такъ

$$\frac{p - p'}{p} = \frac{n}{n + N} \quad (7)$$

гдѣ n число молекулъ раствореннаго вещества, приходящихся на N моле-
кулъ растворителя.

IV. Температура t' затвердѣванія раствора ниже температуры t
затвердѣванія растворителя. Пониженіе $t - t'$ равно

$$t - t' = k \frac{S}{M} \quad (8)$$

гдѣ M молекулярный вѣсъ раствореннаго вещества; N то-же, что и въ предыдущей формулѣ; k постоянный коэффициентъ, зависящій отъ рода растворителя. Оказывается, что

$$k = 0.02 \frac{T}{n} \dots \dots \dots (9)$$

гдѣ T абсолютная температура затвердѣванія растворителя ($t + 273$) и n скрытая теплота плавленія (одного грамма въ малыхъ калоріяхъ).

V. Теплоемкость растворовъ солей въ водѣ меньше суммы теплоемкостей воды и соли.

VI. Температура наибольшей плотности водныхъ растворовъ лежитъ ниже $+ 4^{\circ}$ Ц., температуры наибольшей плотности чистой воды.

VII. Многие оптическія и электрическія свойства растворовъ, особенно слабыхъ, суть свойства аддитивныя. Сюда относится преломляемость, вращеніе плоскости поляризации (естественное и электромагнитное), электропроводность и т. д.

§ 8. Взаимное раствореніе жидкостей. Слѣдуетъ отличать три случая, причемъ не рѣдко другъ отъ друга разграниченныхъ.

1. Нѣкоторыя жидкости вовсе не растворяются одна въ другой, или вѣроятно, незначительно мало. Сюда относятся напр. вода и масло.

2. Нѣкоторыя жидкости могутъ быть смѣшаны во всякъ пропорціяхъ напр. алкоголь и вода, многия кислоты и вода, хлороформъ и эфиръ и т. д.

3. Существуютъ жидкости, растворяющія другъ друга въ опредѣленныхъ количествахъ. Если смѣшать такіе двѣ жидкости, изобогатить ихъ и дать смѣси отстояться, то она черезъ нѣкоторое время раздѣляется на двѣ части. Внизу собирается болѣе тяжелая жидкость, насыщенная растворенной въ ней другою жидкостью, а наверху насыщенный растворъ болѣе тяжелой жидкости въ болѣе легкой. Такие два раствора даютъ напр. вода и эфиръ, алкоголь и CS_2 .

Взаимное раствореніе жидкостей сопровождается поглощеніемъ или выдѣленіемъ тепла; такъ при смѣшеніи хлороформа и бензина происходитъ пониженіе (на $7^{\circ}.2$), при смѣшеніи уксуснокислаго эфира съ алкоголемъ пониженіе (на $2^{\circ}.4$) температуры. Интересный вопросъ объ усадѣности паровъ смѣси нѣсколькихъ жидкостей рассмотримъ впоследствии.

Смѣшеніе жидкостей сопровождается иногда весьма значительнымъ уплотненіемъ: объемъ смѣси меньше суммы объемовъ составныхъ частей. Особенный интересъ представляетъ сжатіе, сопровождающее смѣшеніе воды и алкоголя, подробно изслѣдованное Д. И. Менделѣевымъ. Это сжатіе доходитъ до 4.15% суммы объемовъ воды и алкоголя для случая смѣшенія 45.88 частей алкоголя и 54.12 частей воды, что соответствуетъ образованію вещества $C_2H_5O - 3H_2O$. При комнатной температурѣ (около 20° Ц.) величина сжатія опредѣляется изъ слѣдующей таблички.

100 объемовъ воды	÷	0 объемовъ алкоголя даютъ	100	объем. смеси			
90	»	+10	»	»	99.4	»	»
80	»	+20	»	»	98.2	»	»
60	»	+40	»	»	96.6	»	»
50	»	+50	»	»	96.3	»	»
40	»	+60	»	»	96.5	»	»
20	»	+80	»	»	97.4	»	»
10	»	+90	»	»	98.3	»	»
0	»	+100	»	»	100	»	»

Величина сжатія зависитъ отъ температуры, и наибольшее сжатіе соответствуетъ при различныхъ температурахъ не вполне одинаковымъ смесямъ.

ЛИТЕРАТУРА.

- Д. И. Менделѣевъ. Исследование водныхъ растворовъ по удѣльному вѣсу. Спб. 1887 г.
Nordenskjöld. Pogg. Ann. 136 p. 309, 1869.
Etard. C. R. 98 p. 1432, 1884; 104 p. 1615, 1887; 106 p. 740, 1888; 108 p. 117, 1889; *Ann. ch. et phys.* (7) 2 p. 503, 1894.
Gerniz Annales de l'École Normale. (1) 3 p. 167, 1866; (2) 5 p. 9, 1876.
Valson. C. R. 73 p. 441, 1871; 77 p. 806, 1873.
Bender. W. A. 20 p. 560, 1883.
Д. И. Менделѣевъ. Сильнее спирта съ водою. Спб. 1865.
Ограничиваясь указаніемъ на работы, упомянутыя въ текстѣ. Боле обширныя указанія на литературу можно найти у *Landoit, Phys.-chem. Tabellen.* Berlin. 1894 p. 235—256.
Вл. Тимонеевъ. Растворимость веществъ въ органическихъ растворителяхъ. Труды физ.-хим. секція общ. очит. наукъ при Харьковск. Унив. Годъ 21. Приложенія. Вып. 6-ой. Харьковъ. 1894.
А. Геричъ. Ж. Ф. Х. О. 21 стр. 51. 1889 г., О. Ф. Н. Общ. Л. Е. 3, вып. 1, стр. 18, 23, 1890.
Heritsch. W. A. 36 p. 115, 1889.
Любавина. Объ изслѣд. А. Герича. О. Ф. Н. Общ. Л. Е. 3, вып. 2, стр. 9, 1890.
Kohlrausch und Rose. W. A. 50 p. 127, 1893.
Halleman. Zeitschr. f. phys. Chemie 12 p. 125, 1893.
Brathlot et Jouguet. Ann. ch. et phys. (4) 26 p. 401, 1872.
Hoff. Zeitschr. phys. Chem. 5 p. 322.
Rikke. Zeitschr. phys. Chem. 7 p. 97.
Aulich. Zeitschr. phys. Chem. 8 p. 105.
Nernst. Zeitschr. phys. Chem. 8 p. 111.
Аюкингъ. *Zeitschr. phys. Chem* 13 p. 539 и Ж. Ф. Х. Общ. 28, Отд. химич. стр. 175 и 860, 1896 г.
Boedländer. Zeitschr. phys. Chem 7 p. 308, 358; 16 p. 729.
Michel et Krafft. Ann. chim. et phys. (3) 41 p. 471, 1854.
Schiff. Lieb. Annalen. 109 p. 325, 1859; 113 p. 349, 1860.
Gerlach. Zeitschr. f. anal. Chemie 27 p. 271, 1888.
Nicol. Proc. R. Soc. Edinb. 1881—1882 p. 819.
Lecoq de Boisbaudran. C. R. 120 p. 540, 121 p. 100, 1895.
Schiff und Monsacchi. Zeitschr. phys. Chemie. 21 p. 277, 1896.

Braun, W. A. 30 p. 250. 1887; *Zeitschr. phys. Chem* 1 p. 259. 1887.

Sorby *Proc. Roy. Soc.* 12 p. 538, 1863.

Stackelberg *Bull. de l'Acad. Imp. des Sc.* (5) 4 № 2. 1896, *Zeitschr. phys. Chem* 20 p. 159, 1896.

Казанкинъ. Сжатіе соляныхъ растворовъ. *Ж. Ф. Х. О.* 26 p. 218. 1894.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Диффузія и осмосъ.

§ 1. Свободная диффузія жидкостей. На стр. 419 было дано общее опредѣленіе термина «диффузія». Двѣ жидкости, способныя смѣшиваться и приведенныя въ соприкосновеніе, диффундируютъ одна въ другую; диффузія окончена, когда получилась вполнѣ однородная смѣсь. Жидкости могутъ быть вполнѣ различныя, напр. вода и алкоголь, или одна изъ нихъ чистая жидкость, а другая растворъ какого-либо вещества въ этой же жидкости. Въ последнемъ случаѣ, наиболее важномъ и интересномъ, диффузія заключается въ постепенномъ распространѣніи раствореннаго вещества по избытку растворителя.

Graham (1870) двумя способами изслѣдовать явленія диффузии. На дне большого сосуда (рис. 305), наполненнаго водою, ставился маленький флаконъ, содержащій непутесемый растворъ. Черезъ опредѣленное время флаконъ вынимался и опредѣлялось, какое количество раствореннаго вещества уцѣло перешло изъ флакона въ окружающую воду. Въ позднѣйшихъ своихъ изслѣдованіяхъ *Graham* помѣщалъ одну жидкость непосредственно надъ другою и черезъ опредѣленные промежутки времени анализировать составъ жидкости въ различныхъ горизонтальныхъ слояхъ, извлекая пробы помощью капиллярнаго сифона.

Рис. 305.



Отсюда онъ могъ опредѣлить относительныя значенія времени, въ теченіе котораго различныя вещества одинаково диффундируютъ, т.-е. въ одинаковомъ количествѣ появится на данномъ разстояніи отъ первоначальной границы раствора и чистой воды; при этомъ различныя растворы брались одинаковой крѣпости. Время относящееся къ *HCl* было принято за единицу; для другихъ веществъ получились времена:

Хлористоводородная кислота	1
Поваренная соль	2.3
Сахаръ.	7
Альбуминъ	49
Карамель	98

Особенно медленно диффундируютъ альбуминъ и карамель, принадлежащія къ т. наз. коллоидамъ, которые рассмотримъ въ концѣ этого отдѣла

W. Thomson (нынѣ Lord Kelvin) далъ удобный способъ наблюденія послѣдовательныхъ стадій диффузи. Въ цилиндрическомъ сосудѣ, содержащемъ внизу болѣе тяжелую жидкость (напр. растворъ), а надъ нею болѣе легкую, помѣщается рядъ стеклянныхъ полыхъ шариковъ, имѣющихъ различныя среднія плотности. Сначала всѣ шарики заходятся на границѣ двухъ жидкостей; но по мѣрѣ измѣненія плотности въ различныхъ горизонтальныхъ слояхъ, нѣкоторые шарики опускаются въ нижнюю жидкость, другіе поднимаются въ верхнюю. По расположенію шариковъ можно судить о составѣ жидкости въ различныхъ разстояніяхъ отъ первоначальной плоскости раздѣла.

Бейлиштейнъ (1856) помещалъ растворы въ сосудъ, форма котораго напоминала опрокинутый сифонъ: короткое колѣно оканчивалось подъ поверхностью воды, налитой въ большой сосудъ.

Berthollet (1804), Fick (1855), Stefan (1874) и др., развиты математическую теорию диффузии. Мы имеем здесь формулу, являющуюся аналогом формулы (24) стр. 420. Количество dq вещества (соли, кислоты и т. д.), проходящего в течение времени dt через горизонтальную площадь s по вертикальному направлению x (снизу вверх), выражается формулой

$$dq = -k_B \frac{da}{a} dt \quad , \quad , \quad , \quad , \quad (1)$$

в которой a есть концентрация раствора (всего количество растворенного вещества в единице объема раствора) в той горизонтальной плоскости, вертикальная координата которой равна x , и в которой расположена рассматриваемая площадь s . Множитель k , характерный для данного рода раствора и зависящий от его состава и физического состояния, называется коэффициентом диффузии. Он численно равен всему количеству растворенного вещества, проходящему в единицу времени через единицу горизонтальной плоскости, когда разность концентраций двух слоев, отстоящих на единицу длины, равна единице. Можно формулировать определение C, G, S , единицы коэффициента диффузии. Размѣры этой величины получаются немедленно, если замѣтить что dh есть вѣкоторое количество вещества, а du количество вещества вѣ единице объема, такъ что $[du] = [dq] : L^3$. Имѣемъ

$$h = - \frac{1}{8} \frac{dq}{du} \frac{du}{dr} \frac{dr}{dt}$$

S есть поверхность, dx длина, dt время, с.г.д.

$$[k] \frac{L^3}{L^3} \frac{[d_I]}{[d_I]} T = \frac{L^2}{T} \dots \dots \dots (2)$$

Весьма часто принимают за единицу времени сутки, за единицу длины сантиметр; когда пользуются *C. G. S.* системой, то пишут k в

видѣ $k = N \cdot 10^{-7} \frac{(\text{сантим})^2}{\text{сек}}$. Если черезъ n обозначить численное значеніе въ системѣ сутки—сантим., то

$$k = N \cdot 10^{-7} \frac{(\text{см.})^2}{\text{сек.}} = n \frac{(\text{см.})^2}{\text{сутки}}.$$

Но сутки = 86400 сек.; слѣд. $n = 86400 N \cdot 10^{-7}$ и, наконецъ,

$$N = 115.7n \dots \dots \dots (3)$$

Такъ для насыщеннаго раствора поваренной соли при 15°

$$k = 108 \cdot 10^{-7} \frac{(\text{см.})^2}{\text{сек.}} = 0.93 \frac{(\text{см.})^2}{\text{сутки}}.$$

Здѣсь $N = 108$, $n = 0.93$. Fick принимать за единицу времени часъ, понятно, что численные значенія для k въ этомъ случаѣ должны равняться $\frac{1}{24}n$, напр. въ только что приведенномъ примѣрѣ $k = 0.039$.

Stefan вычислилъ k изъ опытовъ Graham'a, относившихся къ перемѣнному составу раствора и нашелъ слѣдующія числа для 10^7k въ *C. G. S.* единицахъ:

Карамель.	Альбумина.	Сахарь.	<u>NaCl.</u>		HCl
9° — 10°	13° — 15°	9° — 10°	5°	9° — 10°	5°
$k \cdot 10^7 = 5.4$	7.3	39.9	88.5	107.8	201.6 $\frac{(\text{см.})^2}{\text{сек.}}$

Для раствора *J* въ спиритѣ $k \cdot 10^7 = 61.7$.

F. Weber произвелъ обширное изслѣдованіе диффузіи раствора $ZnSO_4$ въ водѣ, а Schmeister и въ особенности Scheffer изучили вліяніе концентрации и температуры раствора на величину k . Оказалось, что при возрастающей концентрации для нѣкоторыхъ растворовъ k растетъ, для другихъ убываетъ.

P. H. Ленцъ изучалъ диффузію алкогольныхъ растворовъ солей KJ , NaJ , CdJ_2 и K_2CrO_4 ; онъ находить, что скорость диффузии пропорциональна электрическому сопротивленію раствора.

Wiener далъ весьма интересный способъ изученія диффузіи наблюдаемъ пути свѣтового луча, проходящаго черезъ столбъ жидкости, въ которомъ происходитъ диффузія. Другой его способъ основанъ на измѣреніи тѣнь искривленій, которымъ подвергается изображение освѣщенной щели, наклоненной подъ 45° къ горизонту, если это изображение проецировать на диффузионный сосудъ. Boltzmann далъ математическую теорію способа Wiener'a.

Съ повышеніемъ температуры коэффициентъ диффузии увеличивается. Такъ для *NaCl*

$$k_t = k_0(1 + 0.0429t).$$

Де Нееп находить для $MgSO_4$, KNO_3 , $NaCl$, $NaHPO_4$ и K_2CO_3 почти одинаковую зависимость от температуры; но коэффициент при t онъ находить равнымъ 0,012.

§ 2. Диффузия жидкостей черезъ пористую перегородку или осмосъ. Если двѣ жидкости раздѣлены пористой перегородкой (слабо обожженная, немурѣнная глина, животный пузырь, пергаментъ и т. д.), то онѣ, вообще говоря, проходятъ черезъ нее съ различною скоростью. Это явленіе называется осмосомъ. Осмосъ названъ экзосмосъ и эндосмосъ для болѣе медленнаго и для болѣе быстраго прохода въ настоящее время оставлены.

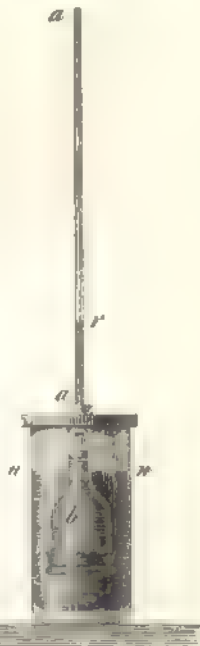
Явленіе осмоса было открыто докторомъ Nollet (1748), который помѣстилъ въ воду небольшой сосудъ, наполненный алкоголемъ и плотно закрытый пузыремъ, и наоборотъ въ алкоголь сосудъ, наполненный водою; онъ замѣтилъ, что въ первомъ случаѣ пузырь вздувался (рис. 306), а во второмъ какъ бы вдавливался по внутрь сосуда. Въ обоихъ случаяхъ вода очевидно быстрее проникла черезъ перегородку, чѣмъ алкоголь.

Первымъ, внимательно изслѣдовавшимъ это явленіе, былъ Dutrochet (1827 - 1835); приборъ, которымъ онъ пользовался изображенъ на рис. 307. Сосудъ b закрытъ снизу пузыремъ; въ его горлышко вставлена вертикальная, открытая сверху трубка aa проходящая черезъ крышку болѣе широкаго сосуда m , содержащаго одну изъ двухъ неизмѣяемыхъ жидкостей, между тѣмъ какъ другая наполняетъ сосудъ b и въ некоторыхъ случаяхъ часть трубки aa . Когда въ b находится растворъ соли въ водѣ, а въ m чистая вода, то жидкость начинаетъ подниматься по трубкѣ что и доказываетъ, что чистая вода быстрее проходитъ черезъ перепонку, чѣмъ растворъ соли. Недостатокъ опытовъ Dutrochet заключается въ томъ, что жидкій столбъ въ трубкѣ aa производитъ сильное гидростатическое давление вызывающее обратный («контрационный») токъ жидкости. Поэтому Viegand (1847) расположилъ перепонку вертикально такъ, чтобы гидростатическія давления на нее съ двухъ сторонъ оставались равными. Онъ подтвердилъ результаты найденныя уже Dutrochet, что избытокъ скорости одного течения надъ скоростью другого пропорционаленъ разности концентрацій двухъ растворовъ одного и того же вещества, помѣщенныхъ съ двухъ сторонъ отъ перегородки. Идея объ особаго рода «осмотическомъ эквивалентѣ», къ которой Jolly былъ приведенъ своими изслѣдованіями, была впоследствии оставлена, а потому мы на ней не останавливаемся.

Рис. 306.



Рис. 307.



Направление болѣе быстрого теченія зависитъ отъ рода взятыхъ двухъ жидкостей, отъ вещества перегородки, а также отъ степени концентрацій если взяты два раствора. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

Если вода и алкоголь отдѣлены животнымъ пузыремъ, то болѣе проникаетъ вода; если же взять тонкую каучуковую перепонку, то, наоборотъ, алкоголь проникаетъ болѣе, чѣмъ вода.

Чистая вода проходитъ болѣе черезъ перепонку, чѣмъ растворы виннокислотной и лимонной кислоты определенной крѣпости, но медленнѣе, чѣмъ растворы слабые.

Объясненіе осмотическихъ явленій представляетъ большія трудности. Полагали сперва, что это явленіе чисто капиллярнаго характера, что та жидкость болѣе проходитъ черезъ поры перепонки, которая выше поднимается въ капиллярныхъ трубкахъ. Это объясненіе оставлено, но Quincke указалъ на роль, которую можетъ играть поверхностное натяженіе жидкостей, соприкасающихся у стѣнки канала внутри пористой перегородки, это натяженіе можетъ вызвать перемищеніе жидкостей въ ту или другую сторону.

Liebig объяснить осмосъ неодинаковою способностью перегородки впитывать въ себя различныя жидкости. Онъ нашелъ, что 100 вѣсовыхъ единицъ сухого бычачьяго пузыря впитываютъ въ себя въ 24 час. воды — 268, раствора NaCl — 133, спирту (84°) — 38 и касторового масла — 17 вѣсовыхъ единицъ. Пузырь, насыщенный родой, теряетъ часть этой воды, если его обсыпать солью или положить въ алкоголь. На основаніи этого Liebig объяснить осмосъ тѣмъ, что перепонка неодинаково быстро поглощаетъ двѣ жидкости, съ которыми она соприкасается, жидкость, впитанная на одной сторонѣ перепонки, вытѣляется на сторонѣ противоположной. Болѣе стойкія объясненія дали Вгеске и Еггк.

Съ повышеніемъ температуры осмосъ черезъ животный пузырь вообще усиливается, хотя и въ очень незначительной степени.

§ 3. Осмотическое давленіе. Мы видѣли въ § 1, что если надъ растворомъ какой либо соли, крѣпоты, сахара и т. д. въ водѣ помѣстить столбъ чистой воды, то растворенное вещество, какъ бы расширяясь, постепенно распространяется по всему объему жидкости. На аналогію этого явленія съ расширеніемъ газа, которое наблюдается при соединеніи занимаемаго имъ пространства съ пустотою, указалъ впервые еще Gay-Lussac. Чистая вода или болѣе слабый растворъ играютъ здѣсь роль пустоты или разряженнаго пространства для раствореннаго вещества. Мы можемъ сказать, что это вещество стремится занять по возможности болѣе большой объемъ. Если это такъ, то должно обнаружиться особаго рода давленіе на перегородку, помѣщенную между растворомъ и водою. Такое давленіе действительно и наблюдается, оно называется осмотическимъ. Его существованіе непосредственно обнаруживается въ приборѣ Dutrochet (рис 307), въ которомъ осмотическимъ давленіемъ поддерживается столбъ жидкости, поднимающійся по трубкѣ *aa*.

Изученіе осмотическаго давленія могло широко развиваться только послѣ изобрѣтенія такъ называемыхъ «полупроницаемыхъ» перепонкъ, обра-

зующихся при соприкосновении двухъ жидкостей, и состоящихъ изъ вещества, осаждающагося вслѣдствіе химической реакціи между жидкостями. Такими перепонками впервые пользовался Traube (1867), назвавши ихъ осадочными мембранами, онѣ получаются напр., если трубочку, наполненную клеемъ, опустить въ дубильную кислоту. Pfeffer (1877) и др. показали цѣлый рядъ способовъ получения полупроницаемыхъ перепонокъ. Одинъ изъ наиболѣе удобныхъ способовъ заключается въ приведеніи въ соприкосновение растворовъ мѣднаго купороса и желѣзисто-синеродистаго кали, причемъ перепонка получается состоящею изъ желѣзисто-синеродистой мѣди (Pfeffer). Удобнѣе всего брать сосудъ изъ пористой глины, пропитать его сперва растворомъ мѣднаго купороса, а затѣмъ растворомъ желѣзисто-синеродистаго кали. Тогда всѣ поры сосуда затягиваются пленкою.

Полупроницаемая пленка имѣетъ свойство свободно пропускать черезъ себя воду, задерживая въ большей или меньшей степени растворенныя въ ней вещества, особенно тѣ, отъ взаимодействия которыхъ она образовалась. Впрочемъ de-Vries и Quincke показали что въ очень малыхъ количествахъ даже и эти вещества проходятъ черезъ перепонку.

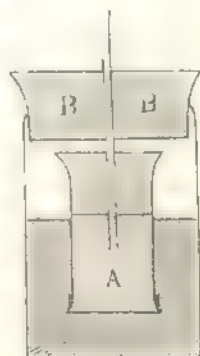
Если пористый сосудъ Pfeffer'a наполнить какимъ либо растворомъ закрыть его пробкою, черезъ которую проходить манометръ, и помѣстить сосудъ въ чистую воду, то манометръ указываетъ возростаніе внутренняго давленія, достигающаго до нѣкотораго максимальнаго значенія, которое обозначимъ черезъ p .

Ostwald и его ученики приписываютъ это давленіе, родящееся въ нѣкоторыхъ случаяхъ до нѣсколькихъ атмосферъ, непосредственно растворенному веществу, молекулы котораго ударяють въ полупроницаемую перепонку. Изъ этихъ ударовъ суммируется давленіе, какъ мы это видѣли для газовъ (стр. 386).

Van't Hoff одинъ изъ основателей ученія объ осмотическомъ давленіи, болѣе осторожно утверждаетъ лишь на аналогію между этимъ давленіемъ и упругостью газовъ, и думаетъ, какъ мы увидимъ ниже, весьма далеко. Противъ взгляда Ostwald'a особенно рѣзко высказался Victor Maass, утверждая, что давленіе на перепонку производится растворителемъ, а не раствореннымъ веществомъ.

На рис. 308 изображенъ приборъ Hegner'a, въ которомъ слой воды играетъ роль полупроницаемой перепонки. Большой стаканъ содержитъ эфиръ, насыщенный водою, а сосудикъ *A* эфиръ, также насыщенный водою и большимъ количествомъ бензола, онъ внизу закрытъ животнымъ пузыремъ, пропитаннымъ водою и играющимъ здѣсь роль пористаго сосуда въ приборѣ Pfeffer'a т.е. служащимъ только для удержанія въ чистотѣ полупроницаемой водяной перепонки, пропускающей эфиръ, но не пропускающей для бензола. По вертикальной трубкѣ мало-по-малу поднимается столбъ эфира.

Рис. 308.



поднимается столбъ

Растворы, обладающие одинаковым осмотическим давлением, называются изотоническими или изоосмотическими.

Тамманн (1888) дал изящный способ для нахождения таких изотонических растворов, при соприкосновении которых образуется непроницаемая перегородка, напр. медного купороса и желѣзисто-синеродистаго калия. Положимъ, что растворъ *A* имѣетъ крѣпость *a*, требуется найти крѣпость *b* раствора *B*, изотоническаго съ первымъ. Для этого опускаютъ каплю раствора *B* въ растворъ *A*; капля немедленно покрывается оболочкой. Если концентрація *b'* раствора *B* больше *b*, то вода вступаетъ снаружи въ каплю, окружающій растворъ дѣлается болѣе крѣпкимъ, и въ видѣ струйки, которую можно ясно наблюдать глазомъ, а еще лучше, особымъ оптическимъ методомъ, опускается внизъ. Если же *b' < b*, то чистая вода выступаетъ наружу и струйка разбавленнаго раствора поднимается вверхъ. Когда растворы изотоничны, то никакой струйки не является, т. е. обмѣна воды не происходитъ.

Traube, de-Vries и Pfeffer изслѣдовали явленія осмотическаго давления въ живыхъ растительныхъ и животныхъ клеткахъ. Внутренняя оболочка стѣнъ клетокъ пропускаетъ воду, но непроницаема для многихъ растворенныхъ въ ней веществъ. Вслѣдствіе этого въ клеткахъ развивается давление, доходящее до 4-хъ атмосферъ и даже до 18-ти атм., напр. въ клеткахъ моркови и, какъ показали изслѣдованія Владимірова (1891), въ клеткахъ нѣкоторыхъ бактерій.

Если живую клетку помѣстить въ растворъ, осмотическое давление котораго больше давления въ клеткѣ, то внутренняя оболочка клетки отстаетъ отъ наружной, и этимъ можно воспользоваться для отысканія изотоническихъ растворовъ. Для этой же цѣли могутъ служить и красныя кровяныя шарики.

Изотонические растворы обладаютъ одинаковою упругостью пара. Этотъ важный законъ вывели теоретически Van't-Hoff и Duhem, онъ былъ подтвержденъ опытами Тамманна (1888). Van't-Hoff далъ формулу

$$p = 4.53 T / q \frac{P}{P_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

въ которой *p* осмотическое давление въ атмосферахъ, *T* абсолютная температура, *P₀* и *P* упругости пара воды и раствора при температурѣ *T*, *lg* знакъ натуральныхъ логарифмовъ.

Изотонические растворы имѣютъ одинаковую температуру замерзанія. И этотъ законъ подтвержденъ опытами Тамманна.

§ 4. Законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака и Авогадро для растворовъ. Van't-Hoff, Ostwald, Arrhenius, Raoult и др., положили основаніе учению о близкомъ сходствѣ, если не тождествѣ, цѣлаго ряда основныхъ свойствъ растворовъ и газовъ. Эти свойства выражаются слѣдующимъ образомъ:

I. Осмотическое давление *p* при неизмѣнной температурѣ пропорционально концентраціи раствора, или обратно пропорционально объему *v*, занимаемому даннымъ количествомъ раствореннаго вещества (Бойль-Мариоттъ).

II. Осмотическое давление p пропорционально абсолютной температурѣ T , т.-е. его температурный коэффициентъ равенъ 0,00367 (Гей-Люссакъ).

III. Одинакие объемы v изотоническихъ растворовъ (равныя давления p) содержать при данной температурѣ t одинаковое число X молекулъ, равное числу газовыхъ молекулъ, находящихся въ объемѣ v при давлении p и температурѣ t (Авогадро).

Полупроницаемыя перегородки лишь въ немногихъ случаяхъ даютъ возможность измѣрить осмотическое давление p , которое косвеннымъ образомъ опредѣляется на основаніи наблюденій упругости пара P (см. формулу (4) стр. 512) или температуры затвердѣванія. Но напр. для раствора сахара давленіе p можетъ быть опредѣлено помощью прибора Pfeffer'a (стр. 511).

Законъ I подтверждается слѣдующими числами для раствора сахара:

Концентрація.	Давленіе.	Отношеніе.
m	p	$\frac{p}{m}$
1%	53,5 см.	53,5
2	101,6	50,8
2,74	151,8	55,4
4	208,2	52,1
6	307,5	51,3

Давленіе выражено въ сантим. ртутнаго столба. Замѣтимъ, что для однопроцентнаго раствора селитры давленіе p превышаетъ три атмосферы.

Законъ II подтверждается слѣдующими числами, относящимися къ однопроцентному раствору сахара:

t°	p набл.	p вычисл.	Разности:
6°,8	0,664 атм.	0,665 атм.	+ 0,001
13,7	0,691	0,681	- 0,010
14,2	0,671	0,682	+ 0,011
15,5	0,684	0,686	+ 0,002
22,0	0,721	0,701	- 0,020
32,0	0,716	0,725	+ 0,009
36,0	0,746	0,735	- 0,011

Величины p , стоящія въ третьемъ столбцѣ, вычислены по формулѣ

$$p = 0,649 (1 + 0,00367 t) (5)$$

Совокупность первыхъ двухъ законовъ приводитъ къ формулѣ, аналогичной формулѣ Клапейрона, (5) стр. 360,

$$p v = R T (6)$$

гдѣ R величина постоянная. Мы видѣли, что если объемъ v выражать въ литрахъ, давленіе p въ атмосферахъ, а каждое вещество брать граммъ-молекулу, т.-е. столько граммовъ, сколько единицъ заключается въ моле-

кулярномъ вѣсѣ этого вещества. или, иначе, если брать одинаковое число молекулъ различныхъ веществъ, то для всѣхъ газовъ

$$R = 0.0815 \dots \dots \dots (7)$$

см. (8) стр. 361.

Вычислимъ величину p для однопроцентнаго раствора сахара при 0° , допуская, что и для него $R = 0.0815$. Въ формулѣ

$$p = \frac{RT}{v} = \frac{0.0815T}{v} \dots \dots \dots (8)$$

полагаемъ $R = 0.0815$, $T = 273$. Молекулярный вѣсъ сахара $C_{12}H_{22}O_{11}$ равенъ 342. Объемъ 100 граммовъ раствора, содержащихъ 1 гр. сахара, равенъ 99.7 куб. см., слѣд. объемъ v равенъ 99.7×342 куб. см. или $v = 34.1$ литра. Итакъ теоретически

$$p = \frac{0.0815 \times 273}{34.1} = 0.656 \text{ атм.}$$

Это число замѣчательно близко къ найденному изъ опытовъ числу $p = 0.649$ атм., см. (5). Такимъ образомъ дѣйствительно давленіе раствореннаго сахара равно тому давленію, которое онъ имѣлъ бы, занявши предоставленное ему пространство въ видѣ недиссоциированнаго (стр. 426) пара.

Такое совпаденіе между наблюдаемыми осмотическими давленіями и вычисленными на основаніи формулы (8) не замѣчается, однако, для многихъ другихъ растворовъ, для которыхъ формула (6) должна быть замѣнена другою

$$pv = iRT \dots \dots \dots (9)$$

Здѣсь R постоянна для всѣхъ растворовъ, равная постоянной въ соответствующей формулѣ для газовъ, если брать граммъ-молекулу вещества. Множитель i показываетъ отступленіе даннаго раствора отъ «нормальнаго». Эти отступленія называютъ то, что было сказано на стр. 426 о диссоциации газовъ. Если i не равно 1, то это показываетъ, что растворенное вещество диссоциировано, и что слѣд. число свободныхъ молекулъ увеличено.

Весьма важно то, что для растворовъ не-электролитовъ, т.е. тѣхъ не разлагающихся подъ влияніемъ электрическаго тока коэффициенты $i = 1$; для электролитовъ $i > 1$. Отсюда Планскъ и Arrheniusъ заключили, что электролиты (соли, кислоты) въ растворахъ отчасти диссоциированы, т.е. разложены на составныя части, а именно на іоны (стр. 436). Приведемъ нѣкоторые численныя значенія множителя i :

HCl	$CaCl_2$	$NaNO_3$	$NaCO_3$	$K_2Al(SO_4)_3$	$KClO_4$	$Na_2B_4O_7$
$i = 1.98$	2.52	1.82	2.18	4.45	1.78	3.57

Arrheniusъ показалъ, что i можно вычислить для растворовъ по формулѣ

$$i = 1 + (k - 1)\alpha \dots \dots \dots (10)$$

гдѣ l полное число частей, на которыя распадается молекула электролита въ растворѣ; напр. $l=2$ для KCl ; $l=3$ для $BaCl_2$, K_2SO_4 и т. д. Величина α опредѣляетъ степень диссоціаціи, т.-е. отношеніе числа разложенныхъ къ числу всѣхъ молекулъ. Чѣмъ болѣе растворъ разбавленъ, тѣмъ ближе α къ единицѣ, т.-е. тѣмъ полнѣе диссоціація (см. стр. 428). Величина α можетъ быть опредѣлена изъ наблюдений надъ электропроводностью растворовъ, и формула (10) даетъ для i числа, весьма согласныя съ тѣми, которыя отчасти приведены выше.

Nernst (1888) далъ наиболѣе полную молекулярную теорію диффузіи растворовъ. Mac-Gregor (1897) далъ интересную формулу, связывающую различные свойства (плотность, тепловое расширение, трение, поверхностное натяженіе, коэффициентъ преломленія) водныхъ растворовъ солей съ соответствующими свойствами чистой воды. Въ эту формулу тоже входитъ коэффициентъ, выражающій степень диссоціаціи (или іонизаціи) раствора.

Л И Т Е Р А Т У Р А .

- Graham. Phil. Trans. 1850, I p. 1; II p. 805; 1851, II p. 483. Liebig's Annal. 77. p. 56 и 129; 80 p. 197, 1851; 121 p. 1, 1852.
 Beilstein. Lieb. Ann. 99 p. 165, 1856.
 Berthollet. Essai de statique chimique. Paris 1803 p. 412.
 Fick. Pogg. Ann. 94 p. 59, 1855.
 Stefan. Wien. Ber. 79, 2 p. 161, 1879.
 H. F. Weber. W. A. 7 p. 469 и 536; 1879.
 Schumacher. Wien. Ber. 79, II p. 603, 1879.
 Schaffer. Chem. Ber. 15 p. 788, 1882; 16 p. 1903, 1883 r.
 De-Haan. Bull. Ac. Belg. (3) 8 p. 219, 1884; 19 p. 197, 1890.
 Nollet. Histoire de l'Acad. des sciences 1748 p. 101.
 Dutrochet. Ann. d. ch. et phys. (2) 35 p. 393; 37 p. 191; 49 p. 411; 51 p. 159; 60 p. 337, 1827—35.
 Vierordt. Archiv v. Roser und Wunderlich VI p. 1847. Pogg. Ann. 73 p. 519, 1848.
 Jolly. Zeitschr. f. rationelle Med. 7 p. 83, 1849; Pogg. Ann. 78 p. 261, 1849.
 Liebig. Ursachen der Saftbewegung. Braunschweig 1848. Theorie der Osmose. Lieb. Ann. 121 p. 78, 1862.
 Quinke. Pogg. Ann. 160 p. 118, 1877.
 Wiener. Wied. Ann. 49 p. 105, 1893.
 Boltzmann. Wied. Ann. 53 p. 959, 1894.
 Умовъ. (О диффузіи) Ж. Ф. Х. О. 23 стр. 335, 1891.
 Грингодовъ. (О диффузіи) Ж. Ф. Х. О. 25 стр. 36, 1893.
 Traube. Arch. f. Anat. u. Physiol. 1867 p. 87.
 Pfeffer. Osmotische Untersuchungen. Leipzig. 1877.
 Adie. J. of. Chem. Soc. 1891 p. 344.
 de Vries. Arch. Neerland. 31 p. 344, 1878. (Beibl. 3 p. 7); Ztschr. f. phys. Chem. 2 p. 414, 1888.
 Tammann. Ztschr. f. phys. Chem. 8 p. 685, 1891; W. A. 34 p. 229 (1866).
 Van't Hoff. Arch. Neerl. 20 p. 239, 1885; Ztschr. f. phys. Chem. 1 p. 481, 1887.
 Nernst. Ztschr. f. phys. Chem. 2 p. 611, 1888; 6 p. 37, 1890.
 Arrhenius. Ztschr. f. phys. Chem. 3 p. 115, 1889; 10 p. 51, 1892.
 Dahem. J. d. phys. (2) 6 p. 134, 1887; 6 p. 397, 1887; 7 p. 391, 1888.
 Fick. Ztschr. f. phys. Chemie. 5 p. 527, 1890.
 Pupin. Der osmotische Druck. Berlin. 1889.

Dieterici. W. A. 45 p. 220, 1892.

Fuchs. Exner's Report. 27 p. 176, 1891.

Poynting. (Osmotic pressure), Phil. Mag. (5) 42 p. 289, 1896.

Mac-Gregor. Phil. Mag. (5) 43 p. 46, 98, 1897.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Трѣніе въ жидкостяхъ.

§ 1. Коэффициенты внутренняго трѣнія. На стр. 406 было дано общее опредѣленіе коэффициента внутренняго трѣнія, развивающагося во всякой средѣ, въ которой различныя части движутся съ неодинаковыми скоростями. Формула (59) стр. 407

$$f = \eta s \frac{dv}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

одинаково относится какъ къ газамъ, такъ и къ жидкостямъ. Здѣсь η коэффициентъ внутренняго трѣнія, s площадь соприкосновенія двухъ соедѣнныхъ слоевъ, v скорость слоя, $\frac{dv}{dx}$ мѣра измѣняемости этой скорости, которая наблюдается, если идти по направлению x , перпендикулярному къ s , наконецъ f сила, замедляющая движеніе одного, ускоряющая движеніе другого слоя. Величина η также называется вязкостью данной жидкости. На стр. 407 было дано опредѣленіе единицы вязкости.

Размѣръ величины η легко получается, если вспомнить, что f есть сила, dv скорость, s площадь и dx длина. Имѣемъ

$$[f] = \frac{ML}{T^2}; [\eta] = L^2; [dv] = \frac{L}{T} \text{ и } [dx] = L.$$

отсюда

$$\frac{ML}{T^2} = [\eta] L^2 \frac{L}{TL},$$

и слѣд.

$$[\eta] = \frac{M}{LT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Вязкость принято выражать двояко, а именно во-первыхъ въ *C. G. S.* единицахъ, въ каковомъ случаѣ мы ее и будемъ обозначать черезъ η ; во вторыхъ, сравниваютъ вязкость различныхъ жидкостей съ вязкостью воды при 0°, которую принимаютъ равной 100. Полученныя такимъ образомъ числа измѣряютъ удѣльную вязкость; мы ее обозначимъ черезъ z . Если вязкость воды при 0° въ *C. G. S.* единицахъ обозначить черезъ η'_0 , то связь между η и z будетъ очевидно

$$z = \frac{\eta}{\eta'_0} 100 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Jaeger развила теорію жидкостей, аналогичную кинетической теории газовъ (стр. 385). Между прочимъ онъ далъ и теорію внутреннего трения въ жидкостяхъ, соответствующую теоріи трения въ газахъ (стр. 407). Онъ находитъ для диаметра частицъ воды $\delta = 70 \cdot 10^{-9}$ см., а для средней длины пути $\lambda = 91 \cdot 10^{-11}$, такъ что $\lambda < \delta$, между тѣмъ, какъ для газовъ $\lambda > \delta$.

§ 2. Коэффициентъ вѣшняго тренія и коэффициентъ скольженія.

Когда жидкость касается неподвижнаго твердаго тѣла и скорость V слоя жидкости, непосредственно прилегающаго къ поверхности твердаго тѣла, и движущагося вдоль этой поверхности, не равна нулю, то между жидкостью и твердымъ тѣломъ появляется трение. Сила f , дѣйствующая въ этомъ случаѣ на разсматриваемый слой жидкости, пропорциональна поверхности s слоя и скорости V , которую можно разсматривать и какъ разность скоростей жидкости и твердаго тѣла. Имѣемъ

$$f = \lambda s V. \quad (4)$$

гдѣ λ называется коэффициентомъ вѣшняго тренія жидкости. Размѣръ этой величины очевидно

$$[\lambda] = \frac{M}{L^2 T} \quad (5)$$

Ее ввелъ впервые Navier (1822). Обыкновенно допускаютъ, что въ большинствѣ случаевъ

$$\lambda = \infty \quad (6)$$

т.е. $V = 0$. Это значитъ, что предѣльный слой жидкости, какъ бы при- ставшій къ поверхности твердаго тѣла, неподвиженъ, что непосредственнаго скольженія жидкости по поверхности твердаго тѣла не существуетъ.

Если λ не безконечно велико, то величину

$$\gamma = \frac{1}{\lambda} \quad (7)$$

называютъ коэффициентомъ скольженія. (2) и (5) даютъ

$$[\gamma] = L \quad (8)$$

Допущеніе $\lambda = \infty$ даетъ $\gamma = 0$; скольженія вовсе не существуетъ.

§ 3. Опредѣленіе коэффициента тренія по способу капиллярныхъ трубокъ. Poiseuille (1842) далъ слѣдующую формулу для объема Q жидкости, протекающей въ течение времени T черезъ капиллярную трубку, внутренний диаметръ которой D и длина L , если жидкость находится подъ давленіемъ P

$$Q = k \frac{PD^4}{L} T \quad (9)$$

гдѣ k множитель пропорціональности, который, какъ оказывается, зависитъ отъ внутренняго тренія η и отъ коэффициента скольженія γ . Математическая теорія движенія жидкости въ капиллярной трубкѣ приводитъ къ формулѣ

$$Q = \frac{\pi P}{8\gamma L} (R^4 + 4\gamma R^3) T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ $R = \frac{1}{2} D$. Допуская, что $\gamma = \infty$, и слѣд. $\gamma = 0$, имѣемъ

$$Q = \frac{\pi P R^4}{8\gamma L} T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

т.е. формулу Poiseuille'a, въ которой слѣд. ($R = \frac{1}{2} D$):

$$k = \frac{\pi}{128\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Пользуясь формулой (11), которая даетъ

$$\eta = \frac{\pi P R^4}{8QL} T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

можно опредѣлить η , измѣряя величины P , R , Q , L и T , и притомъ, чтобы получить η въ $C. G. S$ единицахъ, P въ динахъ на кв. см. поверхности, L и R въ см., Q въ куб. см. и T въ секундахъ.

Наденбашъ показалъ, что при большой скорости истечения необходимо прибавить къ выраженію (13) еще одинъ добавочный членъ:

$$\eta = \frac{\pi P R^4}{8QL} T - \frac{Q\delta}{2^{\frac{10}{3}} \pi g L},$$

гдѣ δ плотность жидкости, g ускореніе силы тяжести.

Для опредѣленія удѣльной вязкости z , см. (3), можно было бы сравнить времена T и T' истечения одинаковыхъ объемовъ испытуемой жидкости (η) и воды (η') черезъ одну и ту же трубку (R и L) и подъ однимъ и тѣмъ же давленіемъ P , ибо (13) даетъ въ этомъ случаѣ

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{T}{T'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Такимъ же путемъ можно опредѣлить отношеніе η' къ η'_0 , а затѣмъ и z по формулѣ (3). Нѣсколько иначе введенные опыты, о которыхъ будетъ сказано ниже, даютъ для воды

$$\eta'_0 = 0,0178 \frac{\text{гр.}}{\text{см. сек.}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Вставляя это число въ (3), находимъ связь между η и z

$$\eta = 0,000178 z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Couette (1890) вывелъ изъ своихъ опытовъ, что для воды коэффициентъ трения не зависитъ отъ материала трубки, и что слѣд. $\lambda = \infty$ и $\gamma = 0$ даже для случая, когда вода не смачиваетъ стѣнокъ трубки (парафинъ). Точно такъ же Warburg (1870) нашелъ, что $\lambda = \infty$ и $\gamma = 0$ для ртути и стекла. Н. Н. Петровъ (1896) полагаетъ, что выводы Couette'a неправильны; онъ находитъ, что изъ опытовъ Couette'a получается напр. для сурфината масла для γ величина, заключающаяся между 0.029 и 0.0012, и во всякомъ случаѣ не равная нулю.

Замѣтимъ, что при выводѣ формулы (13) предполагалось, что скорость жидкой струи при вытекании изъ капиллярной трубки равна нулю, а потому при опытахъ слѣдуетъ брать слабыя давленія вызывающія весьма медленное истечение.

Способъ опредѣленія величинъ γ и ε , которымъ пользуются на практикѣ, будетъ понятенъ изъ описанія прибора, служащаго для этой цѣли. Капиллярная трубка *ab* (рис. 309) оканчивается внизу болѣе широкой трубкой *bc*, а наверху изгибается въ *K*, отъ котораго идетъ дѣйствительно широкая трубка *cd*, съделанная въ *c*. Къ концу *d* прикреплена каучуковая трубка, снабженная зажимомъ. Вся трубка *bd* находится внутри сосуда съ водою, температура которой определяется термометромъ *T*. Открывъ зажимъ, всасываютъ испытуемую жидкость въ трубку *cd* до точки, лежащей нѣсколько выше *c*. Открывъ зажимъ, опредѣляютъ время *T*, течение котораго вся жидкость вытечетъ черезъ капиллярную трубку. Затѣмъ повторяютъ тотъ же опытъ съ другою жидкостью, напр. съ водою, причемъ время вытекания будетъ *T'*. Давленіе *P* въ формулѣ (13) является здѣсь мгновенною переменною, ибо оно въ каждый данный моментъ равно давленію еще не вытекшей столба жидкости. Но такъ какъ для разныхъ жидкостей законъ измѣненія этого давленія одинъ и тотъ же, то и можно пользоваться формулою (13), которая очевидно дастъ

$$\gamma = \frac{TP}{T'P'}.$$

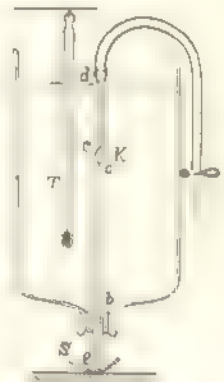
Но если δ и δ' плотности двухъ жидкостей, то $P/P' = \delta/\delta'$ и потому

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{T\delta}{T'\delta'} \dots \dots \dots (17)$$

Если второю жидкостью взята вода, то $\delta' = 1$ и γ' можно взять изъ готовыхъ таблицъ, см. ниже § 5. Жидкости должны быть тщательно профильтрованы, дабы въ капиллярную трубку не могли попасть соринки.

§ 4. Способы Coulomb'a, Helmholtz'a, Margules'a и другихъ для опредѣленія γ . Горизонтальная круглая металлическая пластинка виситъ внутри испытуемой жидкости на проволоцѣ, прикрепленной къ ея центру. Повернувъ пластинку нѣсколько около проволоки, предоставляютъ ее самой себѣ

Рис. 309.



и наблюдают время τ качания (т. е. вращения от одного крайняго положения до слѣдующаго), и логарифмическій декрементъ λ (стр. 138). Если λ_0 значение декремента въ воздухѣ, то теорія приводитъ къ формулѣ

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\pi R^2}{2K} \sqrt{\frac{\pi}{2} \delta \tau} \quad (18)$$

гдѣ R радиусъ пластинки, K ея моментъ инерции, и δ плотность жидкости; отсюда опредѣляется τ (способъ Coulomb'a). Вводя въ эту формулу нѣкоторыя поправки, О. Е. Meyer (1887) получилъ результаты, хорошо согласующеся съ тѣми, которые даетъ методъ капиллярныхъ трубокъ. Koenig (1887) употребляетъ вращающійся шаръ вмѣсто пластинки.

Helmholtz и Piotrowski (1864) наблюдали, наоборотъ, колебания пустого шара, наполненнаго испытуемой жидкостью и привѣшеннаго къ проволоцѣ; шаръ, вращаясь около этой проволоки, совершалъ колебания около своего вертикальнаго диаметра. Теорія даетъ возможность опредѣлить η и γ , см. (7), на основаніи наблюденій времени качания и его логарифмическаго декремента. Весьма замѣчательно, что γ не оказалось равнымъ нулю и слѣд. λ не равнымъ бесконечности, см. (6). Для воды было найдено $\eta = 0,01186 \frac{\text{гр.}}{\text{см. сек.}}$ и $\gamma = 0,23534$ см. Уманъ замѣнилъ шаръ цилиндромъ; онъ нашелъ для ртути $\eta = 0,01577 \frac{\text{гр.}}{\text{см. сек.}}$.

Margules (1881) предложилъ такой способъ: въ жидкость помѣщаютъ вертикальный цилиндръ, радиусъ основанія котораго обозначимъ черезъ r_1 ; его окружаютъ болѣе широкимъ полнымъ тонкостѣннымъ цилиндромъ безъ оснований (труба), пусть его радиусъ r_2 . Наружный цилиндръ вращаютъ съ нѣкоторою угловою скоростью ω и измѣряютъ моментъ M пары силъ, дѣйствующей на внутренний цилиндръ. Тогда

$$M = 4\pi\eta h \quad (19)$$

гдѣ h высота внутренняго цилиндра и

$$c = 2\gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \quad (20)$$

Если нѣтъ скольженія жидкости ($\nu = \infty$ и $\gamma = 0$, стр. 517), то

$$c = \frac{\omega}{r_1^2 - r_2^2} \quad (21)$$

Couette (1890) и Brodmann (1892) опредѣляли этимъ способомъ коэффициентъ тренія η . Нѣкоторымъ видоизмѣненіемъ этого способа представляется способъ Mallock'a.

Jones опредѣляетъ η , основываясь на формулѣ Stokes'a для постоянной скорости v , которую приобретаетъ шарикъ, падающій внутри жидкости:

$$v = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\rho - \rho'}{\eta} \quad (21, a)$$

гдѣ r радиусъ, σ плотность шарика, ρ плотность жидкости. Jones наблюдалъ паденіе шариковъ ртути.

§ 5. Вліяніе температуры и давленія на вязкость жидкостей. Всѣ опыты показываютъ, что η и σ весьма быстро уменьшаются съ повышеніемъ температуры. Приведемъ числа для воды:

t°	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
η	0,0181	0,0133	0,0102	0,0081	0,0066	0,0057	0,0049	0,0042
σ	100	73,3	56,2	44,9	36,7	31,5	26,9	23,5.

Для алкоголя $\sigma_0 = 100$, $\sigma_{70} = 28,7$.

Для ртути (по Koch'у, 1881)

t°	— 21° 4	0°	99°	196° 7	340° 1
η	0,01847	0,01697	0,01223	0,01017	0,009054.

Коэффициентъ η_t можетъ быть выраженъ эмпирической формулой вида

$$\eta_t = \frac{\eta_0}{1 + at + bt^2} \dots \dots \dots (22)$$

гдѣ напр. для воды по опытамъ О. Е. Meyer'a $a = 0,0332$, $b = 0,000244$ и $\eta_0 = 1,775$. Graetz (1888) показалъ, что для однородныхъ жидкостей (не для растворовъ) η_t должно выражаться формулою вида

$$\eta_t = A \frac{t_0 - t}{t - t_1} \dots \dots \dots (23)$$

гдѣ A и t_1 постоянныя числа и t_0 критическая температура (стр. 358) жидкости. Такъ для воды $A = 7,338$, $t_1 = -28,619$. Для жидкой CO_2 найдено

t°	5°	10°	20°	29°
$\eta = 0,000925$		0,000852	0,000712	0,000539.

Внутреннее трение жидкостей при температурахъ, которыя выше ихъ точекъ кипѣнія, изслѣдовали Heydweiller, Thorpe, Rodger, Steel и de Haas. Приведемъ нѣкоторыя изъ чиселъ Heydweiller'a:

Этиловый эфиръ.		Бензолъ.		Толуолъ.		Этилацетатъ.		CCl_4 .	
t°	$10^3 \eta$	t°	$10^3 \eta$	t°	$10^3 \eta$	t°	$10^3 \eta$	t°	$10^3 \eta$
2° 4	2,871	14° 8	7,038	20° 6	5,830	20° 9	4,533	21° 5	9,652
18,4	2,392	30,8	5,522	78,2	3,235	77,7	2,515	99,6	4,056
47,1	1,839	78,4	3,185	100,0	2,721	99,6	2,090		
78,5	1,428	100,5	2,606	131,5	2,133	151,9	1,387		
100,4	1,177	161,4	1,546	182,5	1,477	183,0	1,063		
		185	1,254						

Steel предложилъ эмпирическую формулу

$$\eta = Ce^{-at}.$$

где C и a постоянные числа. Зависимость внутреннего трения различных масел от температуры исследовали Garcanoiff, Koller и Perry.

Приводим некоторые из результатов первого из названных ученых; числа для величины η указаны в $C. G. S.$ единицах:

t	Лимонное масло.	Терпентинное масло.	Гвоздичное масло.	Оливковое масло.	Миндальное масло.	Вазелиновое масло.
20°	0,01264	0,01461	0,13261	0,80800	0,66561	0,91102
50	0,00871	0,00968	0,03729	0,25333	0,21894	0,19521
80'	0,00651	0,00716	0,01553	0,11579	0,100065	0,07301.

Вязкость жидкой CO_2 — наименьшая из наблюдаемых; при 15° она в 14,6 раз меньше вязкости воды. Малую вязкостью обладает и эфир для которого $\eta_{15} = 14,5$ (для воды мы имеем 733).

Наоборот, огромную вязкость обладает глицерин; различные масла и т. под. Так для глицерина:

t	2,8°	8,91	14°,3	20°,3	26°,5
η	42,2	25,2	13,9	7,78	4,94.

Вязкость глицерина при 2,8 в 2500 раз больше вязкости воды.

Для сурьмяного масла $\eta_{15} = 253$, $\eta_{25} = 5,8$, $\eta_{37} = 1,20$.

Влияние давления на вязкость изучали Roentgen (1884), Warburg и Sachs (1884) и Cohen (1882). Оказывается, что с увеличением давления вязкость воды уменьшается, а вязкость концентрированных растворов $NaCl$ и NH_4Cl в воде увеличивается; сильное возрастание вязкости замечается также для терпентинного масла.

§ 6. Внутреннее трение в растворах и смесях. Вязкость растворов иногда больше иногда меньше вязкости воды, и притом с увеличением концентрации иногда замечаются максимума или минимума вязкости. Вязкость растворов $NaCl$, K_2SO_4 , $NaBr$, NaJ , $NaNO_3$, Na_2SO_4 , $BaCl_2$, $CaCl_2$, $MgSO_4$, солей тяжелых металлов и т. д. больше вязкости чистой воды.

Вязкость растворов KCl , KBr , KJ , KNO_3 , $KClO_4$, NH_4Cl , NH_4Br , NH_4J , NH_4NO_3 , $Ba(NO_3)_2$ при низких температурах меньше, при более высоких температурах больше вязкости чистой воды.

Для многих слабых растворов вязкость η выражается формулой Arrhenius'a

$$\eta = A^x \dots \dots \dots (24)$$

где A постоянная, x число грамм-молекул растворенного вещества в литре воды. Так для эфира $A = 1,026$, для сахара $A = 1,046$, для KNO_3 — $A = 0,9664$, для $ZnSO_4$ — $A = 1,3613$, для $CaSO_4$ $A = 1,3533$, для H_2SO_4 — $A = 1,0880$.

Многие исследовали внутреннее трение растворов различных солей. Они находят, что формула Arrhenius'a не применима к крепким растворам. Smoluchowski нашел, что внутреннее трение жидких непроводников электричества, напр. CS_2 , алкоголя и др. увеличивается при растворении в них J , KJ , NH_4NO_3 .

Внутреннее трение амальгамъ изслѣдовать Schweidler.

Linebarger изслѣдовалъ вязкость смѣсей различныхъ жидкостей: бензола, толуола (C_6H_6), нитробензола ($C_6H_5NO_2$), хлороформа, эфира, четыреххлористаго углерода и др. Онъ нашелъ, что вязкость у смѣси вообще меньше той, которая вычисляется по правилу смѣшенія.

ЛИТЕРАТУРА.

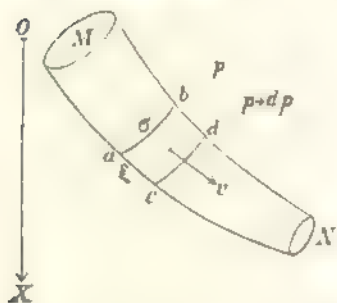
- Poiseuille. C. R. 15 p. 1167, 1842.
 Couette. Ann. ch. et phys. (6) 21 p. 433, 1890; J. d. phys. (2) 9 p. 560, 1890.
 Jurgy. Wien. Sitzber. 99 p. 861, 1890; 100 p. 268, 1891; 101 p. 920, 1892; 102 p. 253, 1893.
 Warburg. Pogg. Ann. 140 p. 367, 1870.
 Coulomb. Mémoires de l'Institut 3 p. 246, an X (1802).
 Navier. Mémoires de l'Institut. 4 p. 431 (1822 r.).
 Helmholtz und Putrouski. Wien. Ber. 50 p. 107, 1865. Helmholtz. Wiss. Abb. I p. 172.
 Umani. Nuov. Cim. (4) 3 p. 151, 1896.
 Margules. Wien. Ber. 83 (2) p. 588, 1881.
 Jones. Phil. Mag. (5) 37 p. 451, 1894.
 A. Hyghwerler. W. A. 55 p. 561, 1895; 59 p. 193, 1896.
 Thorpe and Rodger. Phil. Trans. 185. II A. p. 397, 1895.
 Stiel. Commun. Lab. of phys. Leiden. № 2, 1891.
 De Haas. Commun. Lab. of phys. Leiden № 12, 1894.
 Garvanoff. Wien. Ber. 103, II, a, p. 873, 1894.
 Koller. Wien. Ber. 98, 1890.
 Perry. Phil. Mag. (5) 35, 1893.
 Brodmann. W. A. 45 p. 159, 1891.
 Gracts. W. A. 34 p. 25, 1888.
 Roentgen. W. A. 22 p. 510, 1884.
 Warburg und Sachs. W. A. 22 p. 518, 1884.
 Cohen. W. A. 45 p. 666, 1892.
 Arrhenius. Zeitschr. f. phys. Chem. 1 p. 245, 1887.
 И. Петровъ. Трение жидкостей и машинъ. Извѣстія С.-П. Технол. Инст. 1885 г.—1886 С.-П.; Нижегородскій журн. 1883 № 1, 2, 3, 4; Ж. Ф. Х. О. 16 p. 11, 1884. Извѣстія Имп. Акад. Наукъ. 5, стр. 365, 1896.
 Н. Е. Жуковский. Гидродинамическая теорія трения хорошо смазанныхъ твердыхъ тѣлъ. Ж. Ф. Х. О. 18 p. 209, 1886 г.
 Smoluchowski. Wien. Sitzber. 102 a p. 1146, 1893.
 Hagenbach. Pogg. Ann. 109 p. 385, 1860.
 O. E. Meyer. Wied. Ann. 2 p. 394, 1877.
 Schweidler. Wien. Sitzber. 104 p. 273, 1895.
 Mallock. Proc. R. Soc. 45 p. 126, 1888.
 Moore. Physical Review. III p. 321, 1896.
 Linebarger. Amer. J. of Sc. (4) 2 p. 331, 1896.
 Н. Жуковский. Приборъ для опредѣленія коэффициента вязкости жидкостей. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 4 вып. 1, стр. 25, 1891 г.
 Дальнѣйшая литература: Landolt, Tabellen p. 303, 1894.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Движеніе жидкостей.

§ 1. Установившееся движеніе жидкостей. Если въ данной жидкости происходят какія либо движенія, то каждая ея частица движется по нѣкоторой линіи, причемъ вообще говоря, ея скорость будетъ непрерывно мѣняться. Движеніе называется установившимся или стационарнымъ, когда скорость въ произвольной данной точкѣ пространства постоянна по величинѣ и по направленію, она принадлежитъ къ послѣдовательнымъ моментамъ времени различнымъ частицамъ жидкости, непрерывно притекающимъ, одна за другой, къ этой точкѣ, и продолжающимъ движеніе по одной и той же кривой, проходящей черезъ эту точку. Такую кривую, неизмѣнную пока сохраняется стационарность движенія, назовемъ линіей тока. Соответ-

Рис. 310.



ственно назовемъ трубкою тока струю, поверхность которой есть геометрическое мѣсто линій тока, проходящихъ черезъ точки какой либо замкнутой линіи.

Пусть MN , рис. 310, весьма тонкая трубка тока, изъ которой вырѣжемъ слой $abcd$, основание котораго a , высота $ac = \xi$ и скорость v . Предположимъ, что на жидкость дѣйствуетъ во-первыхъ сила тяжести по вертикальному направленію OX , причемъ x координата разсматриваемаго малаго количества жидкости, и во-вторыхъ давленіе, которое для основанія ab обозначимъ черезъ p , а для cd черезъ $p + dp$. Когда жидкость $abcd$ перемѣстится на величину ξ , то работа силы тяжести будетъ равна $\sigma \xi \delta g dx$, гдѣ δ плотность жидкости; работа давленія равна $-\sigma dp \cdot \xi$; вся произведенная работа должна равняться приращенію живой силы $\frac{1}{2} \sigma \xi \delta dv^2$.

Такимъ образомъ имѣемъ при отсутствіи внутренняго тренія:

$$\sigma \xi \delta g dx - \sigma \xi dp = \frac{1}{2} \sigma \xi \delta dv^2.$$

Раздѣливъ всѣ члены на $\sigma \xi \delta$, получаемъ

$$d \left\{ gx - \frac{p}{\delta} - \frac{1}{2} v^2 \right\} = 0$$

Отсюда слѣдуетъ, что величина въ скобкахъ остается постоянною во всѣхъ сѣченіяхъ данной трубки теченія, т. е. что

$$\frac{1}{2} v^2 - gx + \frac{p}{\delta} = \text{Const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Для измѣренія скорости теченія воды въ рѣкахъ и каналахъ можетъ служить приборъ Darcy, изображенный на рис. 311. Онъ состоитъ изъ

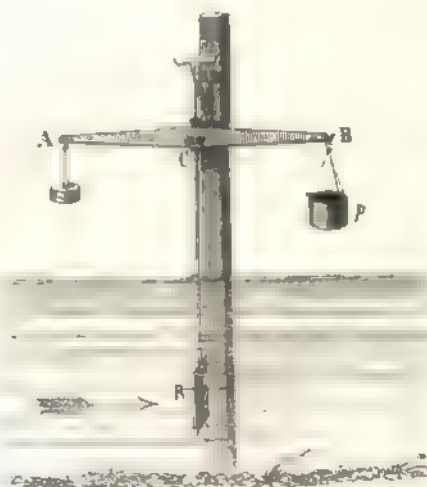
двух вертикальных трубок D и C , соединенных наверху между собою и съ добавочною трубою, при помощи которой можно изъ нихъ немного высосать воздухъ. Трубки D и C оканчиваются въ a и a' , причемъ отверстие a направлено противъ течения; отверстие же a' направлено внизъ, т.-е. перпендикулярно къ течению.

Рис. 311.



Вследствие этого вода будетъ стоять въ D выше, чѣмъ въ C . Разность h высотъ, которую легко измѣрить, если высасываемъ воздуха изъ шпиднятъ, какъ изображено на рисункѣ, воду въ обѣихъ трубкахъ, служитъ мѣрою скорости v течения воды. можно доказать, что $v^2 = kh$, гдѣ k постоянный множитель.

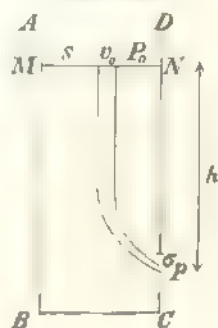
Рис. 312



Въ приборѣ Poletti (рис. 312) измѣряется скорость v течения воды тѣмъ грузомъ p , который уравниваетъ давленіе P воды на пластинку H , это давленіе пропорціонально v^2 .

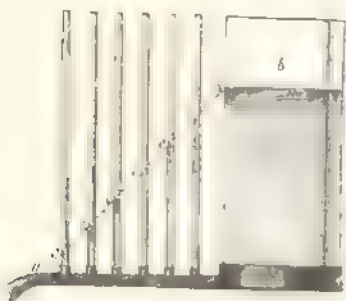
§ 2. Истеченіе жидкости изъ небольшого отверстія. Сосудъ $ABCD$ (рис. 313) наполненъ до MN жидкостью; требуется опредѣлить скорость V истеченія изъ отверстія, находящагося въ боковой стѣнѣ или въ днѣ сосуда. Скорость V будетъ уменьшаться по мѣрѣ уменьшенія высоты уровня жидкости въ сосудѣ. Чтобы опредѣлить V для данной высоты уровня MN , предположимъ, что мы какимъ либо способомъ (притокомъ) удерживаемъ этотъ уровень неизмѣннымъ, такъ что въ сосудѣ устанавливается стационарное движеніе. Тогда можемъ приложить формулу (1) къ трубкѣ тока начинающейся у поверхности жидкости.

Рис. 313.



ленія оказывается линейною функціей разстоянія отъ конца трубы; боковыя вертикальныя открытыя трубки, въ которыхъ жидкость свободно можетъ подниматься, даютъ возможность обнаружить это явленіе, какъ видно изъ рис. 316.

Рис. 316.



Если разность давленій въ началѣ и въ концѣ трубы равна P и длина трубы L , то величина $J = \frac{P}{L}$, т.-е. уменьшеніе напора на единицу длины называется паденіемъ давленія. Скорость V теченія, понятно, во всѣхъ частяхъ трубы одна и та же, зависящая отъ величины того полного сопротивленія D , которое жидкость встрѣчаетъ внутри трубы.

Для толстыхъ трубъ невозможно теоретически вычислить величину скорости V , вѣдствие крайней сложности задачи. Для крутыхъ трубъ были предложены эмпирическія формулы, а именно

$$\left. \begin{aligned} D &= aV + bV^2 \\ D &= aV^{\frac{1}{2}} + bV^2 \\ D &= cV^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

въ которыхъ D диаметръ трубы, a , b , c и k различныя постоянныя, зависящія впрочемъ по мнѣнію нѣкоторыхъ ученыхъ, отъ диаметра D . Мерцингъ нашелъ, что для воды и керосина первая изъ формулъ согласна съ результатами наблюдений, и что для обычныхъ жидкостей коэффициентъ a увеличивается, b уменьшается съ возрастаніемъ диаметра трубки.

Для болѣе тонкихъ трубокъ скорость V выражается формулою, отличающеюся отъ (4) прибавкою нѣкоторой величины R къ знаменателю. Такъ напр. для случая, къ которому относится формула (5), имѣемъ

$$V = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{k(1 + R)}} \dots \dots \dots (10)$$

Для случая истеченія жидкости изъ открытаго сосуда по горизонтальной трубкѣ формула (6) Torricelli принимаетъ видъ

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + R}} \dots \dots \dots (11)$$

Для круглой трубки

$$R = k \frac{L}{D} \dots \dots \dots (12)$$

Величина k по Weissbach'у равна

$$k = 0,01439 + \frac{0,01716}{\sqrt{V}} \dots \dots \dots (13)$$

т.-е. сама зависит от скорости V . Позднѣйшія изслѣдованія Hamilton Smith'a (1884) привели къ еще болѣе сложной формулѣ.

Для капиллярныхъ трубокъ вполне рѣшается вопросъ о скорости теченія жидкостей. Первое тщательное опытное изслѣдованіе принадлежит Poiseuille'у, который вывелъ изъ своихъ наблюденій, что объемъ Q жидкости, протекающей во время T черезъ капиллярную трубку, пропорционаленъ давленію P , а не \sqrt{P} , какъ получается для толстыхъ трубъ, см. (10); далѣе объемъ Q обратно пропорционаленъ длинѣ L трубы, пропорционаленъ четвертой степени діаметра D трубы и, конечно, пропорционаленъ времени T . Такимъ образомъ получается формула Poiseuille'a, которую мы уже привели на стр. 517, см. (9).

$$Q = k \frac{P D^4}{L} T \dots \dots \dots (14)$$

На стр. 518 была приведена болѣе точная теоретическая формула

$$Q = \frac{\pi^2}{8 \eta L} \{ R^4 - 4 \gamma R^2 \} T \dots \dots \dots (15)$$

въ которой η и γ коэффициенты тренія и скольженія. При $\gamma = 0$ получается формула Poiseuille'a. Множитель k въ (14), обратно пропорциональный η , быстро увеличивается, когда температура повышается, такъ какъ η при этомъ быстро уменьшается, какъ мы видели въ § 3 предыдущей главы (стр. 521). Самъ Poiseuille вывелъ изъ своихъ опытовъ формулу для воды

$$k = k_0 (1 + 0.0368t + 0.000221t^2) \dots \dots \dots (16)$$

§ 6. Волны и вихри. Ученіе о движеніи жидкостей, гидродинамика, составляетъ особый отдѣлъ механики, который не можетъ войти въ нашъ курсъ. Ограничиваемся указаніемъ на нѣкоторые явленія, которыя представляются особенно важными.

А. Волны. Колебательное движеніе поверхностныхъ частицъ жидкости вызываетъ всѣмъ знакомое явленіе распространяющихся волнъ, которое особенно тщательно было изучено братьями Е. и W. Weber (1825). Частицы, лежащія у самой поверхности движутся, смотря по тому, какими причинами было вызвано волненіе, по вертикальнымъ прямымъ, или по замкнутымъ кривымъ, расположеннымъ въ вертикальныхъ плоскостяхъ. Въ движеніи участвуютъ частицы, лежащія на глубинѣ, превышающей до 350-ти разъ высоту волны. Скорость V распространения волнъ, т.-е. ихъ кажущагося поступательнаго движенія, зависитъ отъ глубины h жидкаго слоя, на поверхности котораго образуются волны, отъ длинны волны λ , которую здѣсь можно назвать и шириною волны, наконецъ отъ плотности жидкости δ и отъ поверхностнаго натяженія α . Наиболее общая формула для V имѣетъ видъ

$$V^2 = g \left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{\delta\lambda} \right) e^{\frac{\delta}{\delta_0} - \frac{\alpha}{\alpha_0}} \dots \dots \dots (17)$$

гдѣ g ускореніе силы тяжести и

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda} \dots \dots \dots (18)$$

Въ *C. G. S.* единицахъ $g = 981$; для воды $\delta = 1$. Дать мы имѣемъ для нея на стр. 192 значения α при разныхъ температурахъ. Примемъ $\alpha = 7.4 \frac{\text{мм}}{\text{атм.}}$. Правила перехода отъ одной системы единицъ къ другой (стр. 227) даютъ $\alpha = 0.074$ *C. G. S.* единицы.

Раземотримъ интересные частные случаи.

I. Глубина h весьма велика. Тогда k весьма велико и потому

$$V^2 = \frac{g}{2\pi} + \frac{2\pi g}{k} \dots \dots \dots (19)$$

Для воды $\delta = 1$ и

$$V^2 = g \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{2\pi}{k} \right) \dots \dots \dots (20)$$

Величина V имѣть минимумъ при $k = 2\pi \sqrt{\alpha} = 2\pi \sqrt{0.074} = 1.7$ см.; онъ равенъ $23 \frac{\text{см}}{\text{сек.}}$. Более короткыя и болѣе длинныя волны движутся быстрее. Опыты Matthiessen'a (1877) и Ahrendt'a (1888) вполне подтвердили эту формулу.

Для весьма короткихъ волнъ имѣемъ

$$V = \sqrt{\frac{2\pi g}{k}} \dots \dots \dots (21)$$

т.-е. $\lambda V^2 = \text{Const.}$

Если поверхностное натяженіе α жидкости весьма мало, то (20) даетъ

$$V = \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \dots \dots \dots (22)$$

т.-е. $\frac{V^2}{\lambda} = \text{Const.}$

II. Глубина h не велика. Для волнъ, длина λ которыхъ велика сравнительно съ глубиною h , имѣемъ k весьма малое. Тогда послѣдній множитель въ (17) равенъ $k = \frac{2\pi h}{\lambda}$, и эта формула даетъ (при большомъ λ)

$$V = \sqrt{gh} \dots \dots \dots (23)$$

Движеніе воздуха (вѣтеръ) у поверхности жидкости можетъ значительно вліять на форму и скорость волнъ.

В. Вихри. Helmholtz'a принадлежатъ учене о вихревыхъ движенияхъ въ идеальной жидкости, вязкость которой равна нулю. Онъ доказалъ слѣдующій рядъ теоремъ:

Вращательныя или вихревыя движенія не могутъ образоваться или уничтожиться въ идеальной жидкости. Разъ они существуютъ они должны сохраняться вѣчно.

Частицы, участвующія во вращательномъ движ. или, т.-е. когда вихревое движеніе переходитъ съ одного мѣста жидкости къ другому, то при этомъ перемѣщаются и самыя частицы, участвующія въ этомъ движеніи.

Геометрическое мѣсто осей вращения частицъ даетъ линию, называемую вихревою линіей; всѣ частицы, лежащія на вихревой линіи постоянно на ней остаются.

Если черезъ всѣ точки контура малой площади провести вихревыя линіи, то получается вихревая нить. Такая нить не можетъ имѣть свободнаго конца внутри жидкости, она должна или оканчиваться у поверхности жидкости, или быть замкнутою. Въ послѣднемъ случаѣ имѣемъ вихревое кольцо. Иллюстраціи могутъ служить всѣмъ извѣстныя кольца изъ табачнаго дыма.

Вихревая нить не можетъ быть перерѣзана: двѣ нити не могутъ пересѣчься, а потому если въ нити, разъ она существуетъ, не можетъ раскрыться.

Во всякой вихревой нити произведение угловой скорости вращения на площадь поперечнаго сѣченія нити есть величина постоянная вдоль всей нити, ее можно назвать вихревою силою нити.

Вихревая нить дѣйствуетъ на частицу вѣншей для нея жидкости, заставляя ее двигаться со скоростью, которая по величинѣ и по направленію равна силѣ, съ которой по закону Laplace'a дѣйствуетъ электрическій токъ, проходящій вдоль нити, и обладающій напряженіемъ, равнымъ вихревой силѣ нити, на магнитный полюсъ, обладающій единицей напряженія, и находящійся на мѣстѣ разсматриваемой частицы жидкости.

Вихревыя линіи дѣйствуютъ другъ на друга, вызывая разнаго рода попутательныя или вращательныя пѣ движенія. Вихревое кольцо имѣетъ равномерное попутательное движеніе по направленію движенія жидкости внутри кольца.

Въ идеальной жидкости, обладающей вязкостью, возможно образованіе и исчезновеніе вихревыхъ движеній.

Основное снотетро гнхрей (въ идеальной жидкости), пѣ поупнчто- лдземоств, прнвео W. Thomson'a (Lord Kelvin) къ его знаменитой теоріи вихревыхъ атомовъ, во которой атомы сѣ вѣхри, сѣцствуююще въ нѣкоторой вемпной средѣ, обладающей свойствами идеальной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА.

- Torricelli*. Opera geometrica, часть 2. Флоренція. 1643.
Reynolds. Hydrodynamica. Argentorati (Страсбургъ), 1738.
Euler. N. Comm. Ac. Petrop. (1) 14 p. 358, 1759.
Lagrange. Méc. analyt. 3 éd., 2 p. 250.
Bayer. Crelle's J. f. Baukunst. 25; C. R. 26, 1848.
Isarn. J. de phys. (1) 4 p. 167, 1875.
Меркуль. О движеніи жидкостей въ трубахъ. Слб. 1889. W. A. 39 p. 312, 1890.
Lullin. Arch. des sc. phys. et natur. (4) 2 p. 201, 1896.
Hamilton Smith. Dingl. Polyt. J. 252 p. 89, 1884.
Foucault. Mm. des savants étrangers. 9. 1846. C. R. 15, 1-42.
E. H. Weber and W. Weber. Wellenlehre. Leipzig. 1825.
L. Matthiessen. W. A. 32 p. 626, 1887, 35 p. 118, 1889.

Ahrendt. Exner's Report. d. Phys. 24 p. 318, 1888.

H. Helmholtz. Crelle's J. 55 p. 25, 1858; Wiss. Abhandl. I p. 101.

W. Thomson. Trans. R. Soc. Edinb. 25 p. 217, 1867.

Н. Е. Жуковский. Реакція вытекающей и втекающей воды. Ж. Ф. Х. О. 14 стр. 470, 1892.

Д. К. Бобылевъ. Давленіе потока на двѣ плоскія стѣнки (клинъ). Ж. Ф. Х. О. 13 стр. 63, 1881.

Н. Е. Жуковский. Движеніе твердаго тѣла, имѣющаго полости, наполненныя однородной капельной жидкостью. Ж. Ф. Х. О. 17 стр. 81, 231, 1885.

И. В. Мещерскій. Давленіе на клинъ въ потокъ неограниченной ширины двухъ измѣреній. Ж. Ф. Х. О. 18 стр. 327, 1886.

Kirchhoff. Theorie freier Flüssigkeit-strahlen. Crelle's J. 70, 1869.

Rayleigh. Resistance of fluids. Phil. Mag. (5) 2 p. 430, 1876.

В. Л. Розенбергъ. Нѣсколько опытовъ вихревыхъ движеній. Ж. Ф. Х. О. 21 стр. 21, 1889.

Н. Е. Жуковский. Работы по гидродинамикѣ. Ж. Ф. Х. О. 23 стр. 89, 1891.

Н. Цюлковскій. Давленіе жидкости на равноѣрно движущуюся плоскость. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 4, вып. 2, стр. 13, 1891.

Д. Горичевъ. Движеніе твердаго тѣла въ жидкости. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 5, вып. 2, стр. 59, 1893.

С Чаплыгинъ. Движеніе твердаго тѣла въ жидкости. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 6, вып. 2, стр. 20, 1894.

В. А. Степановъ. Движеніе твердаго тѣла въ жидкости. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 7, вып. 2, стр. 10, 1895.

А. Липуновъ. Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости, Сиб. 1884.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

Коллоиды.

§ 1. Коллоиды. Странамъ первый указаль на существованіе особаго рода состоянія вещества, отличающагося отъ состояній жидкаго и твердаго, и названнаго имъ коллоидальнымъ. Онъ противопоставляетъ коллоиды и кристаллоиды, «два различныхъ міра вещества» по его выраженію. Основное свойство коллоидовъ заключается въ ихъ, неспособности кристаллизоваться, между тѣмъ какъ кристаллоиды легко кристаллизуются. Такъ какъ это однако не единственная отличительная черта, и одно и то же (по химическому составу) тѣло, напр. даже серебро, можетъ иногда обладать свойствами кристаллоида, а иногда — коллоида, то приходится говорить о «коллоидальномъ состояніи» того или другого вещества. Между прочимъ растворы коллоидовъ весьма часто имѣють студенистую консистенцію, представляя именно нечто среднее между жидкими и твердыми тѣлами.

Къ коллоидамъ относится бѣлокъ, альбуминъ, крахмалъ, декстринъ, желатина, клей, карамель, глицеринъ, гумми-арабикъ, агаръ-агаръ (японская растительная желатина), таининъ, кремневая кислота, окись железа, гидраты кремнезема и алюминія, вольфрамовая кислота (H_2WO_4) и др.

Способность свертываться при повышении температуры или при соприкосновении съ некоторыми веществами есть также признак коллоидальнаго состоянія.

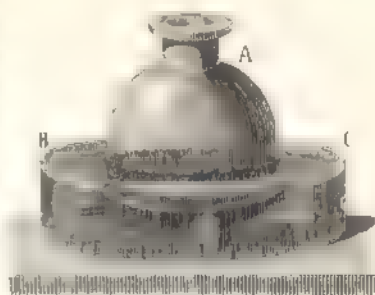
Carey Lea открылъ особое состояніе серебра, которое онъ считалъ за коллоидальное; Barus и Schneider, опаривая мѣтне Carey Lea полагають, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ серебромъ, распределеннымъ въ жидкости въ состояніи крайняго измельченія.

§ 2. Диффузія и осмосъ коллоидовъ. Діализъ. Въ § 1 главы VII стр. 506 уже было указано, что альбуминъ и карамель обладаютъ весьма малою способностью диффундировать изъ раствора въ соприкасающуюся съ нимъ чистую воду. Оказывается, что въ этомъ заключается одинъ изъ главныхъ признаковъ коллоидальнаго состоянія: всѣ коллоиды весьма медленно диффундируютъ не только непосредственно, но и черезъ коллоидальныя перегородки, каковы бумага, пергаментъ, животный пузырь и т. д.

Наоборотъ, коллоиды весьма легко пропускаютъ черезъ себя кристаллоиды. Если налить теплый растворъ желатины и мѣднаго купороса въ высокій стаканъ и дать ему охладиться, т.-е. принять состояніе довольно кружкаго студня, и затѣмъ надъ нимъ помѣстить такой же студень, но безъ купороса, то синія окраска нижней части мало-по-малу распространится вверхъ. То же самое наблюдается, если твердые кристаллы помѣстить внутри затвердѣвшаго раствора желатины.

На малой способности коллоидовъ къ осмосу основанъ особый способъ отдѣленія кристаллоидовъ отъ коллоидовъ изъ раствора, содержащаго и тѣ, и другія вещества. Такой способъ называется діализомъ, а приборъ «діализаторомъ». Онъ изображенъ на рис. 317. Сосудъ *BC* содержитъ чистую воду; сосудъ *A*, опирающійся на нѣсколько деревяшекъ, и содержащій жидкость, которую желаютъ подвергнуть діализу, обтянутъ снизу, вмѣсто двѣхъ листовъ непроклеенной бумаги, которая на короткое время была погружена въ серную кислоту. Если такую бумагу намочить, то она вытягивается и дѣлается полупрозрачной, иногда ее покрываютъ еще слоемъ бѣлка, который нагрѣваніемъ заставляютъ свернуться. Черезъ такую бумагу быстро диффундируютъ кристаллоиды, между тѣмъ какъ коллоиды остаются въ растворѣ.

Рис. 317.



Осмотическое давленіе (стр. 510) растворенныхъ коллоидовъ весьма незначительное, какъ показали опыты Pfeffer'a (1877) съ полупроницаемой перегородкой изъ желѣзисто-синеродистой мѣди (стр. 511). Такъ осмотическое давленіе раствора гумми-арабика въ 10 разъ меньше давленія раствора сахара при одинаковомъ процентномъ содержаніи того и другого. По формулѣ $\pi = 0.0815T$, см. (8) стр. 514, можно найти объемъ v растворенной граммы-молекулы коллоида, а слѣд. и его молекулярный вѣсъ. Раствору 24.67 гр. H_2WO_4 въ литрѣ воды даетъ при 17° давленіе $\pi = 25.2$ см.

ртутнаго столба; отсюда легко подучается молекулярный вѣсъ 1700, что указываетъ на составъ частицы (H_2WO_4).

Согласно съ тѣмъ, что было сказано въ концѣ § 3 главы VII (стр. 512) оказывается по опытамъ Тамманна (1887), что упругость пара раствора коллоида мало отличается отъ упругости пара чистой воды. и по опытамъ Сабаньева и Александрова (1892), что растворенные коллоиды весьма мало понижаютъ точку замерзання воды.

Измѣренія осмотическаго давленія даютъ для многихъ коллоидовъ, какъ упомянуто, весьма большія числа молекулярнаго вѣса; они превышаютъ 30.000 для крахмала, кремневой кислоты, окиси желѣза и др. Такие коллоиды Сабаньевъ называетъ высшими или типичными. Крайняя сложность ихъ частицъ имѣетъ послѣдствіемъ легкую измѣняемость ихъ свойствъ, вѣроятно вызываемую перемѣною въ строеніи частицы. Если охладить растворъ типичнаго коллоида до затвердѣванія, и затѣмъ снова нагрѣть, то онъ переходитъ въ нерастворимое состояніе и осадается изъ раствора, между тѣмъ какъ коллоиды съ меньшимъ молекулярнымъ вѣсомъ при нагрѣваніи затвердѣвшаго раствора вновь даютъ прозрачный растворъ (Любавицъ, 1890).

Де-Метцъ опредѣляетъ коэффициентъ сжатія нѣкоторыхъ коллоидовъ, см. стр. 450. Для 10^6 онъ нашелъ числа:

	δ	$10^6\delta$
Растворъ гумми-арабика въ водѣ	1.041	44.59
Желатинированный клей	1.005	48.49
Растворъ канадскаго бальзама въ водѣ	0.950	57.21
Растворъ метафосфорной кислоты въ водѣ . .	1.545	19.663.

Здѣсь δ плотность вещества.

ЛИТЕРАТУРА.

- Graham*, Ann. de chim. et phys. (3) 65, 1862; Lieb. Ann. 121 p. 1, 1862.
Hefner, Osmotische Untersuchungen, Leipzig, 1877.
Сабаньевъ и Александровъ, Ж. Ф. Х. О. 23, Отд. Хим. стр. 7, 1891.
Тамманн, Mem. de l'Acad. de St. Petersburg. 35 № 9, 1887.
Любавицъ, Chem. Zentralbl. 1 p. 515, 1890.
De-Metz, W. A. 41 p. 663, 1890.
Barus und Schneider, Ztschr. phys. Chem. 8 p. 278, 1891.
Barus, Sill. Journ. 48 p. 451, 1894.
Caray Lea, Ztschr. für anorgan. Chemie 7 p. 341; Sill. Journ. 48 p. 343, 1894.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

УЧЕНИЕ О ТВЕРДЫХЪ ТѢЛАХЪ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Вещество въ твердомъ состояніи

§ 1. Характеристика твердаго состоянія вещества. Тѣла твердыя отличаются отъ жидкихъ прежде всего тѣмъ, что они обладаютъ опредѣленною формою, которая, вообще говоря, можетъ быть измѣнена только подъ влияніемъ внѣшнихъ, дѣйствующихъ на тѣло силъ. Жидкія тѣла, какъ мы видѣли, не обладаютъ опредѣленною формою, сохраняя при данныхъ условіяхъ только неизмѣнный, присущій имъ объемъ. Это показываетъ, что даннымъ условіямъ соответствуетъ опредѣленное среднее разстояніе между частицами жидкости, измѣненіе (уменьшеніе) котораго требуетъ водѣйствія сравнительно весьма большихъ внѣшнихъ силъ. Измѣненіе же взаимнаго расположенія частицъ можетъ происходить въ неограниченномъ размѣрѣ подъ влияніемъ весьма малыхъ внѣшнихъ силъ. Чѣмъ больше внутреннее треніе или вязкость жидкости, тѣмъ труднѣе происходитъ внутреннее перерасположеніе частицъ. Жидкости съ очень большимъ внутреннимъ треніемъ составляютъ какъ бы переходъ къ тѣламъ твердымъ, въ которыхъ не только среднее разстояніе, но и относительное расположеніе частицъ вообще не можетъ подвергаться непрерывно возрастающимъ измѣненіямъ подъ влияніемъ малыхъ внѣшнихъ силъ. Впрочемъ существуютъ твердыя тѣла, въ которыхъ замѣтенъ, какъ бы остатокъ свойства жидкости, обладающей опредѣленною, хотя и весьма большою вязкостью. Не говори о томъ, что подъ влияніемъ огромныхъ внѣшнихъ силъ большинство, а можетъ быть и всѣ твердыя тѣла обнаруживаютъ, какъ мы увидимъ, свойство текучести, оказывается, что въ пѣкоторыхъ тѣлахъ непрерывное, хотя и крайне медленное измѣненіе формы вызывается продолжительнымъ дѣй-

ствиемъ даже весьма небольшихъ силъ. Въ видѣ примѣра можно указать на то, что стеклынная палочка, подпертая въ горизонтальномъ положеніи около своихъ концовъ, претерпѣваетъ постоянное измѣненіе формы, мало-по-малу искривляясь подѣ влияніемъ сравнительно ничтожной силы, а именно своего же вѣса.

Внѣшнія силы вызываютъ опредѣленные перемѣщенія частицъ и слѣд. измѣненія формы твердаго тѣла, вполне или отчасти исчезающія вмѣстѣ съ этими силами. Относящіяся сюда явленія упругости мы рассмотримъ въ особой главѣ.

Мы допускаемъ, что какъ въ газообразныхъ и жидкихъ, такъ и въ твердыхъ тѣлахъ частицы находятся не въ покоѣ, но въ состояніи весьма быстраго и сложнаго движенія, причемъ однако каждая частица не удаляется изъ нѣкоторой малой части пространства, расположенной вокругъ ея средняго положенія. Впрочемъ существуютъ причины допустить и для твердыхъ тѣлъ возможность нѣкоторыхъ, хотя и весьма медленныхъ измѣненій средняго положенія частицъ, даже безъ вліянія внѣшнихъ силъ. Дѣло въ томъ, что расположеніе частицъ твердаго тѣла можетъ быть весьма различное и соотвѣтственно этому бываетъ различна и т. наз. «структура тѣла, которую можно назвать физическою, для отличія отъ структуры химической, опредѣляемой расположеніемъ атомовъ въ химической молекулѣ. У жидкостей ничего подобнаго физической структурѣ не существуетъ; ихъ свойства вполне опредѣляются химическимъ составомъ и физическими условиями. Свойства же твердыхъ тѣлъ, кромѣ того, зависятъ еще отъ спеціальнаго въ каждомъ данномъ случаѣ распределенія частицъ, т. е. отъ ихъ структуры.

Существуютъ случаи, когда безъ замѣтнаго дѣйствія внѣшнихъ силъ тѣ или другія свойства твердыхъ тѣлъ мало-по-малу измѣняются, что и можетъ быть объяснено только постепеннымъ, хотя и очень медленнымъ измѣненіемъ структуры, а это въ свою очередь указываетъ на перераспределеніе частицъ, измѣнившихъ свои средняго положенія. Такому измѣненію структуры способствуютъ внѣшнія причины, хотя бы временно увеличивающія удобоподвижность частицъ, каковы напр. сотрясенія. Въ видѣ примѣра можно указать на постепенное измѣненіе структуры осей желѣзнодорожныхъ вагоновъ, которая изъ волокнистой переходитъ въ болѣе хрупкую кристаллическую.

Внѣшнія силы, стремящіяся измѣнить распределеніе частицъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и форму тѣла, встрѣчаютъ сопротивленіе, причина котораго кроется въ особаго рода силахъ, препятствующихъ всякому измѣненію разстоянія между частицами. Эти силы, о которыхъ мы въ предыдущихъ отдѣлахъ упоминали неоднократно, называются молекулярными или междучастичными или также силами сѣяленія. Онѣ существуютъ и при нормальномъ распределеніи частицъ, мѣшая тѣлу распасться на тѣ частицы, изъ которыхъ оно состоитъ; но главнымъ образомъ онѣ обнаруживаются при всякомъ измѣненіи расположенія частицъ, которому онѣ препятствуютъ. Въ чемъ заключается сущность силъ сѣяленія, какъ слѣдуетъ понимать ихъ происхожденіе и, главное, по какому закону происходитъ ихъ дѣйствіе — это

вопросы, на которые современная наука не может дать удовлетворительнаго отвѣта. Во всякомъ случаѣ и въ твердыхъ тѣлахъ эти силы дѣйствуютъ лишь на весьма малыхъ разстояніяхъ. Поэтому части сломавшаго твердаго тѣла, при сложеніи и даже сильномъ сдавливаніи, вообще говоря, вновь не срашиваются. Такое сращиваніе происходитъ однако при весьма огромныхъ давленіяхъ, когда достаточное сближеніе частей вызываетъ полное развитіе молекулярныхъ силъ между частицами.

Частицы твердыхъ тѣлъ, находясь въ движеніи, непрерывно сталкиваются между собою и притомъ вѣроятнѣе еще чаще частицы жидкостей. «Кинетическая теорія твердыхъ тѣлъ» находится, однако, пока еще въ зародкѣхъ. Поверхностныя частицы твердыхъ тѣлъ, какъ и въ жидкостяхъ, но несравненно рѣже, могутъ при исключительно благоприятныхъ условіяхъ, вылетѣть изъ массы тѣла, иначе говоря, твердое тѣло можетъ непосредственно испаряться. Возможно, что такое испареніе постоянно происходитъ на поверхности всѣхъ твердыхъ тѣлъ, но въ столь незначительной степени, что убывъ массы даже въ большой промежутокъ времени не можетъ быть замѣченъ. Бываютъ однако случаи, когда это испареніе дѣлается замѣтнымъ, хотя бы для обонянія.

Запасъ энергіи, заключающейся въ твердомъ тѣлѣ, состоитъ изъ нѣсколькихъ частей: кинетическая энергія движенія частицъ, интрамолекулярная энергія движенія атомовъ и потенциальная энергія расположенія частицъ.

Нѣкоторыми особыми свойствами обладаютъ тѣла сыпучія, состоящи изъ большого числа малыхъ твердыхъ частицъ, не связанныхъ между собою, если сыпучее вещество вродѣ сѣна. Форма даннаго количества сыпучаго вещества сравнительно легко мѣняется подѣ вліяніемъ внѣшнихъ силъ. О. О. Петрушевскій подробно изслѣдовалъ правильныя формы, которыя принимаютъ сыпучія тѣла въ зависимости отъ очертанія пластинокъ, на которыхъ они помещаются. Отчасти относится сюда же изслѣдованіе Н. Е. Жуковскаго о вліяніи давленія на насыщенные водою пески.

§ 2. Кристаллическое и аморфное состоянія вещества ¹⁾. Твердое вещество обладаетъ способностью принимать, при нѣкоторыхъ условіяхъ, форму опредѣленныхъ многогранниковъ въ этомъ случаѣ тѣла называются кристаллами. Каждый кристаллъ, ограниченный плоскостями, представляетъ собою отдѣльный индивидуумъ, цѣльность котораго обусловливается наличиемъ всѣхъ плоскостей, реберъ и многогранныхъ угловъ. Мы уже видѣли (стр. 532), что коллоиды не обладаютъ способностью кристаллизоваться; что касается жидкостей, то до недавняго времени не существовало представленія о «жидкихъ кристаллахъ», ибо жидкости, вообще не обладающія опредѣленною формою, конечно и нельзя было представить себѣ въ видѣ кристалловъ. Однако въ 1890 г. О. Lehmann ввелъ понятіе о капельножидкихъ кристаллахъ, доказавъ, что при опредѣленныхъ условіяхъ маленькія капли нѣкоторыхъ жидкостей могутъ обладать свойствами, которыя, помимо формы, считаются также характерными именно для кри-

¹⁾ Статьи о кристаллахъ имѣлъ любезность просмотрѣть проф. С. О. Глинка.

сталлического состояния вещества. Эти весьма интересные наблюдения требуютъ, однако, дальнейшихъ исследований и проверки.

Вещество можетъ принимать кристаллическую форму при переходѣ изъ жидкаго или газообразнаго состоянія въ твердое; въ первомъ случаѣ оно можетъ быть или растворено въ другой жидкости, или находиться въ расплавленномъ состояніи. Выдѣленіе кристалла изъ жидкости вообще всего происходитъ при пониженіи температуры, или при испареніи жидкости, но и при химическомъ и въ электролитическомъ выдѣленіи вещества, оно также иногда получается непосредственно въ кристаллическомъ состояніи. Кристаллы способны расти, т.-е. увеличиваться въ объемѣ, сохраняя форму опредѣленнаго многогранника, самое образование ихъ происходитъ путемъ постепеннаго роста первоначально образовавшагося какъ бы зародыша кристалла, на поверхность котораго осаждается изъ окружающей среды растворенное вещество. Кристаллическому состоянію противопоставляютъ аморфное, при которомъ вещество, даже въ мельчайшихъ доступныхъ наблюденію частяхъ не обнаруживаетъ «кристаллической» структуры.

Выдѣленіе кристалловъ изъ растворовъ иногда сопровождается появленіемъ свѣта, который можетъ быть, является замѣтнымъ признакомъ электрическихъ явленій, происходящихъ во время кристаллизаціи.

§ 3. Системы кристалловъ. Формы кристалловъ весьма разнообразны; но во всѣхъ случаяхъ они представляются выпуклыми многогранниками. Числа F граней, K ребръ и E угловъ связаны известнымъ соотношеніемъ $F + E = K + 2$. Особая наука, кристаллографія, играющая важную роль въ минералогіи и химіи, имѣетъ предметомъ геометрическое изученіе и группировку формъ кристалловъ.

Здѣсь мы можемъ ограничиться самымъ поверхностнымъ указаніемъ на раздѣленіе кристалловъ на шесть системъ въ зависимости отъ вѣншей формы, т.-е. отъ расположенія плоскостей, которыми они ограничены.

Мы совершенно опускаемъ вопросъ о т. наз. поясахъ, образуемыхъ каждою совокупностью граней, пересекающихся по параллельнымъ прямымъ. Не останавливаемся также на вопросѣ о степени симметріи различныхъ кристаллическихъ формъ, которая служитъ руководящею нитью для опредѣленія системъ кристалловъ.

Простѣйшій способъ опредѣленія шести главныхъ системъ кристаллическихъ формъ (которыя распадаются на 32 группы) заключается въ слѣдующемъ. Если изъ какой-либо точки внутри кристалла провести координатныя оси параллельно нѣкоторымъ тремъ существующимъ или кристаллографически возможнымъ гранямъ кристалла, то плоскость, совпадающая съ нѣкоторою четвертою гранью, отсѣчетъ отъ этихъ осей отрѣзки, которые мы обозначимъ черезъ a , b и c . Положимъ, что другая, пятая, грань отсѣчетъ отрѣзки ma , nb и pc ; въ такомъ случаѣ коэффициенты m , n и p суть рациональныя числа для всѣхъ возможныхъ граней; это законъ, открытый въ 1781 г. Науу. Системы кристалловъ опредѣляются относительнымъ расположеніемъ «кристаллографическихъ» осей и отношеніемъ ихъ «длинъ», т.-е. чиселъ a , b и c . Такое дѣленіе впервые было предложено Weiss'омъ (1809). Шесть системъ кристалловъ суть слѣдующія.

I. Правильная система. Она характеризуется тремя взаимно перпендикулярными равными осями (рис. 318), отношение $a : b : c = 1$.

Рис. 318.



Рис. 319.

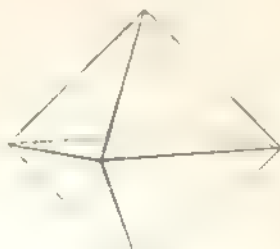


Рис. 320.



сюда относятся прежде всего правильный октаэдр (рис. 319) и кубъ или гексаэдръ (рис. 320). Больше сложную форму представляет ромби-

Рис. 321.

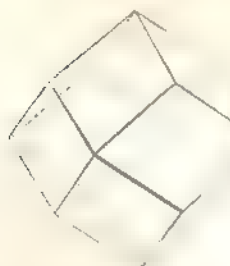


Рис. 322.

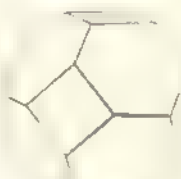
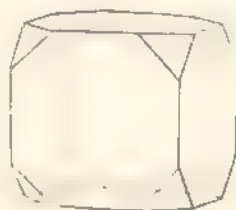


Рис. 323.



ческій додекаэдръ или двѣнадцатигранникъ, изображенный на рис. 321. Некоторые формы получаются изъ комбинации двухъ формъ болѣе простыхъ.

Рис. 324.

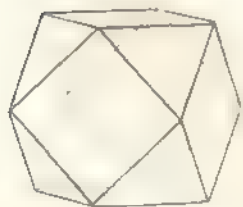
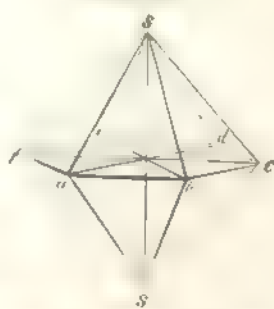


Рис. 325.



Рис. 326.



Такъ на рис. 322, 323 и 324 изображены комбинации октаэдра и куба; въ первомъ преобладаютъ грани октаэдра, во второмъ грани куба, въ третьемъ грани того и другого одинаково развиты.

Въ правильной системѣ кристаллизуются между прочимъ слѣдующія вещества. *Fe*, *Pb*, *Cu*, *Ag*, *Hg*, *Au*, *Pt* и друг., *C* (алмазь), *PbS*, *Ag-S*, *CoS*, *SbO₃*, *NaCl* (кубъ), *AgCl*, *AgBr*, *Fe₃O₄* (магнитный желѣзнякъ, октаэдръ), *ZnS*, *Cu₂O*, *KCl*, *NH₄Cl* (нашатырь), *FeS₂* (пиритъ), *NaClO₃*, *(PbNO₃)₂*, *(CaFl₂)* (плавиковый шпатъ), квасцы (октаэдръ), гранатъ и т. д.

II. Гексагональная система. Она характеризуется четырьмя осями, изъ которыхъ одна, главная, перпендикулярна къ остальнымъ тремъ, составляющимъ равные углы (60°) между собою. Эти три оси имѣютъ одинаковую длину; главная ось можетъ быть короче или длиннѣе ихъ (рис. 325). Къ этой системѣ относится прежде всего гексагональная или шестисторонняя пирамида (рис. 326) и гексагональная призма, представляющая форму незамкнутую, и встречающуюся только въ комбинаціи съ другими формами. Таковыя изображены на рис. 327 и

Рис. 327.



Рис. 328.

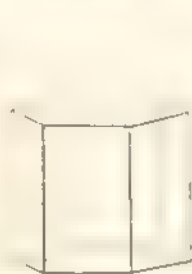


Рис. 329.

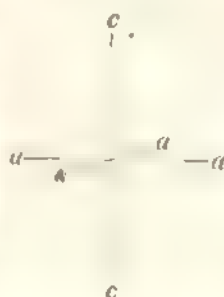


Рис. 330.



328, первая есть комбинація гексагональныхъ пирамиды и призмы, а вторая гексагональной призмы съ двумя плоскостями, параллельными основному сѣченію системы. Весьма важную форму гексагональной системы представляетъ ромбоэдръ; но его мы причислимъ къ формамъ гемидрическимъ, о которыхъ будетъ сказано ниже.

Къ гексагональной системѣ относятся кристаллы слѣдующихъ веществъ: *As*, *Sb*, *Bi*, *H₂O* (ледяные кристаллы, сѣжинки), *Al₂O₃*, *Fe₂O₃*, *NaNO₃*, *CaCO₃* (исландскій шпатъ, ромбоэдръ), *MgCO₃*, *FeCO₃*, *ZnCO₃*, *MnCO₃*, турмалинь, *SiO₂* (кварцъ), *HgS* и т. д.

Retgers, Rinne и др. обратили вниманіе на замѣчательное обстоятельство, заключающееся въ томъ, что простые тѣла и несложныя соединения кристаллизуются въ системахъ, обладающихъ наибольшою симметриею, а именно въ системахъ правильной и гексагональной. Изъ выше приведенныхъ списковъ видно, что это отчасти относится къ элементамъ и ихъ простѣйшимъ соединениямъ. Оказывается, между прочимъ, что окислы и сѣрнистыя соединения металловъ почти все принадлежатъ къ указаннымъ двумъ системамъ.

III. Квадратная или тетрагональная система. Въ ней три оси, взаимно перпендикулярныя, изъ которыхъ двѣ равны между собою, а третья, главная ось, можетъ быть короче или длиннѣе двухъ остальныхъ

(рис. 329). Важнѣйшую форму представляетъ октаэдръ съ квадратнымъ основаніемъ, ограниченный восьмью одинаковыми равнобедренными треугольниками. Смотря по тому, будетъ ли главная ось короче или длиннѣе двухъ другихъ, получаются формы, изображенныя на рис. 330 и 331. При безконечномъ удлинениі главной оси получается квадратная призма, которая встрѣчается только въ комбинаціяхъ.

Рис. 331.

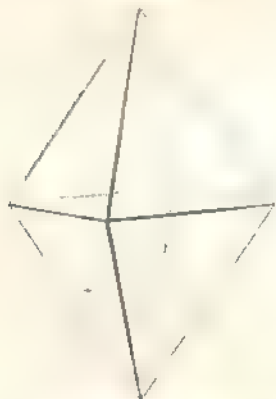


Рис. 332.

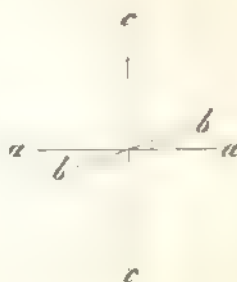


Рис. 333.



Въ квадратной системѣ кристаллизуются: Sn , SnO_2 , Hg_2Cl_2 , CuFeS_2 (колчеданъ), сѣрнистый миніалъ, мочевина и т. д.

IV. Ромбическая система. Въ три оси хотя еще взаимно перпендикулярны, но неодинаковой величины (рис. 332). Главнѣйшая форма ромбическій октаэдръ (рис. 333), ограниченный восьмью

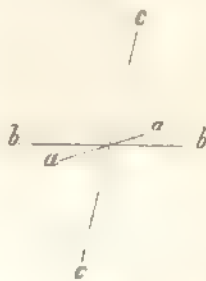
Рис. 334.



Рис. 335.



Рис. 336.



неравносторонними треугольниками, которые все равны между собою. Изъ этой формы выводятся ромбическая призма и различныя комбинаціи съ плоскостями, перпендикулярными или къ главной оси, или къ одной изъ двухъ другихъ осей, которые суть диагонали ромба, служащаго основаніемъ.

Въ этой системѣ кристаллизуются весьма большое число минераловъ и искусственно приготовляемыхъ веществъ, напр. S , Cu_2S , CaCO_3 (аргонитъ), KNO_3 , K_2SO_4 , CaSO_4 (ангидритъ), $\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$, $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$, PbSO_4 , топазъ, тяжелый шпатель (BaSO_4) и т. д.

V. Одноклиномѣрная система характеризуется тѣмъ, что двѣ оси aa и bb (рис. 334) взаимно перпендикулярны, а третья cc наклонена къ ихъ плоскости, оставаясь при этомъ перпендикулярной къ bb . На рис. 335 изображена одноклиномѣрная призма и показано положеніе въ ней кристаллографическихъ осей.

Къ одноклиномѣрной системѣ относятся кристаллы слѣдующихъ веществъ: S (двумерная рѣзность) $KClO_3$, $Na_2CO_3 + 10H_2O$, $Na_2SO_4 + 10H_2O$, $CaSO_4 + 2H_2O$ (гипсъ), $FeSO_4 + 7H_2O$, слюда, винная кислота, тростниковый сахаръ и мнози друіа органическія соединения.

VI. Триклиномѣрная система. Три оси неравной величины составляютъ острые (или тупые) углы между собою (рис. 336).

Къ этой системѣ относятся кристаллы $K_2Cr_2O_7$, $CaSO_4 + 7H_2O$, альбитъ, лабрадоръ и т. д.

§ 4. Геміэдрія. Когда въ грани, соответствующія данной формѣ, действительно существуютъ, то мы говоримъ, что форма кристалла гомогендрическая. Встрѣчаются однако формы, которыя мы получимъ изъ

Рис. 337.



Рис. 338.

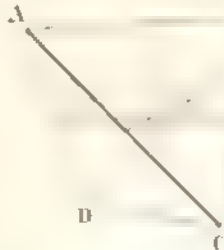


Рис. 339.



гомогендрическихъ, если мы представимъ себѣ, что половина плоскостей ограничена ими какъ бы расширится по всѣмъ сторонамъ, такъ что, наконецъ, другая половина плоскостей совершенно ими покрывается. Таки формы называются гомогендрическими. Выходятъ болѣе рѣдкіе случаи, когда три четверти, или даже семь восьмихъ всѣхъ граней кристалла исчезаютъ въ результатѣ развитія остальныхъ. Въ первомъ случаѣ получаются тетраэдрогендрическія, во второмъ—гомогендрическія формы.

Примѣромъ можетъ служить прежде всего тетраэдръ, гомогендрическая форма (рис. 338), получаемая изъ призматическаго октаэдра (рис. 337) при развитіи четырехъ сторонъ послѣдняго въ исчезновеніи остальныхъ четырехъ. Такъ рис. 338 получается, когда въ октаэдрѣ, разбитомъ изъ видѣнныхъ сторонъ передняя лѣвая и задняя правая, а изъ верхнихъ сторонъ—передняя правая и задняя лѣвая.

Изъ гексагональной гомогендрической формы шестигранной пирамиды (рис. 339) получается гомогендрическая форма ромбоэдра, изображеннаго на рис. 340, когда расширятся шесть сторонъ, въ томъ числѣ видѣнная передняя лѣвая и задняя правая пирамиды, если же расширятся двѣ изъ шести сторонъ, то возникнетъ ромбоэдръ, расположеніе котораго показано

на рис. 341. Другую гемидрическую форму представляет скаленоедр (рис. 342), боковые ребра которого совпадают с ребрами ромбоэдра, изображенного на рис. 341 и особо внутри рис. 342, соответствующая скаленоедру гомодрическая форма есть двенадцатиугольная пирамида.

Рис. 340.

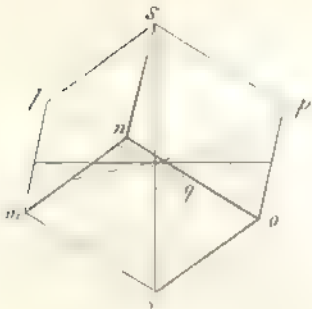


Рис. 341.

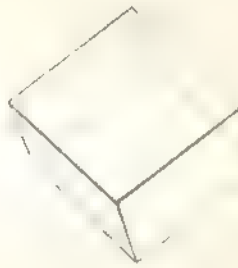


Рис. 342.



Комбинация гемидрических или тетартодрических форм приводит иногда к возникновению двух таких кристаллических форм, которые ограничены плоскостями одинакового происхождения но распреде-

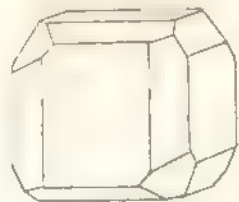
Рис. 343.



Рис. 344.



Рис. 345.



ление этих плоскостей таково, что одна из этих комбинационных форм, представляя как бы зеркальное изображение другой, не может быть приведена в нее вращением. Такие две формы называются энантиоморфными или гиродрическими. На рис. 343 и 344 показаны такие две формы из гексагональной системы; на рис. 345 и 346 изображены две

анаэтоморфныя формы, принадлежащая къ правильной системѣ (хлорноватокислый натръ); онѣ отличаются другъ отъ друга расположеніемъ плоскостей тетраэдра.

§ 5. Двойники. Два кристалла, сросшиеся по нѣкоторому определенному закону, называются двойниками. Большею частью нѣ форма получается геометрически, если представить себѣ кристаллъ разлѣзаннымъ на двѣ равныя части и одну изъ нихъ повернутою на 180° . Такъ изъ октаэдра рис. 347 получается двойникъ рис. 348, если плоскость раздѣла бу-

Рис. 346.

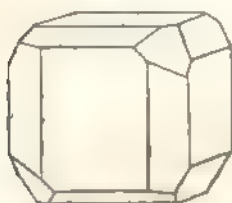


Рис. 347.

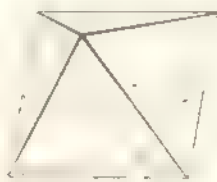
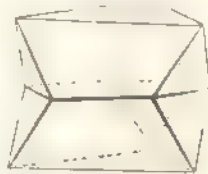


Рис. 348.



детъ расположена какъ показано пунктиромъ на первомъ изъ этихъ рисунковъ. Такой двойникъ называется двойникомъ срастания. Другого рода двойники представляются какъ бы совокупностью двухъ кристалловъ, проросшихъ одинъ другой. На рис. 349 изображенъ такой двойникъ изъ двухъ кубовъ, а на рис. 350 изъ двухъ тетраэдровъ. Первая изъ этихъ формъ встрѣчается въ кристаллахъ плавикового шпата.

Рис. 349.

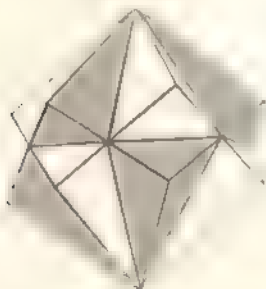
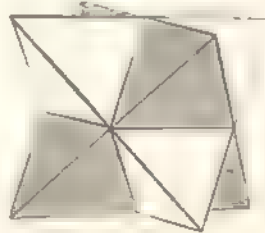


Рис. 350.



§ 6. Строеніе кристалловъ. Кристаллы суть тѣла однородныя. Кристаллы правильной системы въ то же время изотропны (стр. 25); кристаллы остальныхъ системъ анизотропны.

При этомъ кристаллы гексагональной и квадратной системъ называются одноосными. Въ нихъ существуетъ одно направленіе, обладающее тѣмъ свойствомъ, что во всѣхъ направленіяхъ, составляющихъ одинъ и тотъ же уголъ съ нимъ, свойства кристалла (теплопроводность, тепловая расширяемость, упругость, скорость свѣта и т. д.) одни и тѣ же. Это направленіе, параллельное въ обоихъ системахъ главнымъ осямъ, называется направленіемъ оптической оси. Въ этомъ направленіи лучъ свѣта проходитъ безъ двойного лучепреломленія, т.-е. не расщепляясь на два луча.

Кристаллы ромбической, одноклиномѣрной и триклиномѣрной системъ называются двусосными. Въ нихъ имѣются двѣ оптически оси т.-е. два направления, по которымъ лучи свѣта проходятъ безъ двойного лучепреломления. Эти направления однако не совпадаютъ съ кристаллографическими осями.

Сдѣленіе въ кристаллахъ въ различныхъ направленияхъ различное, вследствие чего они неодинаково легко раскалываются въ различныхъ направленияхъ. Плоскости, параллельно которымъ кристаллы наименѣе сопротивляются раскалыванію, называются плоскостями спайности; нѣкоторые кристаллы обладаютъ одной, другіе же нѣсколькими плоскостями спайности, которыя всегда параллельны какимъ либо гранямъ кристалла. Плоскость спайности особенно хорошо замѣтна въ слюдѣ, которая легко можетъ быть расщеплена на весьма тонкія пластинки. Въ случаѣ нѣсколькихъ плоскостей спайности, онѣ могутъ быть одинаковы или неодинаковы относительно степени легкости раскалыванія кристалла по ихъ направлениямъ.

Правильность формы кристалловъ заставляетъ думать, что въ нихъ частицы расположены согласно нѣкоторому опредѣленному закону. Frankenheim (1832 — 56) и Bravais (1849) первые развили ученіе о сѣтевидномъ распредѣленіи частицъ. Возьмемъ косоугольные координатныя оси Ox, Oy, Oz (рис. 351), и проведемъ три системы равноотстоящихъ плоскостей, параллельныхъ координатнымъ плоскостямъ; ихъ уравненія будутъ:

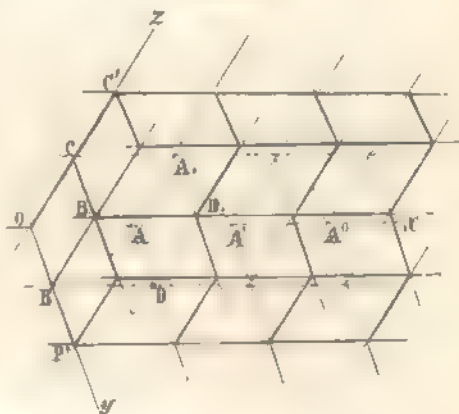
$$x=0, x=a, x=2a, x=3a \dots$$

$$y=0, y=b, y=2b, y=3b \dots$$

$z=0, z=c, z=2c, z=3c \dots$ Онѣ раздѣляютъ пространство на параллелепипеды, въ вершинахъ которыхъ и расположены частицы кристалла. Назовемъ такой параллелепипедъ элементомъ ($OADBCA, D, B, C$).

1. Элементъ есть кубъ; система правильная.
2. Элементъ есть ромбодръ, система гексагональная и связанная съ нею ромбодрическая.
3. Элементъ есть прямая призма съ квадратнымъ основаниемъ; система квадратная.
4. Элементъ есть прямая призма съ прямоугольнымъ или ромбическимъ основаніемъ; система ромбическая.
5. Элементъ есть прямая призма, основаніе которой параллелограммъ, или наклонная призма съ ромбическимъ основаніемъ, причемъ одна изъ диагоналей ромба перпендикулярна къ плоскости проходящей черезъ другую диагональ и черезъ ось призмы; система одноклиномѣрная.
6. Элементъ есть наклонный параллелепипедъ; система триклиномѣрная.

Рис. 351.



Sohnke (1867) видоизмѣнилъ теорію Bravais; исходя изъ единственнаго условія, что распреѣленіе частицъ вокругъ данной точки должно быть одинаковое для всѣхъ частицъ, онъ показалъ, что существуютъ 66 возможныхъ распреѣленій, удовлетворяющихъ этому условію. Этимъ вопросомъ занимался далѣе Moebius (1849) и другіе.

§ 7. Полиморфизмъ (или гетероморфизмъ). Кристаллы данного вещества, образуясь при опредѣленныхъ условіяхъ, обладаютъ всегда одною и тою же формою. Окажется, однако, что съ измѣненіемъ условій образованія можетъ измѣняться и форма кристалла, иначе говоря, что одно и то же вещество можетъ принимать различныя кристаллическія формы. Такое явленіе называется полиморфизмомъ, а въ частномъ случаѣ двумя или тремя формъ — диморфизмомъ и триморфизмомъ. Число полиморфныхъ тѣлъ весьма велико, можетъ быть окажется, что полиморфизмъ обнаруживается во всѣхъ тѣлахъ, если сумѣть надлежащимъ образомъ измѣнить условія ихъ кристаллизаціи.

Кристаллы различной формы одного и того же вещества обладаютъ вообще и различными физическими свойствами, каковы цвѣтъ, крѣвость, плотность и т. д.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ полиморфизма.

CS_2 въ природѣ образуетъ ромбическіе кристаллы. Изъ растворовъ въ CS_2 и въ углеводородахъ выдѣляется въ видѣ ромбическихъ кристалловъ изъ расплавленной же массы — въ видѣ кристалловъ одноклиномѣрныхъ. Кристаллы послѣдней системы представляютъ форму неустойчивую, мало-по-малу переходящую въ форму ромбическую, причемъ выдѣляется теплота. $CaCO_3$: гексагональная (ромбоэдрическая) система въ видѣ известкового шпата (плотность $\delta = 2.7$) и ромбическая въ видѣ арагонита ($\delta = 2.9$). C : правильная (алмазъ, $\delta = 3.55$) и одноклиномѣрная, прежде думали — гексагональная (графитъ, $\delta = 2.3$). SiO_2 : гексагональная — кварцъ ($\delta = 2.65$), другая форма — тридимитъ ($\delta = 2.3$), низшей степени симметріи, можетъ быть — ромбической. TiO_2 : двѣ различныя квадратныя формы (рутилъ, $\delta = 4.25$ и анатазъ, $\delta = 3.9$) и ромбическая (брукитъ, $\delta = 4.05$), триморфизмъ. FeS_2 : правильная (пиритъ, $\delta = 5.1$) и ромбическая (марказитъ, $\delta = 4.86$). Силикатъ алюминія Al_2SiO_5 ромбическая (андалузитъ, $\delta = 3.16$) и триклиномѣрная (диаспоръ, $\delta = 3.66$).

§ 8. Изоморфизмъ. Иногда тѣла, различныя по составу, кристаллизуются въ формахъ весьма близкихъ другъ къ другу; такія тѣла называются изоморфными. Окажется, что эти тѣла похожи другъ на друга по химическому составу. Наиболѣе важное свойство ихъ заключается въ томъ, что они способны войти въ составъ одного и того же кристалла, когда они находились вмѣстѣ въ растворѣ. Въ настоящее время отличаютъ различныя степени изоморфизма, смотря по тому, могутъ ли вещества смѣшиваться въ одномъ кристаллѣ во всевозможныхъ отношеніяхъ или нѣтъ.

Изоморфизмъ былъ открытъ Mitscherlich'омъ (1820) на четырехъ ромбическихъ кристаллахъ H_2KPO_4 , H_2KAsO_4 , $H_2(NH_4)PO_4$ и $H_2(NH_4)AsO_4$. Примѣры изоморфныхъ тѣлъ суть $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$ и $MgSO_4 \cdot 7H_2O$.

$BaCl_2 + 2H_2O$ и $SrCl_2 + 2H_2O$; $NaClO_3$ и $AgClO_3$. Въ этихъ примѣрахъ степень изоморфизма убываетъ отъ перваго до послѣдняго. Дальнѣйшими примѣрами могутъ служить $CaCO_3$, $MgCO_3$, $ZnCO_3$, $FeCO_3$ и $MnCO_3$ (ромбоэдри); *As*, *Sb*, *Te*, *Bi* (тексагональная система).

Квасцы также изоморфны. Кристаллы хромовыхъ квасцовъ, помѣщенный въ растворъ алюминіевыхъ квасцовъ, продолжаетъ въ немъ расти безъ измѣненія формы.

Интересный примѣръ изоморфизма въ триклиномѣрной системѣ представляютъ анортитъ $CaAl_2Si_2O_8$ и альбитъ $NaAlSi_3O_8$.

Иногда кристаллы химически совершенно различныхъ веществъ похожи другъ на друга. Такое явленіе замѣчаемъ напр. на натривой солифѣ и на известковомъ шпатѣ.

Вопросомъ о связи между кристаллическою формою и положеніемъ вещества или существенной его части (напр. металла соли) въ системѣ Д. И. Мендѣѣва занимались G. Linck и W. Orloff.

§ 9. Аллотропія. Berzelius называетъ аллотропей появленіе простого вещества (элемента) въ нѣсколькихъ состояніяхъ, болѣе или менѣе существенно отличающихся другъ отъ друга по физическимъ свойствамъ. Алмазь, графитъ и обыкновенный уголь представляютъ три аллотропическихъ видоизмѣненія углерода. Изученію различныхъ свойствъ и способовъ полученія аллотропическихъ состояній углерода посвящено обширное изслѣдованіе Moissan'a. Боръ получается въ видѣ бурого аморфнаго порошка и въ видѣ кристалловъ.

Фосфоръ извѣстенъ въ трехъ аллотропическихъ формахъ: бѣлый, красный (получается продолжительнымъ нагреваніемъ бѣлаго до 250°) и металлическій. Сѣра также въ трехъ состояніяхъ: ромбическая, моноклиномѣрная и пластичая. Серебро извѣстно въ цѣломъ рядѣ аллотропическихъ формъ, отличающихся окраскою. Селенъ красный и черный аморфны порошки, темнокрасные кристаллы. Сѣрые кристаллы (электропроводность послѣднихъ увеличивается при охлажденіи).

Аллотропическія видоизмѣненія одного и того же вещества вѣроятно происходятъ влѣдствіе того, что атомы въ различномъ числѣ или въ различной группировкѣ входятъ въ составъ молекулы. Кислородъ (O_2) и озонъ (O_3) представляютъ примѣръ аллотропіи газообразнаго элемента.

ЛИТЕРАТУРА.

Къ § 1. *Н. Н. Петрушевскій*. Ж. Ф. Х. О. 16 стр. 410, 438, 1884.

Н. Е. Жуковскій. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 3, вып. 1 стр. 52, 1890.

Къ § 2. *O. Lehmann*, W. A. 41 p. 401; 41 p. 525, 1890.

Къ § 3 — § 9. *Кристаллы*. Учебники кристаллографіи:

Karsten, Krystallographie (Allgem. Encyclopaedie der Physik).

Rammelsberg, Krystallographische Chemie.

Mailard, Cours de cristallographie. Paris 1874—1884.

Labisch, Geometrische Krystallographie, Leipzig 1881.

Labisch, Physikalische Krystallographie, Leipzig 1891.

Labisch, Grundriss der physikalischen Krystallographie. Leipzig, 1896.

чертой m , до которой ее наполняют водой. Пусть p_1 вес пикнометра, наполненного водой, p_2 вес испытываемого вещества, и p_3 вес пикнометра, содержащего это вещество и воду до черты m . В таком случае вес вытесненной воды $p_1 - (p_3 - p_2) = p_1 + p_2 - p_3$, а потому

$$\delta_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Когда тѣло не можетъ быть взвѣшено въ воздухѣ, какъ напр. N_2 , то вмѣсто воды берутъ керосинъ, плотность котораго δ' опредѣляется предварительно. Вѣсъ p_2 опредѣляется взвѣшиваньемъ пикнометра, сперва когда онъ на половину наполненъ керосиномъ, а затѣмъ когда N_2 въ него опущенъ.

Когда тѣло растворимо въ водѣ, то вмѣсто воды берутъ другую жидкость, въ которой тѣло не растворится, и плотность δ' которой известна. Въ обоихъ случаяхъ мы получаемъ искомое δ по формулѣ

$$\delta = \frac{p_1}{p_1 + p_2} - \frac{p_1}{p_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

При точных определениях следует вводить поправки на расширение воды (от 4 до температуры опыта), на расширение стекла и самого испытуемого тела.

§ 8. Способъ гидростатическій. Пусть P вѣсъ тѣла въ воздухѣ P_1 его вѣсъ въ водѣ, тогда, на основаніи закона Архимеда, имѣемъ, не вводя поправокъ

[illegible]

Когда тѣло легче воды, то къ нему присоединяють кусокъ болѣе тяжелаго тѣла, напр. согнутую мѣдную проволоку. Пусть p_1 вѣсъ тѣла въ воздухѣ; p_2 вѣсъ нити, служащей для привѣса, вмѣстѣ съ проволокой, погруженной въ воду; p_3 вѣсъ нити вмѣстѣ съ испытуемымъ тѣломъ и проволокой, погруженными въ воду. Въ этомъ случаѣ вѣсъ тѣла въ водѣ равенъ отрицательной величинѣ $p_1 - p_2$; потеря вѣса равна $p_1 - (p_1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_3$, и наконецъ

$$\bar{g} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3} \dots \dots \dots (8)$$

Когда мы имеемъ дѣло съ порошкообразнымъ тѣломъ, поступаемъ подобнымъ же образомъ, причемъ роль мѣдной проволоки играетъ стеклянный сосудикъ (напр. часовое стеклышко), содержащій вазелинъ, внутри котораго распредѣляютъ порошокъ, предварительно взвѣшенный въ воздухѣ. Формула (8) прилагается и здѣсь.

Не входимъ въ разсмотрѣнiе поправокъ, которыя необходимо ввести въ этомъ случаѣ, мы достаточно подробно останавливались на одной изъ этихъ поправокъ на стр. 297.

Объ устройствѣ вѣсовъ, приспособленныхъ къ взвѣшиваніямъ тѣлъ въ водѣ или иныхъ жидкостяхъ было также уже сказано на стр. 438.

Для менѣе точныхъ опредѣленій могутъ служить одноплечіе вѣсы, изображенные на рис. 172 стр. 301, и о которыхъ нѣкоторыя подробности изложены еще на стр. 439.

Вмѣсто того, чтобы привѣшивать тѣло къ коромыслу вѣсовъ и опредѣлять его кажущуюся потерю вѣса въ водѣ, что можетъ представиться неудобнымъ, когда вѣсы къ такого рода манипуляциямъ не приспособлены, можно, наоборотъ, помѣстить на чашкѣ вѣсовъ сосудъ съ водою, и опредѣлить то увеличеніе вѣса этого сосуда, которое замѣчается при погруженіи въ воду тѣла, привѣшеннаго на нити къ какой-либо стойкѣ, поставленной рядомъ съ вѣсами. Это увеличеніе вѣса равно искомой кажущейся потерѣ вѣса тѣла въ водѣ.

§ 9. Удельный, атомный и молекулярный объемы. Въ послѣднихъ параграфахъ, а также въ предыдущихъ двухъ отдѣлахъ мы познакомились со способами опредѣленія плотности δ газообразныхъ, жидкихъ и твердыхъ тѣлъ. Эта величина численно равна вѣсу единицы объема вещества. Обратная величина, численно равная объему, занимаемому одною вѣсовой единицею вещества, называется **удельнымъ объемомъ** этого вещества. Обозначивъ его черезъ v , имѣемъ

$$v = \frac{1}{\delta} = \frac{V}{P} \quad (9)$$

гдѣ P вѣсъ, V объемъ вещества, которые, какъ обыкновенно условимся выражать въ граммахъ и куб. сантиметрахъ.

Если сравнивать между собою не равные вѣса различныхъ веществъ, но брать отъ каждаго по одной граммъ-молекулы, т.-е. столько граммъ, сколько единицъ въ молекулярномъ вѣсѣ μ вещества, то объемы v , ими занимаемые, называются **молекулярными объемами** вещества, напр. число куб. сантим. занимаемыхъ $23 + 35.5 = 58.5$ гр. NaCl . Итакъ вообще

$$w = \mu v = \frac{\mu V}{P} = \frac{\mu}{\delta} \quad (10)$$

Послѣдняя дробь удобнѣе всего для вычисленія w , такъ какъ μ и δ для многихъ тѣлъ извѣстны.

Первый Корр (1842) изучалъ молекулярные объемы различныхъ жидкостей, и нашелъ для нихъ весьма простую закономерность при точкѣ кипѣнія вещества, а именно, что при этой температурѣ молекулярный объемъ w есть аддитивное свойство (стр. 497), т.-е. что онъ равенъ суммѣ атомныхъ объемовъ тѣхъ атомовъ, которые входятъ въ составъ молекулы. При этомъ атомный объемъ $C = 11$; $H = 5.5$; $S = 22.6$; $Cl = 22.8$; $Br = 27.8$; $J = 37.5$ и т. д. Для O слѣдуетъ отличать два случая: когда атомъ O обоими сродствами связанъ съ однимъ атомомъ углерода (карбонильная группа), то для него $w = 12.2$; если же O только однимъ сродствомъ связанъ съ однимъ атомомъ C , а другимъ съ другимъ атомомъ углерода или другого элемента (гидроксильная группа), то $w = 7.8$. Напр. для уксусной кислоты $\text{CH}^3\text{CO}(\text{OH})$ имѣемъ: $2C = 22$, $4H = 22$, O (карбониль) $= 12.2$, O (гидроксиль) $= 7.8$, что въ суммѣ даетъ 64.0.

Измѣреніе даетъ $\kappa = 63.7$. Существуетъ однако много отступленій отъ закона Корр'а. Весьма возможно, что получаются болѣе точные законы, если сравнивать молекулярные объемы не при температурахъ кипѣнія, но при температурахъ (абсолютныхъ), составляющихъ равныя дробныя части отъ температуръ критическихъ (стр. 358).

И для твердыхъ тѣлъ найдены различныя правильности, которыя однако нельзя назвать законами. Такъ Schroeder (1859) нашелъ, что молекулярные объемы галогенныхъ солей K , Na и Ag обнаруживаютъ простую правильность, какъ видно изъ слѣдующихъ чиселъ для κ :

KCl — 37,4	$NaCl$ — 27,1	$AgCl$ — 25,6
KBr — 44,3	$NaBr$ — 33,8	$AgBr$ — 31,8
KJ — 54,0	NaJ — 43,5	AgJ — 42,0.

Для всѣхъ простыхъ соединений w примѣрно на 16 больше, чѣмъ для хлорныхъ; и въ горизонтальныхъ рядахъ разности чиселъ довольно постоянны.

Для свободныхъ элементовъ оказывается, что ихъ атомный объемъ есть періодическая функція атомнаго вѣса.

Атомные объемы жидкихъ Cl и Br равны 22,7 и 26,9, т.-е. близко къ числамъ, найденнымъ Корр'омъ.

Замѣтимъ еще, что изоморфныя соединенія (стр. 346) имѣютъ близкіе другъ къ другу молекулярные объемы. Такъ для молекулярнаго объема хромовыхъ квасцовъ, $CrK(SO_4)_2 + 12H_2O$ имѣемъ $\mu = 499$, $\delta = 1,8$ и $\kappa = 277$, для обыкновенныхъ квасцовъ, $AlK(SO_4)_2 + 12H_2O$ имѣемъ $\mu = 474$, $\delta = 1,7$ и $w = 279$.

§ 10. Плотность сплавовъ. Плотность сплава иногда представляется аддитивнымъ свойствомъ: такъ напр. объемы сплавовъ Cu и Al или Sb и Bi равны суммѣ объемовъ составныхъ частей. Зато объемъ сплавовъ $Cu - Sn$, $Ag - Au$, $Sn - Au$, $Pb - Bi$ меньше, а объемъ сплавовъ $Sb - Sn$, $Sn - Cd$, $Pb - Cd$ больше суммы объемовъ входящихъ въ нихъ металловъ. Нѣкоторые сплавы представляютъ особенности; укажемъ на одинъ изъ нихъ. Сплавъ изъ Fe и Ni (22°/100 до 25°/100) представляетъ ту особенность, что онъ при одной и той же температурѣ можетъ находиться какъ бы въ двухъ различныхъ состояніяхъ, причемъ переходъ изъ одного состоянія въ другое совершается охлажденіемъ до -20° или -30° , и нагреваніемъ до 600° . Послѣ охлажденія сплавъ можетъ намагничиваться; эту способность онъ теритъ при 600° , и для восстановленія ея необходимо вновь подвергнуть сплавъ сильному охлажденію. Плотность δ сплава различная, смотря по тому, была ли послѣдняя совершенная надъ нимъ манипуляція сильное нагреваніе или охлажденіе.

Получаются слѣдующія числа для δ :

	25°/100 Ni	22°/100 Ni
Послѣ нагреванія (немагнитенъ) .	8.15	8.13
» охлажденія (магнитенъ) . .	7.88	7.96

И другими свойствами отличаются другъ отъ друга эти два состоянія сплава.

Н. Бахметьевъ (Ж. Ф. Х. О. 25, стр. 219, 1893.) и др. изслѣдовали плотность амальгамъ. При этомъ оказалось, что объемъ амальгамъ магнія, висмута, олова, платины, цинка и серебра больше, а объемъ амальгамъ кадмія и мѣди меньше, чѣмъ получается вычисленіемъ, если предположить, что раствореніе металла въ ртути происходитъ безъ измѣненія объема. Особенно замѣчательна амальгама магнія, плотность которой, при содержаніи 5°, *Mg*, Бахметьевъ находитъ равною 10,23, между тѣмъ какъ вычисленіе даетъ 13,03. Разность доходитъ до 21,5 %. Въ послѣдней работѣ (тамъ же, стр. 265) Бахметьевъ изучилъ свойства кадмевыхъ амальгамъ. Laborde (J. de phys. (3) 5, p. 547, 1896 г.) нашелъ, что плотность почти всѣхъ сплавовъ *Fe* и *Al* превышаетъ плотность *Fe*.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Деформациі твердаго тѣла.

§ 1. Общія замѣчанія о деформацияхъ твердаго тѣла. Мы видѣли, что твердое тѣло сопротивляется всякому измѣненію расположенія его частицъ, которое мы условимся называть деформацией; таковая можетъ быть вызвана только силами, дѣйствующими, вообще говоря, извнѣ на данное тѣло. По всей вѣроятности не существуетъ такой деформациі твердаго тѣла, которая бы не была сопряжена съ измѣненіемъ формы тѣла, т.-е. вида его поверхности. Тѣмъ не менѣе слѣдуетъ отличать случаи, въ которыхъ измѣненіе формы непосредственно бросается въ глаза, и съ внѣшней стороны представляется какъ бы сущностью деформациі (напр. стиснаніе стержня), между тѣмъ какъ объ измѣненіи распределенія частицъ мы догадываемся на основаніи нѣкоторыхъ умозаключеній. — Отъ тѣхъ случаевъ деформациі, въ которыхъ, наоборотъ, измѣненіе формы, если оно существуетъ, для насъ незамѣтно, между тѣмъ какъ измѣненіе распределенія частицъ представляется первоначально даннымъ, и какъ бы сущностью самой деформациі. Второй случай мы имѣемъ напр. при крученіи стержня или проволоки, при которомъ внѣшняя форма можетъ и не подвергаться замѣтнымъ измѣненіямъ.

Важнѣйшія формы деформациі суть: растяженіе и обратное ему сжатіе, которое можетъ быть или только продольнымъ, т.-е. въ одномъ направленіи, или всестороннимъ; далѣе крученіе и сгибаніе. Болѣе сложныя деформациі могутъ быть разсматриваемы, какъ комбинаціи этихъ трехъ простѣйшихъ.

Всякая деформация является слѣдствіемъ нѣкоторой внѣшней причины, которая можетъ быть или силою, или парою. Обозначимъ величину причины, вызывающей деформацию, черезъ *P*. Сама деформация представляется въ видѣ измѣненія нѣкоторой величины, которую мы пока вообще обозначимъ черезъ *x*, и которая можетъ быть линіей, поверхностью, объемомъ, угломъ и т. д. Величину ея измѣненія обозначимъ черезъ Δx .

Въ тѣсныхъ предѣлахъ, при малыхъ деформацияхъ, имѣемъ слѣдующія три положенія, которыя послужатъ основаніемъ дальнѣйшихъ нашихъ разсужденій.

1. Величина деформации Δx пропорціональна величинѣ вѣншей, вызывающей ее причины P . Это положеніе было высказано *Hook'e* 'омъ (1675) въ формѣ «*ut tensio, sic vis*».

2. Перемѣна знака вѣншей причины P вызываетъ только перемѣну знака деформации Δx , безъ измѣненія ея абсолютной величины. Сжатіе и растяженіе, крученіе въ одну и крученіе въ другую сторону вызываютъ одинаковыя по абсолютной величинѣ деформации.

3. При дѣйствіи нѣсколькихъ вѣншихъ причинъ получается деформация, которая опредѣляется суммой частныхъ деформаций, вызываемыхъ отдѣльными причинами.

Эти три положенія вѣрны лишь въ болѣе или менѣе ограниченной области для каждаго рода деформации. Въ действительности деформация Δx , даже въ самыхъ простыхъ случаяхъ, есть функція вѣншей дѣйствующей причины P или, иначе, внутренней силы, развивающейся при деформацияхъ и уравновѣшивающей причину P , суть функціи деформаций. Когда мы выйдемъ изъ предѣловъ, внутри которыхъ подтверждается пропорціональность между P и Δx , то можемъ пользоваться эмпирическою формулою $P = a \Delta x + b(\Delta x)^2$, гдѣ a и b постоянны. Впрочемъ существуетъ случай (крученіе тонкихъ проволокъ или нитей), когда деформация (уголъ поворота одного конца) въ весьма широкихъ предѣлахъ пропорціональна вѣншей дѣйствующей причинѣ (моменту приложенной пары).

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что тѣло, подвергаемое деформации, однородно и изотропно.

Относительно терминологіи въ явленіяхъ деформации, къ сожалѣнію, ничего не установилось, и одинъ и тѣ же величины обозначаются различными авторами неодинаковыми названіями. Условимся, во всѣхъ частныхъ случаяхъ деформаций, называть коэффициентами такія, вообще весьма малыя величины, которыми опредѣляется величина деформации, вызванной вѣншей причиной, равной единицѣ, и модулями обратныя имъ, вообще большія величины, которыя служатъ мѣрою вѣншей причины, вызывающей деформацию, равную единицѣ, или, вѣрнѣе говоря, мѣрою вѣншей причины, которая вызвала бы деформацию, равную единицѣ, еслибы въ весьма широкихъ предѣлахъ оставалось вѣрнымъ первое положеніе о пропорціональности между Δx и P .

§ 2. Предѣлъ упругости и разрывъ. Деформации, вызванныя небольшими вѣншими причинами P , вообще говоря, исчезаютъ когда эти причины перестаютъ дѣйствовать. Но съ увеличеніемъ P достигается наконецъ такая деформация, которая не вполне исчезаетъ вмѣстѣ съ P обнаруживается остаточная деформация, какъ бы остающийся навсегда слѣдъ произведеннаго на тѣло воздѣйствія. При дальнѣйшемъ возрастаніи величины P увеличиваются какъ временная деформация, такъ и остаточная.

Когда появляется первый слѣдъ остаточной деформации, то мы говоримъ, что достигнуть предѣла упругости.

Тѣла, предѣлъ упругости которыхъ достигается только при большихъ деформацияхъ, называются вообще тѣлами упругими; таковы напримѣръ сталь, стекло, каучукъ, слоновая кость и т. д. Наоборотъ неупругими называются тѣла, предѣлъ упругости которыхъ легко достигается уже при слабыхъ P и малыхъ деформацияхъ Δx , къ такимъ тѣламъ принадлежить напр. свинецъ. Понятно, что нельзя провести строгой границы между тѣлами упругими и неупругими, и что для даннаго вещества каждаго рода деформация имѣетъ особый предѣлъ упругости.

Съ увеличеніемъ P и Δx достигается наконецъ разрывъ между частицами тѣла, которое раздѣляется на части (разрывается раздавливается, ломается и т. д.). Тѣла, для которыхъ наступаетъ разрывъ ранѣе, чѣмъ былъ достигнутъ предѣлъ упругости, называются хрупкими. Тѣла, которыя, наоборотъ, могутъ быть подвергнуты весьма значительнымъ остаточнымъ деформациямъ и притомъ весьма быстро, называются тягучими.

Нѣкоторые авторы характеризуютъ упругость тѣла величиною той вѣншей причины, которая потребна, чтобы вызвать заданную деформацию. При такомъ опредѣленіи, каучукъ или резина, тѣла весьма упругія въ обыденномъ смыслѣ слова, слѣдуетъ причислить къ тѣламъ весьма мало упругимъ. Мы сохранимъ понятие о степени упругости, характеризованной болѣе или менѣе быстро достигаемымъ предѣломъ упругости.

Время играетъ весьма важную роль въ явленіяхъ упругости: деформация, вызванная появленіемъ или измѣненіемъ вѣншей дѣйствующей причины, не устанавливается сразу въ окончательной своей величинѣ но продолжаетъ измѣняться втеченіе иногда весьма продолжительнаго времени. Отсюда явствуетъ, что опыты и измѣренія въ области упругости должны имѣть на себѣ отпечатокъ нѣкотораго произвола, нѣкоторой неопредѣленности, если не будетъ обращено вниманіе на время, втеченіе котораго дѣйствовала вѣншая причина, или которое прошло отъ момента ея измѣненія или исчезновенія. Въ статьѣ объ упругомъ послѣдствіи мы возвратимся къ этому вопросу (§ 21).

§ 3. Твердость. Сопротивленіе вещества проникновению въ него другаго тѣла, вызывающему хотя бы лишь поврежденіе его поверхности (царапаніе, рѣзаніе), характеризуетъ его твердость. Изъ двухъ веществъ то считается болѣе твердымъ, которое можетъ повредить или исцарапать поверхность другаго, или при достаточномъ давленіи войти въ него (долото, буравъ). Въ минералогіи отличаютъ десять степеней твердости представителями которыхъ являются слѣдующія тѣла:

- | | | |
|-----------------------|-------------------|-------------------|
| 1) Талькъ | Рѣзается ногтемъ. | 6) Полевой шпатъ. |
| 2) Гипсъ | | 7) Кварцъ |
| 3) Известковый шпатъ. | | 8) Топазъ |
| 4) Плавленый шпатъ. | | 9) Корундъ |
| 5) Апатитъ. | | 10) Алмазъ |
- Рѣзуть
стекло.

Такимъ образомъ твердость любого вещества характеризуется только номеромъ, но не представляется ясно опредѣленною величиною, которую можно было бы измѣрить, какъ измѣряются другія физическія величины.

Въ 1882 г. первый Н. Hertz великій, безвременно скончавшійся ученый, далъ строго научное опредѣленіе понятія о твердости. Представимъ себѣ, что на маленькую круглую часть поверхности тѣла производится постепенно возрастающее давленіе, и пусть P давленіе, приходящееся при этомъ въ средней части круга на единицу поверхности. Для тѣлъ хрупкихъ настаетъ моментъ, когда внутри изслѣдуемаго тѣла произойдетъ разрывъ и появляется трещина. Величина давленія P въ этотъ моментъ и служить мѣрою твердости для хрупкаго тѣла.

Auerbach (1891) построилъ приборъ, въ которомъ къ плоской поверхности испытуемаго вещества прижимается выпуклая поверхность другого чечевицеобразнаго тѣла, величина поверхности соприкосновения наблюдается микроскопомъ.

Для не хрупкихъ тѣлъ Auerbachъ предположилъ за мѣру твердости принимать то наибольшее давленіе, которое можетъ дѣйствовать на единицу поверхности, и при которомъ происходитъ полное «приспособленіе» испытуемаго вещества къ формѣ давящей на него чечевицы. При увеличеніи давленія чечевица глубже входитъ въ это вещество, но давленіе на единицу поверхности соприкосновения, которая при этомъ увеличивается, остается уже безъ измѣненія. Auerbachъ находитъ (1896) слѣдующія уже абсолютныя значенія для твердости различныхъ веществъ въ кгр. на кв. мм.:

Талькъ	5	Апатитъ	237
Гипсъ	14	Адуляръ	253
Каменная соль	20	Кристалъ (боро-сипкаты)	274
Известковый шпатъ	92	Кварцъ (\perp къ оси)	308
Плавленый шпатъ	110	Топазъ	525
Тяжелый флинтъ	170	Берилъ	588
Легкий флинтъ	210	Корундъ	1150

Твердость вещества зависитъ отъ способа его обработки; желѣзо, мѣдь и другіе металлы литые, кованные, прокатанные, протянутые и т. д. обладаютъ различною плотностью и неодинаковою степенью твердости.

Большое влияние на твердость имѣетъ закалка, состоящая въ быстромъ охлажденіи сильно нагрѣтаго вещества, напр. опусканіемъ его въ воду или иную жидкость. Ведемъ извѣстно, какъ отличаются другъ отъ друга закаленная и отпущенная сталь по степени твердости. Интересныя явленія представляетъ въ этомъ отношеніи стекло. При быстромъ охлажденіи горячаго или расплавленнаго стекла происходитъ внезапное сокращеніе поверхностнаго слоя, сопровождаемое сильнымъ сдавливаніемъ внутренней массы, которая принимаетъ особую неустойчивую структуру. Состояніе поверхностнаго слоя напоминаетъ то поверхностное натяженіе, съ которымъ мы познакомились въ ученіи о жидкостяхъ. Такое стекло, повидимому весьма твердое, не ломается при довольно сильныхъ ударахъ, однако разсыпается на весьма мелкія части, когда нарушается цѣльность поверх-

ностнаго слоя, для чего бываетъ достаточно самой малой царапины. Изъ такого закаленного стекла состоятъ такъ наз. Болонскія склянки, небольшіе, толстостѣнные стаканчики, которые даже при довольно сильныхъ ударахъ остаются цѣлыми, но которые разсыпаются при малѣйшей царапинѣ. Во внутрь стаканчика можно помѣстить гвозди и производить встряхиваніе безъ вреда для него; но если малѣйшую крушинку кварца бросить въ стаканъ, то онъ разсыпается, такъ какъ кварцъ легко производить царапины на поверхности стекла.

Знаменитыя Батавскія слезки получаютъ, выливая расплавленное стекло по каплямъ въ роду: онѣ имѣютъ форму продолговатой капли съ отросткомъ, какъ видно на рис. 353 А; когда надломить шейку такой слезки, то она разсыпается на мелкіе кусочки. На рис. 353 изображена слезка вновь сложенная изъ этихъ кусочковъ форму и расположеніе которыхъ можно видѣть на рис. 353 В. Если отростокъ постепенно растворить въ плавиковой кислотѣ, начиная отъ его конца, то разрывъ слезки происходитъ въ моментъ, когда кислота достигнетъ до начала болѣе толстой части. Повидимому, вся масса слезки удерживается въ состояніи неустойчиваго равновѣсія небольшою полоскою, находящеюся около ея шейки.

Рис. 353.



§ 4. Обзоръ величинъ, встрѣчающихся въ элементарномъ ученіи объ упругости. Разсматривая различные случаи деформации твердаго изотропнаго тѣла, мы имѣемъ дѣло съ большимъ числомъ различныхъ величинъ, для которыхъ, къ сожалѣнію, не установилось определенныхъ обозначенія, что не мало затрудняетъ чтеніе различныхъ учебниковъ и трактатовъ.

Между этими величинами имѣется столько соотношеній, сколько есть величинъ безъ двухъ, вследствие чего существуетъ возможность всѣ эти величины выразить черезъ двѣ изъ нихъ, которыя принимаются за основныя величины, характеризующія упругія свойства даннаго вещества. Опять-таки различные авторы останавливаются на различныхъ двухъ величинахъ, вследствие чего получается большое разнообразіе формулъ, въ которыхъ тѣмъ болѣе трудно разобратъ, что буквенныя обозначенія у различныхъ авторовъ неодинаковыя.

Для облегченія читателей считаемъ не лишнимъ начать съ обзора тѣхъ величинъ и ихъ обозначеній, которыя въ дальнѣйшемъ будутъ встрѣчаться. Выводя постепенно уравненія, связывающія эти величины, мы въ концѣ (§ 12) сопоставимъ всѣ эти связи, и напомнимъ тѣ различныя формулы, которыя получаются при различномъ выборѣ двухъ основныхъ величинъ. Мы будемъ имѣть дѣло со слѣдующими величинами:

- 1) α — коэффициент линейного растяжения или сжатия стержня или проволоки;
- 2) E — модуль растяжения или сжатия, модуль упругости, модуль Юнга; относится къ стержню или проволоке;
- 3) α' — коэффициент односторонняго сжатия слоя;
- 4) E' — модуль односторонняго сжатия слоя;
- 5) β — коэффициент поперечнаго сжатия, сопровождающаго продольное растяжение;
- 6) $\sigma = \frac{\beta}{\alpha}$ — отношение поперечнаго сжатия къ продольному растяжению, коэффициент Пуассона (Poisson);
- 7) η — коэффициент объёмнаго расширения при растяжении;
- 8) γ — коэффициент всесторонняго сжатия;
- 9) K — модуль всесторонняго сжатия;
- 10) N — модуль сдвига;
- 11) f — модуль кручения данной проволоки;
- 12) λ — вспомогательная величина, которая играет важную роль въ уравненияхъ теории упругости, и которая связана съ остальными величинами уравненіемъ

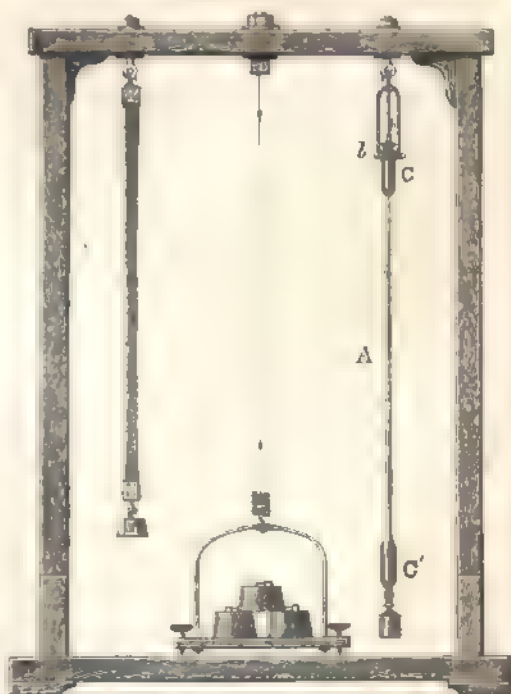
$$\lambda = \frac{9E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \dots \dots \dots (1)$$

§ 5. Растяжение стержней, модуль Юнга. Закрепимъ стержень (или проволоку) однимъ верхнимъ концомъ такъ, какъ показано на рис. 354. Пусть L_0 первоначальная длина стержня, s его площадь поперечнаго сѣченія. Къ нижнему концу стержня привѣсимъ грузъ P , который назовемъ растягивающимъ грузомъ. Тотъ грузъ, который при этомъ приходится на единицу площади поперечнаго сѣченія, обозначимъ черезъ p , и назовемъ растягивающею силою, такъ что

$$p = \frac{P}{s} \dots \dots (2)$$

Подъ вліяніемъ растягивающаго груза P произойдетъ удлиненіе, которое мы обозначимъ черезъ ΔL_0 . Въ тѣсныхъ предѣлахъ (см. стр. 555, положеніе 1) удлиненіе ΔL_0 пропорционально растягивающему грузу P ; даѣе ΔL_0 очевидно должно быть пропорционально

Рис. 354.



гораздо раньше, т.-е. при гораздо меньшей растягивающей силе произойдет разрыв стержня; еще раньше будет достигнут предел упругости и, наконец, еще раньше прекратится та пропорциональность между деформацией ΔL_0 и внешней причиной P или p , на которой основаны наши формулы. Тем не менее мы можем мысленно допустить, что удлинение, замечаемое при небольшом P , растет и дальше пропорционально этому P , пока оно не сделается равным L . При $\Delta L = L_0$ мы имеем, на основании (9), $E = p$. Это показывает, что модуль Юнга равен растягивающей силе при которой удвоилась бы длина стержня, или, в выбранных нами единицах модуль Юнга равен числу килограммов, которые должны были бы действовать на кв. мм. площади поперечного сечения стержня, чтобы его длина удвоилась (если бы он гораздо раньше не разорвался).

Определим работу R , которую необходимо затратить, чтобы увеличить первоначальную длину L_0 проволоки на величину ΔL . Пусть I длина проволоки, вызванная нагрузкой Q . Если прибавим нагрузку dQ , то L увеличится на dL , причем будет произведена работа $dR = QdL$. Но удлинение dL получится из (3), если положить dQ вместо P , т.-е.

$$dL = \frac{\alpha L_0}{s} dQ,$$

и след.

$$dR = \frac{\alpha L_0}{s} QdQ.$$

Вся работа R растяжения получится, если мы возьмем сумму таких выражений для Q изменяющегося от $Q = 0$ до $Q = P$. Отсюда

$$R = \frac{\alpha L_0 I}{2s} P^2.$$

Эта работа R равна потенциальной энергии J растянутой проволоки. Если принять во внимание формулу (3) для ΔL , или ввести растягивающую силу $p = P/s$, то получаются следующие выражения для потенциальной энергии J растянутой проволоки

$$\begin{aligned} J &= \frac{\alpha L_0}{2s} P^2 = \frac{1}{2} P \Delta L_0 \Big| \dots \dots \dots (10) \\ J &= \frac{1}{2} \alpha L_0 p^2. \end{aligned}$$

При $L = 1$, $s = 1$ и $p = \sqrt{2}$ имеем $J = 1$. Это показывает, что коэффициент растяжения численно равен потенциальной энергии единицы длины проволоки площадью поперечного сечения которой равна единице и к которой приложена растягивающая сила, равная $\sqrt{2}$ единице силы.

Для опытного определения модуля Юнга, одной из важнейших физических величин характеризующих свойства данного вещества, закручивают стержень или проволоку из испытуемого вещества так, как

показано на рис. 354. Къ проволоку прикрѣпляютъ наверху и внизу два знака въ видѣ черточекъ или весьма тонкихъ проволочныхъ колечекъ, на которыхъ видна горизонтальная свѣтлая линия при боковомъ ихъ освѣщеніи.

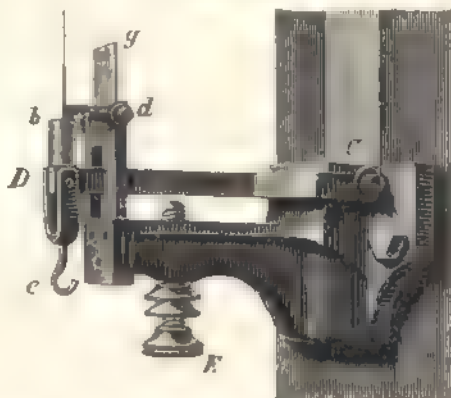
Рис. 355.



На эти знаки устанавливаютъ горизонтальныя нити окулярныхъ микрометровъ двухъ зрительныхъ трубъ катетометра (стр. 270) до и послѣ нагрузки. Разность перемѣщений двухъ значковъ, которыя опредѣляются по способу, изложенному на стр. 267, даетъ намъ увеличеніе ΔL_a длины L_a проволоки, заключающейся между двумя знаками. Измѣривъ еще диаметръ проволоки (стр. 266), мы получимъ λ и наконецъ по формулѣ (9) величину модуля E .

На рис. 355 изображенъ весьма удобный приборъ В. В. Термантова, служащій для опредѣленія модуля Юнга. Къ доскѣ AB прикрѣплены два выступа, поддерживающіе верхній и нижній концы проволоки ab , растяженіе которой изслѣдуется. Устройство нижней части прибора пред-

Рис. 356.



ставлено въ увеличенномъ видѣ на рис. 356, но съ противоположной стороны, такъ что доска AB приходится справа, а нижній конецъ b проволоки слѣва. Средняя часть проволоки снабжена особымъ приспособленіемъ FH , которое служитъ для опредѣленія такъ наз. модуля сдвига; мы это отдѣльно изобразимъ и опишемъ въ § 15. Верхній конецъ a проволоки прикрѣпленъ къ стержню ac , который проходитъ черезъ вертикальный каналъ и можетъ быть закрѣпленъ при помощи винта λ . Нижний конецъ b проволоки прикрѣпленъ къ цилиндру, находящемуся на концѣ выступа CD .

Нижний конецъ b проволоки прикрѣпленъ къ цилиндру, находящемуся на концѣ выступа CD .

свободно вращающегося около конца C . Грузъ, привѣшенный къ крючку e , вызываетъ удлинение проволоки, т.-е. понижение конца D выступа CD и находящагося на немъ цилиндра Db . Другой выступъ, расположенный ниже CD , снабженъ вертикальною рамою, обхватывающей выступъ CD . Около верхняго края этой рамы вращаются свободно неизмѣнно связанными между собою вертикальное зеркальце q и горизонтальная треугольная пластинка къ нижней сторонѣ которой припаянъ маленький шарикъ, которымъ она свободно опирается на верхнее основание цилиндрика Db . Когда при нагрузкѣ проволоки нижній конецъ bD опускается на величину ΔL_0 , то шарикъ опускается на такую же величину; вследствие этого треугольная пластинка поворачивается на некоторый уголъ α около оси d и на такой же уголъ поворачивается зеркальце q . Оно при этомъ наклонится влево. Если расстояние отъ точки касанія шарика до оси d обозначить черезъ r , то $tg\alpha = \frac{\Delta L_0}{r}$. Цилиндръ P (рис. 355) служитъ постоянной нагрузкою (на рис. 366 онъ не изображенъ). Грузъ Q , служащій для растяжения проволоки, привѣшивается къ крючку h на нижнемъ концѣ цилиндра P . Чтобы это привѣшивание груза Q не вызывало опусканія верхняго конца a проволоки, его сперва прикрѣпляютъ, какъ показано на рис. 355 къ стержню km , прикрѣпленному къ двумъ шпиральмъ fm и ik , вершніе концы которыхъ присоединены къ горизонтальному стержню q . Такимъ образомъ нагрузка верхней части прибора, а слѣд. и положеніе точки a не мѣняется при перенесеніи груза Q изъ положенія, изображеннаго на рис. 355, на крючекъ h и обратно. Чтобы привѣшивание груза Q къ крючку h не вызывало лишннихъ толчковъ повертываютъ головку E винта настолько, чтобы выступъ CD опирался на винтъ; въ этомъ случаѣ растяженіе проволоки невозможно. Привѣсивъ Q къ крючку h , повертываютъ E въ обратную сторону, вследствие чего винтъ опускается, выступъ CD перестаетъ на него опираться и грузъ Q постепенно и безъ толчковъ вызываетъ искомое удлиненіе ΔL_0 проволоки.

Для измѣренія ΔL пользуются способомъ трубы и шкалы (стр. 275). Зрительная труба устанавливается на некоторомъ разстояніи отъ прибора такъ, чтобы ось трубы приблизительно совпала съ нормалью къ зеркальцу q . Рядомъ съ трубою устанавливаютъ вертикальную шкалу, дѣленія которой видны черезъ трубу въ зеркаль q . Если l разстояніе отъ шкалы до зеркальда и n число дѣленій шкалы, прошедшихъ мимо горизонтальной нити окуляра при растяженіи проволоки, то уголъ α наклона зеркальда опредѣляется изъ равенства, см. (2) стр. 275.

$$tg 2\alpha = \frac{n}{l}.$$

Опредѣливъ отсюда α , мы найдемъ искомое удлиненіе ΔL_0 изъ указанной выше формулы

$$tg \alpha = \frac{\Delta L}{r}.$$

При малыхъ углахъ α можно тангенсы замѣнить углами и тогда имѣемъ равенство

$$\frac{\Delta L_0}{r} = \frac{n}{2l} \dots \dots \dots (11)$$

въ которомъ n , l и r извѣстны; разстояніе r приблизительно равно 15 мм. Опредѣливъ ΔL_0 , мы найдемъ, какъ было показано выше, модуль Юнга E по формулѣ (9).

Съ совершенно другими способами опредѣленія E мы познакомимся впоследствии въ ученіи о звукѣ.

§ 6. Разрывъ, абсолютное сопротивленіе, числовыя величины.

Увеличивая растягивающую силу p , мы доводимъ стержень или проволоку до разрыва. То значеніе p , величины $p = \frac{P}{s}$, при которомъ происходитъ разрывъ, служитъ мѣрою такъ наз. абсолютнаго сопротивленія вещества. Числовыя величины показываютъ, что абсолютное сопротивленіе почти всегда несравненно меньше величины E , которая соответствуетъ теоретическому удвоенію длины стержня.

Мы приведемъ ниже значенія для E , p_1 (растягивающая сила при достиженіи предѣла упругости) и p_2 (разрывъ) въ килогр. на кв. мм. поперечнаго сѣченія. Тѣ-же величины получатся въ *C. G. S.* единицахъ, т.-е. въ динахъ на кв. см., при умноженіи ихъ на $981 \cdot 10^3$, ибо килогр. = 1000 гр. = $981 \cdot 10^3$ динавъ (стр. 78); даѣе кв. см. = 100 кв. мм., и потому численное значеніе въ *C. G. S.* единицахъ увеличится еще въ 10^2 разъ. Во многихъ формулахъ удобнѣе принимать метръ за единицу длины, въ этомъ случаѣ E должно быть отнесено къ кв. метру площади поперечнаго сѣченія, и потому численное его значеніе увеличивается въ 10^4 разъ. Таки значенія для E приходится вводить въ формулы, встрѣчающіяся въ ученіи о распространеніи колебаній въ упругой твердой средѣ, а слѣд. напр. въ формулахъ акустики.

Приведемъ прежде всего рядъ чиселъ E , p_1 и p_2 , чтобы показать огромную, существующую между ними разницу.

	E $\frac{\text{кгр.}}{\text{кв. мм.}}$ Модуль упругости.	p_1 $\frac{\text{кгр.}}{\text{кв. мм.}}$ Предѣлъ упругости.	p_2 $\frac{\text{кгр.}}{\text{кв. мм.}}$ Разрывъ. (Абсол. сопротивл.)	t° Темпер.
Свинецъ	1800	0.25	2.2	15°
»	1630	—	—	100
Желѣзо жесткое . .	20870	32	63	15
» мягкое	20790	5	48	15
» »	1770	—	—	100
Мѣдь жесткая . . .	12450	12	40	15
» мягкая	10520	3	31	15
» »	9830	—	—	100
» »	7860	—	—	200

Платина жесткая .	17040	26	34	15°
» мягкая .	15518	14	25	15
» » .	14180	—	—	100
» » .	12960	—	—	200
Сталь	22000	33	70	15
Серебро жесткое .	7270	11	29	15
» мягкое .	7140	3	16	15

Большинство этих чисел взято из определений Wertheim'a.

Auerbach определил (1896) модуль E для некоторых весьма твердых веществ и получил при этом огромные числа, доходящие напр. для корунда до 52000, т. е. до числа, превосходящего в 2.5 раза модуль упругости стали. Приводим некоторые из полученных им чисел:

	$E \frac{\text{кгр.}}{\text{кв. мм.}}$		$E \frac{\text{кгр.}}{\text{кв. мм.}}$
Корунд	52000	Апатитъ оси	13800
Браз. топазъ	30200	Кварцъ оси	10300
Саксонск. топазъ	28100	Плавлен. шпатъ	9110
Бериллъ \perp къ оси	23200	Известков. шпатъ	8440
Бериллъ оси	21100	Адуляръ	8120
		Стекла	{ отъ 4700 до 7950

Модуль Юнга сплавов приблизительно равен среднему из модулей его составных частей.

Для дерева получаются весьма различные числа, смотря по тому будет ли стержень вырезан параллельно волокнамъ, или перпендикулярно къ нимъ; во второмъ случаѣ получаются опять разные числа въ зависимости отъ того, вырезанъ ли стержень по направлению радиуса ствола или на некоторомъ разстоянии отъ оси, перпендикулярно къ радиусу. Вотъ некоторые числа:

	$E \frac{\text{кгр.}}{\text{кв. мм.}}$		
	волокнамъ.	\perp волокнамъ, по радиусу.	\perp волокнамъ, \perp къ радиусу.
Тополь	517	73	39
Сосна	564	98	29
Дубъ	921	189	130
Букъ	980	270	159
Береза	997	81	155
Кленъ	1021	157	73
Ель	1113	95	31

Villari изслѣдовалъ каучукъ и нашелъ, что отъ $\Delta L_0 = 0$ до $\Delta L_0 = L_0$ модуль E довольно постояненъ и равенъ 0.07 — 0.10; когда ΔL_0 растеть

отъ L_0 до $3L_0$ ($L = 4L_0$) модуль E растетъ отъ 0.1 до 300: когда $\Delta L_0 > 3L_0$, то модуль опять довольно постояненъ, а именно $E = 300$ до 350.

Съ возрастаніемъ температуры модуль E вообще уменьшается, напр. для мѣди отъ 10520 при 15° до 7860 при 200° .

Для желѣза и стали Wertheim замѣтилъ увеличеніе модуля на 5.2% при нагреваніи отъ 0° до 100° , и уменьшеніе на 19.1% при нагреваніи отъ 100° до 200° . Kupfer нашелъ для Fe, Cu и латуни уменьшеніе E на 5.5%, 8.2% и 3.9% при нагреваніи отъ 0° до 100° . Подобные же результаты нашли Kohlrausch и Loomis, Tomlinson, Noyes и, наконецъ, A. M. Mayer. Приводимъ численные результаты послѣдняго изъ названныхъ ученыхъ; при нагреваніи отъ 0° до 100° уменьшается E на p' .

	P		P
Стекло St Gobain . .	1.16	Алюминій . .	5.5
Разные сорта стали . .	2.24 3.09	Серебро . .	2.47 (отъ 0° до 60°)
Латунь	3.73	Цинкъ . . .	6.04 (отъ 0° до 62°).

H. A. Гезелхусъ нашелъ, что водородъ, поглощенный напладомъ и его сплавами (75% Pd и 25% Pt, Au или Ag) уменьшаетъ ихъ коэффициентъ упругости.

Изъ новѣйшихъ изслѣдованій упомянемъ работы Winkelmann'a и Schott'a, которые для различныхъ сортовъ стекла нашли числа E отъ 4699 до 7592 кгр. на кв. мм., а для абсолютнаго сопротивленія p , числа отъ 3.5 до 8.5 клгр.

Въ 1891 г. появилась работа J. O. Thomson'a, изслѣдовавшаго зависимость удлиненія ΔL отъ растягивающаго груза P . Оказалось, что пропорциональность между этими величинами можетъ быть допущена лишь въ самыхъ тѣсныхъ предѣлахъ, и что болѣе точная зависимость выражается эмпирическаго формулою вида $\Delta L = aP + bP^2 + cP^3$, гдѣ a , b и c постоянныя числа для данной проволоки.

Georg S. Meyer нашелъ для проволоки изъ Al необыкновенно большое отклоненіе отъ положенія Hooke'a (стр. 555). Для удлиненія ΔL проволоки ($L_0 = 18315$ мм.) онъ нашелъ формулу

$$\Delta L_0 = 62,863 p + 14,312 p^2$$

для p возрастающаго отъ 0 до 0.3 клгр. Коэффициентъ при p^2 оказывается необыкновенно большимъ.

Обратимся къ абсолютному сопротивленію p , для котораго нѣкоторыя числовыя величины уже были приведены на стр. 564—565. Изъ этихъ чиселъ ясно видно, что сопротивленіе разрыву жесткой (тянutoй) проволоки значительно больше сопротивленія проволоки мягкой (отпущенной).

Слѣдуетъ отличать абсолютное сопротивленіе при кратковременномъ и при весьма продолжительномъ дѣйствіи растягивающей силы p ; во второмъ случаѣ абсолютное сопротивленіе значительно меньше какъ видно изъ слѣдующихъ чиселъ Wertheim'a:

	$P_2 \frac{\text{кгр.}}{\text{кв. мм.}}$	
	I. Медленный разрывъ.	II. Быстрый разрывъ.
Свинець литой.	1,25	2 21
Олово литое.	3,40	4,16
Олово отпущенное.	1,70	3,60
Цинкъ тянутый	12,80	15,77
Мѣдь тянутая	40,30	41,00
Желѣзо тянутое	61,10	62,5 - 65,1
Сталь тянутая.	70,00	85,9 - 99,1
Сталь отпущенная	40,00	53,90.

При достаточной длинѣ всякій стержень, висящій вертикально внизъ, долженъ подвергнуться разрыву отъ собственнаго вѣса. Это случится при слѣдующей длинѣ стержней: Pb — 5 метровъ, Zn — 11 м., Sn — 50 м., Ag — 263 м., Fe — 550 м.

Абсолютное сопротивленіе металловъ въ значительной степени мѣняется отъ иногда весьма небольшихъ примѣсей. Вотъ примѣры:

Чистое золото	$p_2 = 10 \frac{\text{кгр.}}{\text{кв. мм.}}$
99,8% Am + 0,2% K или Bi	0,8
» » + 0,2% Te или Pb	8
» » + 0,2% Th , Sn , Sb	10
» » + 0,2% всѣхъ другихъ металловъ.	11—14.

Съ повышеніемъ температуры уменьшается абсолютное сопротивленіе мѣди по формулѣ $p_2 = 29,40 - 0,037 t$. Неправильно мѣняется p_2 съ температурой для желѣза и стали, обнаруживая нѣсколько максимумовъ и минимумовъ.

Девар изслѣдовалъ абсолютное сопротивленіе проволокъ при весьма низкой температурѣ въ -182° , помѣщая ихъ въ жидкій воздухъ. Приводимъ его числа:

Диаметръ проволоки 2,49 мм.			Диаметръ проволоки 5,1 мм.		
	$+15^\circ$	-182°		$+15^\circ$	-182°
Мягкая сталь.	191кгр.	318кгр.	Олово	91кгр.	177кгр.
Желѣзо.	145	304	Свинець	35	77
Мѣдь.	91	136	Цинкъ	16	12
Латунь	141	200	Ртуть	0	14
Нейзильберъ	213	272	Висмутъ	27	14
Золото	116	154	Сурьма	28	14
Серебро	150	191	Наяльн сплавъ	136	293
			Сплавъ Wood'a	64	204.

Сопротивленіе разрыву палладевой проволоки уменьшается, когда она поглотила водородъ.

Для дерева получаются три различныхъ значенія абсолютнаго сопротивленія p_2 , соответственно тремъ значеніямъ модуля E (стр. 565).

	$p_2 \frac{\text{кгр.}}{\text{кв. мм.}}$		
	волокнамъ.	⊥ волокнамъ, по радіусу.	⊥ волокнамъ, ⊥ къ радіусу.
Тополь. . . .	1,97	0,15	0,21
Сосна	2,48	0,26	0,20
Кленъ	3,58	0,72	0,37
Ель.	4.18	0,22	0,30
Береза. . . .	4.30	0,82	1.06
Дубъ	6,49	0.58	0.41

Весьма большой интересъ представляетъ вопросъ о зависимости абсолютнаго сопротивленія стержня или проволоки отъ площади поперечнаго сѣченія s . Обозначая черезъ P_2 растягивающій грузъ, при которомъ происходитъ разрывъ, мы считали величину $p_2 = \frac{P_2}{s}$ за величину, уже не зависящую отъ s . Однако Quincke показалъ, что для тонкихъ проволокъ сила P_2 выражается формулою

$$P_2 = as + bz \dots \dots \dots (12)$$

гдѣ z периметръ проволоки, a и b двѣ постоянныя. Оказывается, что сила P_2 состоитъ изъ двухъ частей, изъ которыхъ первая пропорциональна площади поперечнаго сѣченія, а вторая пропорциональна периметру. Объясняется это тѣмъ, что поперечностный слой проволоки, особенно тянутой, обладаетъ особымъ натяженіемъ, онъ вѣроятно плотнѣе остальной массы и противопоставляетъ особое сопротивленіе разрыву. Чѣмъ тоньше проволока, тѣмъ болѣеую роль играетъ второй членъ въ формулѣ (10), ибо s уменьшается пропорционально квадрату, а z — первой степени радіуса проволоки. Этимъ объясняется, почему весьма тонкіе проволоки или листочки обладаютъ сравнительно весьма большимъ абсолютнымъ сопротивленіемъ. Такими обладаютъ тонкія стеклянныя нити, которыя однако для приывѣса къ нимъ тѣлъ въ физическихъ приборахъ (гальванометрахъ, электрометрахъ и др.) служить не могутъ вследствие большого въ нихъ упругаго послѣдствія (§ 21).

Въ 1889 г. Boys изобрѣлъ способъ приготоленія кварцевыхъ нитей: стрѣла сильнаго лука скрѣпляется съ кускомъ кварца, который размѣщается въ пламени гремучаго газа, при отпусканіи тетивы получается тончайшая кварцевая нить. Толщина этихъ нитей доходить до 0,0003 мм., онѣ обладаютъ замѣчательнымъ абсолютнымъ сопротивленіемъ. Такъ нить, толщина которой 0,0018 мм. легко выдерживаетъ грузъ въ 2 гр., что дало бы 820 кгр. на кв. мм., между тѣмъ какъ при $p = \frac{80 \text{ кгр.}}{\text{кв. мм.}}$ почти всѣ сорта стали подвергаются разрыву.

Quincke опредѣлилъ значеніе величины b въ (12) и притомъ въ граммахъ на 1 мм. периметра: онъ нашелъ такія числа:

<i>Zn</i>	<i>Al</i>	<i>Cu</i>	<i>Ag</i>	<i>Pt</i>	<i>Fe</i>	Сталь
$b = 557$	1592	2388	2388	3023	5731	6685
						$\frac{\text{гр.}}{\text{мм.}}$

§ 7. Абсолютное сопротивление одностороннему сдавливанию. На основании положения 2 стр. 555 мы допускаемъ, что формулы (3) до (9) остаются вѣрными и при отрицательныхъ P и p , т.-е. когда стержень (цилиндръ, призма) подвергается продольному сжатию; изъ применимости ограничена однако крайне малыми значениями величины ΔL . Повѣстно, почему мы модуль Юнга назвали также модулемъ сжатия.

При увеличении сжимающей силы p настаетъ моментъ, когда преодолѣвается связь между частицами тѣла и оно раздавливается, иногда при этомъ со взрывомъ превращаясь въ мелкій порошокъ (стекло). Значеніе при этомъ величины p можно назвать абсолютнымъ сопротивленіемъ одностороннему сдавливанию. Для всѣхъ тѣлъ эта величина больше разсмотрѣннаго выше p_2 ; исключеніе представляетъ дерево.

На стр. 566 были приведены числа E и p_2 , найденныя Winkelmann'омъ и Schott'омъ для различныхъ сортовъ стекла. Для сопротивленія сдавливанию они нашли отъ 60,6 — 120,8 килогр. на кв. мм. Приводимъ еще нѣкоторыя числа для сопротивленія одностороннему сжатию: чистуя 57 — 102, мѣдь 30 — 45, гранитъ 12 — 22, мраморъ 6 — 12, известнякъ твердый 14, мягкій 1, кирпичъ 0,5 — 2, дубъ 7, сосна 4,8, береза 4,5, тополь 3,6; всѣ числа выражаютъ килогр. на кв. мм. поверхности.

§ 8. Поперечное сжатіе, коэффициентъ Пуассона. Продольное растяженіе стержня или проволоки всегда сопровождается поперечнымъ сжатіемъ; растягиваемый стержень утончается, его первоначальный диаметръ d_0 уменьшается на нѣкоторую величину Δd_0 , для которой можно положить

$$\Delta d = \beta d_0 p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

аналогично (4) стр. 560. Множитель β назовемъ коэффициентомъ поперечнаго сжатія, онъ численно равенъ относительному уменьшенію толщины $\left(\frac{\Delta d_0}{d_0}\right)$ при единичъ растягивающей силѣ. Для новой толщины $d = d_0 - \Delta d_0$ имѣемъ

$$d = d_0 (1 - \beta p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Въ теоріи упругости играетъ весьма важную роль отношеніе β и α , т.-е. величина

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta d_0}{d_0} : \frac{\Delta L_0}{L_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Это отношеніе поперечнаго сжатія къ продольному растяженію носить еще названіе коэффициента Пуассона (Poisson). Мы увидимъ, что не только всегда $\beta < \alpha$, т.-е. $\sigma < 1$, но что для всѣхъ тѣлъ

$$\sigma < \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Вычислимъ измѣненіе Δv , первоначальнаго объема v стержня подъ влияніемъ растягивающей силы p . Мы имѣемъ $v_0 = \frac{\pi}{4} L_0 d_0^2$; новый объемъ равенъ $v = \frac{\pi}{4} L d^2$, или см. (5) стр. 560 и (14). $v = \frac{\pi}{4} L_0 d_0^2 (1 - \beta p)^2 (1 + \alpha p)$, или наконецъ

$$v = v_0 (1 - \beta p)^2 (1 + \alpha p). \quad (17)$$

Для весьма малыхъ αp и βp можно написать

$$v = v_0 \{1 + (\alpha - 2\beta)p\}.$$

или

$$v = v_0 \{1 + \alpha(1 - 2\sigma)p\}. \quad (18)$$

Написавъ, аналогично (4) и (13)

$$\Delta v_0 = \eta v_0 p. \quad (19)$$

имѣемъ

$$\eta = \alpha(1 - 2\sigma). \quad (20)$$

Величину η можно назвать коэффициентомъ объемнаго расширенія при растяженіи. Этою же величиною опредѣляется объемное сжатіе при одностороннемъ продольномъ сжатіи, которое всегда сопровождается продольнымъ расширеніемъ. Призма, подверженная нормальному давленію на основаніи, утолщается; происходитъ боковое выпучиваніе.

Такъ какъ объемъ стержня при его растяженіи всегда растетъ, то мы должны имѣть $\eta > 0$, откуда слѣдуетъ неравенство $\sigma < \frac{1}{2}$, см. (16). Это относится къ малымъ значеніямъ αp ; при значительныхъ растяженіяхъ мы должны обратиться къ формулѣ (17), которая даетъ (вставляемъ $\beta = 2\sigma$)

$$\Delta v_0 = v_0 \{ (1 + \alpha p)(1 - 2\sigma \alpha p) - 1 \}.$$

$\Delta v_0 = 0$ при $\alpha p = 0.001$, когда $\sigma = 0.4996$; при $\alpha p = 0.03$ объемъ не мѣняется, если $\sigma = 0.489$ и т. д. Poisson вывелъ теоретически, что для всѣхъ однородныхъ и изотропныхъ тѣлъ должно быть

$$\sigma = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Существуетъ цѣлый рядъ различныхъ способовъ опредѣленія коэффициента σ и мы далѣе съ ними познакомясь (§ 15 и § 17). Теперь укажемъ на числовые результаты, полученные различными учеными.

	σ
Сталь закаленная	0.294 (Kirchhoff,
„	0.294 (Окатовъ)
„	0.296 (Schneebeli)
Сталь отварная	0.304 (Окатовъ)
„	0.253 — 0.333 (другіе наблюдатели)

Желѣзо	0.243 — 0.310
Латунь	0.226 — 0.469
Мѣдь	0.348
» (гальванопластич.) . . .	0.250 (Voigt)
Свинецъ	0.375
Цинкъ	0.205
Стекло	0.210 — 0.255
Эбонитъ	0.389
Парафинъ	0.50
Каучукъ (малыя силы) . . .	0.37 — 0.64 (Roentgen)
» »	0.50 (Amagat)
» (большыя силы)	0.31 — 0.41
Пробка	0.0

Smoluchowsky находитъ для воска, парафина и спермацета σ между 0.4 и 0.44.

Съ повышеніемъ температуры отъ 0° до 100° величина σ растетъ для Pt на 5.5%, Fe — 3.7%, Au — 2.5%, Ag — 12.2%, Al — 13.7% по изслѣдованіямъ Katzenelson'a, который для этихъ металловъ находитъ слѣдующія значенія: Pt — 0.16, Fe — 0.27, Au — 0.17, Ag — 0.37, Al — 0.13.

Воск находитъ для σ и для измѣненія q (въ процентахъ) этой величины при нагреваніи отъ 0° до 100°:

	σ	$q\%$		σ	$q\%$
Fe	0.256	2	Ni	0.329	2.4
Cu	0.346	4	Ag	0.346	10

Всѣ приведенныя числа показываютъ, что σ не равно $\frac{1}{4}$, какъ того требуетъ теорія Poisson'a, но колеблется въ весьма широкихъ предѣлахъ. Нельзя допустить, чтобы это происходило только вслѣдствіе неоднородности или анизотропности изслѣдованныхъ образцовъ различныхъ матеріаловъ. Гораздо естественнѣе допустить, что начиная отъ жидкостей, для которыхъ теоретически говоря $\sigma = \frac{1}{2}$, эта величина принимаетъ всевозможныя значенія для различныхъ твердыхъ веществъ.

Интересныя крайности представляютъ пробка и каучукъ; для первой $\sigma = 0$, она сжимается безъ бокового выпучиванія; для каучука $\sigma = \frac{1}{2}$, онъ сжимается и растягивается безъ измѣненія объема. Мы къ этому еще возвратимся.

Непосредственные опыты Cagniard-Latour'a доказываютъ, что $\eta > 0$, что объемъ проволоки при ея растяженіи увеличивается. Его приборъ изображенъ на рис. 357. Испытуемая проволока находилась внутри трубки съ водою; по измѣненію уровня воды можно было судить объ увеличеніи объема проволоки, остающейся при натяженіи внутри трубки.

Однако въ данномъ случаѣ призма $mnsr$ не можетъ раздаться. Давленіе p на плоскостяхъ mn и rs вызоветъ стремленіе боковой поверхности къ выпучиванію, вслѣдствіе чего въ этой поверхности явится давленіе q на единицу поверхности окружающей массы, которая, обратно, будетъ производить такое же давленіе q на боковую поверхность призмы, вполне уничтожающее ся стремленіе къ выпучиванію. Это боковое давленіе вызоветъ увеличеніе размѣровъ призмы по направленію, перпендикулярному къ q , т. е. увеличеніе длины призмы, которая слѣд. окажется больше величины L , опредѣляемой уравненіемъ (22). Сжатіе слоя будетъ меньше сжатія призмы, вслѣдствіе невозможности раздаться по сторонамъ. Первоначальная толщина L_0 слоя превратится въ

$$L' = L_0(1 - \alpha'p) (24)$$

гдѣ $\alpha' < \alpha$. Обратную величину обозначимъ черезъ E'

$$E' = \frac{1}{\alpha'} (25)$$

Рис. 359.

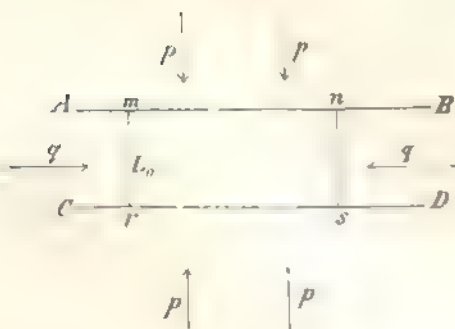
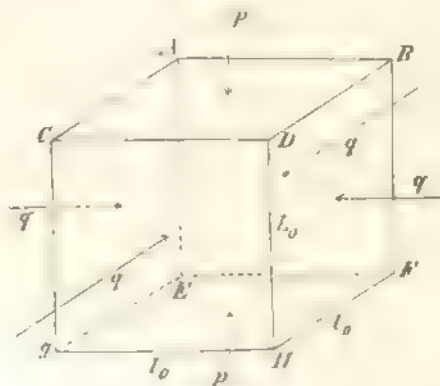


Рис. 360.



Очевидно $E' > E$. Величины α' и E' назовемъ коэффициентомъ и модулемъ односторонняго сжатія слоя. Чтобы найти связь между α и α' съ одной — E и E' съ другой стороны, обратимся къ рис. 360. Допустимъ что изъ разсматриваемаго слоя вырѣзанъ прямоугольный параллелепипедъ съ квадратнымъ основаниемъ, и съ ребрами $HD = L_0$ (толщина слоя) и $HE = HG = l$. На единицу поверхности оснований дѣйствуетъ сила p , на единицу боковыхъ поверхностей сила q . По условію величина l_0 должна оставаться неизмѣнною. Посмотримъ во что обратится L_0 подъ влияніемъ всѣхъ давленій дѣйствующихъ на параллелепипедъ. Вслѣдствіе давленій p длина L , превращается въ $L_0(1 - \alpha p)$. Два давленія q справа и слева (на $DBFH$ и $CAEG$) производятъ сами по себѣ относительное укороченіе линіи GH , равное αq , а потому относительное удлинненіе ребра $HD = L_0$, равное αq , такъ что $L(1 - \alpha p)$, на основаніи положенія 3 стр. 555, превра-

тится въ $L(1 - \alpha p)(1 + \alpha \tau q)$. Два давления q на переднюю и заднюю стороны $CDHG$ и $ABEF$ вызываютъ еще такое же относительное удлиненіе ребра DH окончательная длина L' котораго равна

$$L' = L_0(1 - \alpha p)(1 + \alpha \tau q)^2.$$

или при малыхъ αp

$$L' = L \left(1 - \alpha p \left(1 - 2 \frac{q}{p} \tau \right) \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Сравнивая это съ (24), мы видимъ, что

$$\tau' = \alpha \left(1 - 2 \frac{q}{p} \tau \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Отношеніе $\frac{q}{p}$ найдемъ изъ условия, что ребро $GH = l$ должно сохранить неизмѣнную длину. Его измѣненіе тройное: давленія q на $DBFH$ и $AEGC'$ вызовутъ относительное уменьшеніе длины l_0 , равное αq , давленія q на $CDHG$ и $ABFE$ будутъ имѣть слѣдствіемъ относительное увеличеніе ребра $GH = l$, равное $\alpha \tau q$, и наконецъ давленіи p — относительное его увеличеніе, равное αp . Отсюда слѣдуетъ, что l_0 превратится въ

$$l = l_0(1 - \alpha q)(1 + \alpha \tau q)(1 + \alpha p),$$

или

$$l = l_0(1 - \alpha q + \alpha \tau q + \alpha p).$$

Условіе $l = l_0$ дасть, если сократить на α ,

$$-q + \tau q + p = 0.$$

т.-е.

$$\frac{q}{p} = \frac{\tau}{1 - \tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Эта интересная формула опредѣляетъ отношеніе между вѣдшимъ давленіемъ p на стороны слоя и тѣмъ боковымъ давленіемъ q , которое возникаетъ внутри слоя. Подставляя (28) въ (27), получаемъ

$$\alpha' = \alpha \left(1 - \frac{2\tau^2}{1-\tau} \right) = \alpha \frac{1-\tau-2\tau^2}{1-\tau},$$

или, окончательно

$$\tau' = \frac{(1+\tau)(1-2\tau)}{1-\tau} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Для модуля E' односторонняго сжатія среды имѣемъ

$$E' = \frac{1-\tau}{(1-\tau)(1-\frac{2\tau}{1-\tau})} E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Формулами (28), (29) и (30) вполне рѣшается весьма важный вопросъ о сжатіи неопредѣленно большаго слоя.

Сопоставимъ нѣкоторыя числовыя величины отношеній $q:p$, $\alpha':\alpha$ и $E':E$ въ зависимости отъ значенія α :

α	q	α	E'
0 (Для пробки) . . .	0	α	E
$\frac{1}{4}$ (По Poisson'у)	$\frac{1}{2} p$	$\frac{5}{6} \alpha$	$\frac{6}{5} E$
$\frac{1}{3}$ (По Wertheim'у) . . .	$\frac{1}{2} p$	$\frac{7}{2} \alpha$	$\frac{7}{2} E$
0,4	$\frac{2}{3} p$	$\frac{7}{15} \alpha$	$\frac{15}{7} E$
$\frac{1}{2}$ (Жидкости, каучукъ). .	p	0	∞

Итакъ боковое давленіе q , которое въ жидкостяхъ и въ каучукѣ равно дѣйствующему давленію p , въ другихъ твердыхъ тѣлахъ по Poisson'у должно равняться $\frac{1}{3} p$, по Вертгейму $\frac{1}{2} p$; для пробки оно равно нулю, но крайней мѣрѣ въ нѣкоторыхъ предѣлахъ. Изъ таблицы видно, во сколько разъ усиленіе, необходимое, чтобы сжать слой на нѣкоторую долю, напр. на 0,0001 его толщины, больше усиленія, при которомъ призма изъ того же матеріала укорачивается на такую же долю, первое измѣряется величиной E' , второе—величиной E .

§ 10. Коэффициентъ всесторонняго сжатія. Объемъ v_0 тѣла уменьшается подъ влияніемъ давленія p , равномерно дѣйствующаго на всю его поверхность, на нѣкоторую величину, абсолютное значеніе которой обозначимъ черезъ Δv . Для малыхъ деформаций мы, согласно положенію 1 стр. 555, можемъ принять выраженіе вида

$$\Delta v = \gamma p \quad (31)$$

гдѣ γ коэффициентъ объемнаго всесторонняго сжатія, онъ равенъ

$$\gamma = \frac{\Delta v_0}{v_0} \frac{1}{p} \quad (32)$$

Новый объемъ $v = v_0 - \Delta v_0$, т.-е.

$$v = v_0(1 - \gamma p) \quad (33)$$

Чтобы найти связь между γ и α обратимся опять къ рис. 360, полагая въ немъ $q = p$ и, для простоты, $l_0 = L_0$, т.-е. предположимъ, что сжимаемый объемъ есть кубъ; очевидно $v_0 = L_0^3$. Каждое ребро претерпѣваетъ одно уменьшеніе αp и два удлинненія $\alpha \alpha p$, послѣдствие чего L превратится въ

$$L = L_0(1 - \alpha p)(1 + \alpha \alpha p)^2,$$

или, при малыхъ αp

$$L = L_0 \{ 1 - \alpha(1 - 2\alpha)p \} \quad (34)$$

что получается и прямо изъ (26), полагая $q = p$. Новый объемъ куба $v = L^3$, слѣд. мы имѣемъ, полагая $L_0^3 = v_0$

$$v = v_0 \{1 - \alpha(1 - 2\sigma)p\}^3.$$

При малыхъ αp это дастъ

$$v = v_0 \{1 - 3\alpha(1 - 2\sigma)p\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Сравнивая эту формулу съ (33), мы получаемъ окончательно для коэффициента всесторонняго сжатія выражение

$$\gamma = 3\alpha(1 - 2\sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

$\sigma = \frac{1}{4}$ дастъ $\gamma = \frac{3}{2} \alpha$; при $\sigma = \frac{1}{3}$ (Wertheim) имѣемъ $\gamma = \alpha$.

Величину, обратную γ , назовемъ модулемъ всесторонняго сжатія и обозначимъ ее черезъ K . Имѣемъ

$$K = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{3\alpha(1 - 2\sigma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

или, такъ какъ $E = \frac{1}{\alpha}$,

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

При $\sigma = \frac{1}{4}$ имѣемъ $K = \frac{2}{3} E$, при $\sigma = \frac{1}{3}$ получаемъ $K = E$, т. е. равенство модулей всесторонняго и односторонняго сжатія (призмы, а не сфера, для котораго E замѣняется величиною $E' = \frac{3}{2} E$, см. табл. стр. 575). Величину K называютъ иногда модулемъ объемной упругости.

Обращаясь къ вопросу объ опредѣленіи коэффициента γ , укажемъ сперва на важное обстоятельство: если стѣнки сосуда подвергнуты одинаковому давленію снаружки и изнутри то емкость сосуда уменьшится настолько, насколько уменьшилось бы соответствующее ей пространство въ случаѣ тѣла сплошняго.

(Для доказательства предположимъ что мы имѣемъ сплошной шаръ (рис. 361), подверженный равному давленію p . Проведемъ двѣ параллельныя касательныя mn и pq и рассмотримъ тонкій слой шара, определяемый большимъ кругомъ, проходящимъ черезъ точки касанія s и o . Раздѣлимъ шаръ въ половинѣ на полоски параллельныя mn . Подъ влияніемъ внѣшняго давленія p всѣ эти полоски, межд. прочимъ, сожмутся, стѣсняются уже. Это относится и къ среднимъ частямъ полосокъ, лежащимъ

внутри круга ob . Отсюда слѣдуетъ, что внутренній шаръ который мы мысленно выдѣляемъ изъ массы даннаго шара, подвергается такому-же да-

Рис. 361.



влению p со всехъ сторонъ, какъ и весь шаръ, а отсюда, обратно что этотъ внутренний шаръ производитъ давленіе p на внутреннюю поверхность шаровой оболочки, окружающей его со всехъ сторонъ. Если мы, поэтому, внутренний шаръ уничтожимъ, но зато къ внутренней поверхности остающейся оболочки приложимъ давленіе p , то для самой оболочки ничего не измѣнится, ея вѣншій объемъ и внутренняя емкость уменьшатся настолько же, насколько они уменьшились, когда эта оболочка составляла часть сплошного шара.

Для опредѣленія коэффициента ; всесторонняго сжатія Regnault пользовался пнезометромъ, изображеннымъ на рис. 261 стр. 447. Тамъ же было объяснено, какимъ образомъ можно произвести на внутренний сосудъ V давленіе только снаружи или только изнутри или одновременно снаружи и изнутри. По высотѣ жидкости въ капиллярной трубкѣ, соединенной съ V , можно судить объ измѣненіи емкости сосуда а изъ комбинаціи трехъ указанныхъ наблюденій можно, пользуясь формулами, выводимыми въ теоріи упругости, опредѣлить искомый коэффициентъ сжатія того вещества, изъ котораго сдѣланъ внутренний сосудъ. Приведемъ эти формулы безъ выводовъ, обозначая вездѣ черезъ ΔV , приращеніе первоначальнаго объема V ,

I. Полный шаръ; внутренний радиусъ R , вѣншій R_0 .

1. Давленіе только снаружи

$$\frac{\Delta_1 V_0}{V_0} = \frac{9(1-\sigma)}{2E} \frac{R^3}{R_0^3} p \quad . \quad . \quad . \quad (39,a)$$

2. Давленіе только изнутри

$$\frac{\Delta_2 V_0}{V_0} = \frac{3(1-2\sigma)R_0^3 + \frac{3}{2}(1+\sigma)R^3}{E(R^3 - R_0^3)} p \quad . \quad . \quad . \quad (39,b)$$

3. Давленіе снаружи и изнутри

$$\frac{\Delta_3 V_0}{V_0} = - \frac{3(1-2\sigma)}{E} p = - 7p \quad . \quad . \quad . \quad (39,c)$$

Понятно, что

$$\Delta_3 V_0 = \Delta_1 V_0 + \Delta_2 V_0 \quad . \quad . \quad . \quad (39,d)$$

II. Полный цилиндръ; внутренний радиусъ R , вѣншій R_0 .

1. Давленіе только снаружи

$$\frac{\Delta_1 V_0}{V_0} = \frac{5-4\sigma}{E} \frac{R}{R_0 - R_0^3} p \quad . \quad . \quad . \quad (40,a)$$

2. Давленіе только изнутри

$$\frac{\Delta_2 V_0}{V_0} = \frac{3(1-2\sigma)R_0^2 + 2(1+\sigma)R^2}{E(R^3 - R_0^3)} \quad . \quad . \quad . \quad (40,b)$$

3. Давленіе снаружи и изнутри

$$\frac{\Delta_3 V_0}{V_0} = - \frac{3(1-2\sigma)}{E} p = - 7p \quad . \quad . \quad . \quad (40,c)$$

И здѣсь

$$\Delta_3 V_0 = \Delta_1 V_0 + \Delta_2 V_0 \quad . \quad . \quad . \quad (40,d)$$

Непосредственные наблюдения уровня жидкости въ капиллярной трубкѣ прибора Regnault не даютъ истинныхъ значеній измѣненія емкости сосуда, такъ какъ жидкость подъ влияемъ давления претерпѣваетъ нѣкоторое измѣненіе ΔV_0 объема, определяемое формулою

$$\Delta V = \gamma_1 V_0 p \dots \dots \dots (41)$$

гдѣ γ_1 коэффициентъ объемнаго сжатія жидкости. Это измѣненіе объема прибавляется къ $\Delta_2 V$, и $\Delta_3 V$ во второмъ и третьемъ измѣреніяхъ Regnault. Видимыя или кажущіяся измѣненія объема суть

$$\left. \begin{aligned} \Delta' V_0 &= \Delta_1 V_0 \\ \Delta'' V_0 &= \Delta_2 V_0 - \Delta V_0 \\ \Delta''' V_0 &= \Delta_3 V_0 + \Delta V_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

Подставляя сюда (39) или (40) и (41), получаемъ три уравненія, которыя даютъ намъ γ_1 , т.-е. коэффициентъ сжатія жидкости (см. стр. 448 опыты Grassi) и величины E и α , а затѣмъ и искомое γ на основаніи формулы (36), въ которой $\alpha = \frac{1}{E}$.

Численныя значенія γ получаются различныя, смотря по тому, принимать ли за единицу давления p атмосферу или килогр. на кв. мм. или динъ на кв. сантим. (C. G. S. единицы). Воспользуемся первымъ способомъ измѣренія p , такъ что нѣпослѣдующія числа показываютъ, на какую долю уменьшается объемъ тѣла при увеличеніи вѣншняго давления на одну атмосферу — 10333 килогр. на кв. метръ ≈ 0.010333 килогр. на кв. мм. $\approx 1.0013 \cdot 10^6$ диновъ на кв. сантим.

Наиболѣе точныя изслѣдованія сжимаемости твердыхъ тѣлъ производили Regnault, Voigt и Amagat (1889, 1891).

$\gamma \cdot 10^6$.

Свинецъ	2.761 (Amagat)	Стекло	1.67 (Regnault)
Мѣдь	1.23 (Regnault)	»	2.197 (Amagat)
»	0.857 (Amagat)	Сталь	0.68 (Amagat)
Латунь	1.07 (Regnault)	Каменная соль	4.2 5.0
»	0.953 (Amagat)	Топазъ	0.61 (Voigt)
Горный хрусталь	2.675 (Voigt)	Турмалинъ	0.1128 (Voigt)

§ 11. Модуль свдига. Представимъ себѣ внутри твердаго тѣла двѣ параллельныя плоскости AB и CD (рис. 362), перпендикулярныя къ плос-

Рис. 362.



кости рисунка. Положимъ, что плоскость CD удерживается неподвижно, и что по поверхности AB равномерно распределены силы, параллельныя между собою и расположенныя въ самой плоскости, причемъ на единицу площади приходится сила p . Подъ влияемъ этой силы произойдетъ сдвигъ плоскости AB и всѣхъ промежуточныхъ плоскостей между CD и AB въ сторону самой силы, гдѣлствие чего физическая прямая GE , перпендикулярная ко всѣмъ этимъ плос-

костямъ, приметъ положеніе GE' , образуя некоторый уголъ сдвига ω съ геометрическою нормалію GE къ CD и AB . Произвольная часть EF плоскости AB передвинется въ $E'F'$ и прямоугольный параллелепипедъ $GEFH$ превратится въ косоугольный $GE'F'H$.

Причиной деформации является здѣсь сила, дѣйствующая на единицу площади, или тяга p ; за мѣру деформации, въ данномъ случаѣ сдвига, мы можемъ принять уголъ ω , на который повернулась первоначальная нормаль къ сдвигаемымъ параллельнымъ плоскостямъ. На основаніи положенія 1 стр. 555 мы можемъ положить

$$\omega = nr (43)$$

гдѣ n постоянный для данного вещества множитель который мы можемъ назвать коэффициентомъ сдвига. Обратную величину $N = \frac{1}{n}$ назовемъ модулемъ сдвига; это величина, играющая весьма важную роль. Вводя ее, имѣемъ

$$\omega = \frac{1}{N} p (44)$$

При $\omega = 1$ получаемъ $N = p$, т.-е. модуль сдвига равенъ той тягѣ, подъ вліяніемъ которой получился бы уголъ сдвига ω , равный единицѣ ($\omega = 57' 17'' 44$, '8), еслибы формулы (43) и (44) оказались применимыми къ столь огромнымъ сдвигамъ и еслибы гораздо раньше не были достигнуты сфера предѣла упругости, а затѣмъ и разрывъ самого тѣла.

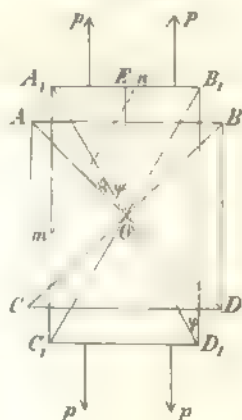
Между модулями E и N и величиною σ существуетъ простое соотношеніе, которое мы теперь и выведемъ. Представимъ себѣ кубъ $ABDC$ (рис. 363), всѣ ребра котораго для простоты принимаемъ равными единицѣ длины, и положимъ, что къ двумъ противоположнымъ сторонамъ AB и CD приложены нормальныя растягивающія силы p , подъ вліяніемъ которыхъ кубъ переходитъ въ прямоугольный параллелепипедъ $A_1B_1D_1C_1$ со сторонами $B_1D_1 = 1 + \alpha p$ и $A_1D_1 = 1 - \alpha p$. Диагональная плоскости CB и A_1D_1 переходятъ къ C_1B_1 и A_1D_1 . Физическая прямая (рядъ частицъ) OB , перпендикулярная къ плоскости CB , составитъ съ новымъ положеніемъ C_1B_1 этой плоскости уголъ A_1OB_1 , отличающійся отъ прямого на $\angle 2\varphi$, гдѣ $\angle \varphi = \angle A_1OA = \angle B_1OB$. Отсюда слѣдуетъ, что плоскости, параллельныя диагональной плоскости CB , претерпѣли сдвигъ, причемъ уголъ сдвига ω равенъ

$$\omega = 2\varphi (45)$$

Величину силы (тяги), дѣйствующей параллельно этимъ плоскостямъ, и производящей сдвигъ, обозначимъ теперь черезъ p_1 , такъ что (44) дастъ для модуля N сдвига

$$N = \frac{p_1}{\omega} = \frac{p_1}{2\varphi} (46)$$

Рис. 363.



Для опредѣленія p_1 рассмотримъ одну изъ сдвинутыхъ плоскостей mn , параллельную C_1B_1 . На нее передается сила, дѣйствующая на часть A_1n основания A_1B_1 , а потому ясно, что на единицу площади mn приходится сила

$$\frac{A_1n}{mn} p = p \cos(A_1nm).$$

Эта сила параллельна ребру C_1A_1 ; искомая сила p_1 , производящая сдвигъ, равна проекции этой силы на сдвинутую плоскость mn , т.-е.

$$p_1 = p \cos(A_1nm) \sin(A_1nm).$$

Но при весьма малой деформации уголъ A_1nm весьма мало отличается отъ 45° , и потому можно положить $\cos(A_1nm) = \sin(A_1nm) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $p_1 = \frac{1}{2} p$. Вставляя это въ (46), получаемъ

$$N = \frac{p}{2\alpha} = \frac{p}{4\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Остается опредѣлить уголъ φ .

Обозначимъ $\angle A_1OE = \angle A_1D_1B_1$ черезъ ψ . Тогда

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{1 - \alpha p}{1 + \alpha p}.$$

При весьма маломъ αp имѣемъ

$$\operatorname{tg} \psi = (1 - \alpha p)(1 - \alpha p) = 1 - 2(1 + \alpha)p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Съ другой стороны

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \varphi} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi}$$

или, при маломъ φ ,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1 - \varphi}{1 + \varphi} = 1 - 2\varphi.$$

Сравнивая это съ (48), получаемъ

$$\varphi = \frac{2(1 + \alpha)}{2} p.$$

Вставляя это въ (47), и вводя $\frac{1}{2} = E$ находимъ окончательно

$$N = \frac{E}{2(1 + \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Эта важная формула связываетъ модуль Юнга E и модуль сдвига N съ коэффициентомъ Пуассона α .

§ 12. Обзоръ формуль. Въ § 4 стр. 558 мы уже упоминали о томъ, что различные авторы останавливаются на различномъ выборѣ двухъ основныхъ величинъ, характеризующихъ упругія свойства изотропныхъ тѣлъ. вѣдѣние чего у нихъ встрѣчаются крайне разнообразныя формулы, въ которыхъ начинающимъ весьма трудно разобраться. Поэтому мы сопоставимъ въ этомъ параграфѣ тѣ формулы, которыя получаются, смотря по выбору упомянутыхъ двухъ величинъ.

Главнѣйшихъ величинъ у насъ четыре:

Модули:	E растяженія,	K всесторонняго сжатія,	N сдвига	σ Коефф. Пуассона.
---------	--------------------	---------------------------------	---------------	---------------------------------

Затѣмъ имѣемъ коэффициенты:

$$\alpha = \frac{1}{E} \quad \gamma = \frac{1}{K} \quad \mu = \frac{1}{N} \quad \beta = \alpha \quad \tau = \gamma \left(= \frac{1}{3} \right)$$

поперечнаго сжатія объемнаго расширенія
при растяженіи.

Далѣе двѣ величины

$$E' \text{ и } \alpha' = \frac{1}{E'}.$$

относящихся къ одностороннему сжатию безграничнаго слоя; наконецъ добавочную величину

$$\lambda,$$

которую мы определили уравненіемъ (1) стр. 559, и значение которой выяснится изъ послѣдующаго. Изъ многихъ возможныхъ и дѣйствительно встрѣчающихся группъ формуль мы выберемъ три.

I. За основныя величины принимаемъ модуль Юнга E и коэффициентъ Пуассона σ . Это тѣ двѣ величины, черезъ которыя мы при нашихъ выводахъ постоянно и выражали всѣ остальные величины. Приводимъ полученныя нами формулы

$$(30) \text{ стр. 574. } \quad E' = \frac{(1 - \sigma)E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}. \quad (50.a)$$

$$(38) \text{ стр. 576. } \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}. \quad (50.b)$$

$$(49) \text{ стр. 580. } \quad N = \frac{E}{2(1 - \sigma)}. \quad (50.c)$$

$$(15) \text{ стр. 569. } \quad \beta = \alpha = \frac{\sigma}{E}. \quad (50.d)$$

$$(20) \text{ стр. 570. } \quad \tau = \alpha(1 - 2\sigma) = \frac{1 - 2\sigma}{E}. \quad (50.e)$$

$$(1) \text{ стр. 559. } \quad \lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}. \quad (50.f)$$

Сравненіе (50.e) съ (50.b) даетъ

$$\tau = \frac{1}{3K} = \frac{1}{3}. \quad (51)$$

II. За основныя величины принимаемъ модули всесторонняго сжатія K и сдвига N . Уравнения (50, b) и (50, c) даютъ сперва α и E , а затѣмъ легко получаются и остальные величины.

$$\alpha = \frac{3K - 2N}{2(3K + N)} \quad (51.a)$$

$$E = \frac{9NK}{3K + N} \quad (51.b)$$

$$E' = K + \frac{4}{3} N \quad (51.c)$$

$$\nu = K - \frac{2}{3} N \quad (51.d)$$

$$\alpha = \frac{1}{E} = \frac{1}{3N} + \frac{1}{9K} \quad (51.e)$$

$$\beta = \alpha\alpha = \frac{1}{6N} - \frac{1}{9K} \quad (51.f)$$

Мимоходомъ замѣтимъ, что послѣднія двѣ формулы даютъ любопытное выражение для коэффициента сдвига $n = \frac{1}{N}$, а именно

$$n = 2(\alpha + \beta) \quad (52)$$

Въ формулѣ (40, a) стр. 577 встрѣтился множитель, который теперь принимаетъ простую форму, а именно

$$\frac{5-4\alpha}{E} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K} \quad (53)$$

III. Коэффициенты Lamé λ и $2N$. Lamé и Cauchy ввели въ теорію упругости два коэффициента, которые и суть, во-первыхъ, величина λ , включенная нами въ предыдущіе списки формулъ и, во-вторыхъ, величина, равная $2N$, т. е. удвоенному модулю сдвига. Эти коэффициенты вводятся слѣдующимъ образомъ: вообразимъ кубъ (рис. 363), на двѣ стороны котораго дѣйствуетъ растягивающая сила p ; ребра куба равны единицѣ длины. Подъ влияніемъ силы p произойдетъ удлиненье, равное αp и увеличеніе объема, равное ηp . Можно себѣ представить, что одна часть дѣйствующей силы p вызываетъ деформацию αp , другая деформацию ηp , и что, согласно положенію 1 стр. 555, эти части пропорциональны вызваннѣмъ ими деформациямъ. Обозначая коэффициенты пропорциональности черезъ $2N$ и λ , имѣемъ

$$p = 2N\alpha p + \lambda\eta p,$$

или

$$2N\alpha + \lambda\eta = 1 \quad (54)$$

Исходя изъ такого представленія можно построить всю теорію упругости изотропнаго тѣла и выразить модули Юнга, сжатія и сдвига, коэффициентъ Пуассона и т. д. черезъ $2N$ и λ . При этомъ и оказывается, что коэффициентъ $2N$ равенъ удвоенному модулю сдвига, и что λ выражается

формулой (50. *f*) или (51. *d*). Здѣсь мы ограничиваемся указаніемъ на проверку формулы (54), которая при подстановкѣ (50. *c*), (50. *f*), (50. *e*) и $\alpha = \frac{1}{E}$ дѣйствительно превращается въ тождество.

Рѣшая уравненія (50) и (51), находимъ

$$\alpha = \frac{1}{2(N + N)} \quad (55.a)$$

$$E = \frac{N(3 + 2N)}{1 + N} \quad (55.b)$$

$$K = 1 + \frac{2}{3} N \quad (55.c)$$

$$\tau = \frac{1}{3 + 2N} \quad (55.d)$$

$$E' = 1 + 2N \quad (55.e)$$

Когда пользуются постоянными Lamé, то обыкновенно обозначаютъ $2N$ одною буквою, напр. $2N = \mu$.

IV. Другія постоянныя. Для полноты замѣтимъ, что Kirchhoff вводитъ двѣ постоянныя (K) и L , которыя связаны съ нашими коэффициентами равенствами

$$\begin{aligned} (K) &= N \\ L &= \frac{1}{2N} = \frac{1}{1 + 2\alpha} \end{aligned}$$

Нѣкоторые авторы вводятъ величины

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2N = E' \\ B &= N. \end{aligned}$$

Иногда вводятъ еще отношеніе

$$\alpha = \frac{N}{K};$$

тогда (51. *a*) даетъ

$$\alpha = \frac{3 - 2\alpha}{2(3 + \alpha)}.$$

Интересно опредѣлить, къ чему приводитъ теорія Poisson'a, т.е. допущеніе

$$\alpha = \frac{1}{4}.$$

Изъ вышеприведенныхъ уравненій получается при $\alpha = \frac{1}{4}$:

$$N = \lambda; \quad L = \frac{1}{2}; \quad A = 3B; \quad K = \frac{5}{3} \lambda = \frac{5}{3} N; \quad E = \frac{5}{2} \lambda = \frac{5}{2} N; \quad \alpha = \frac{1}{4}.$$

§ 13. Крученіе. Первые точныя изслѣдованія законовъ крученія принадлежатъ Coulomb'у, который пришелъ къ слѣдующимъ результатамъ,

Чтобы вызвать уголъ сдвига ω , мы должны къ единицѣ плоскости приложить силу $p = N\omega$, см. (44) стр. 579, а слѣд. къ элементу ds плоскости силу $N\omega ds$. Моментъ этой силы относительно оси вращения равенъ $N\rho\omega ds$ или, вставляя (61),

$$N\frac{\varphi^2}{l}\varphi ds.$$

Отсюда слѣдуетъ, что закручивающая сила P , т.-е. моментъ пары, вращающей всё элементы ds основанія на уголъ φ , равна

$$P = \frac{N\varphi}{l} \int \int \rho^2 ds (62)$$

гдѣ интегрирование распространено на всё элементы ds основанія проволоки или стержня. Такъ какъ ds размѣра $[L^2]$, то ясно, что весь интегралъ представляется величиною размѣра $[L^4]$, т.-е., что P величина четвертой степени относительно линейныхъ размѣровъ площади поперечнаго сѣченія проволоки или стержня. Обозначивъ ее символически черезъ B , имѣемъ

$$P = \frac{N\varphi B^4}{l} (63)$$

Но по опредѣленню коэффициента крученія $P = f\varphi$, слѣд.

$$\left. \begin{aligned} f &= N\frac{B^4}{l} \\ B^4 &= \int \int \rho^2 ds \end{aligned} \right\} (64)$$

Эта формула даетъ самую общую связь между модулемъ крученія f проволоки и модулемъ сдвига N ея матеріала.

Для обыкновенной цилиндрической проволоки съ радиусомъ r введемъ полярныя координаты ρ и α , тогда $ds = \rho d\varphi d\alpha$ и

$$B^4 = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi d\alpha = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} (65)$$

Вычисляя B^4 и для другихъ сѣченій, находимъ:

Сѣченіе сплошной кругъ $B^4 = \frac{\pi}{2} r^4$.

Трубка съ радиусами r_1 и r_2 $B^4 = \frac{\pi}{2} (r_1^4 - r_2^4)$.

Сѣченіе прямоугольное со сторонами a и b $B^4 = \frac{ab(a^2 + b^2)}{12}$.

Обращаясь къ случаю обыкновенной круглой проволоки. Вставивъ (65) въ (63) и (64), находимъ

$$P = \frac{N\pi r^4}{2l} \varphi (66,a)$$

$$f = \frac{N\pi r^4}{2l} (66,b)$$

Сравнивая это выраженіе съ формулою (57), выражающей законы, найденные Coulomb'омъ мы видимъ между ними полное согласіе. Коэффициентъ F формулы Coulomb'a оказывается равнымъ $\frac{\pi}{2} N$, гдѣ N модуль сдвига.

§ 15. Опытное опредѣленіе модуля сдвига N и коэффициента Пуассона σ . Выведенныя формулы даютъ намъ возможность двумя способами опредѣлить модуль сдвига N , а затѣмъ коэффициентъ Пуассона σ того материала, изъ котораго приготовлена проволока.

1. Способъ качанія (способъ динамическій). Къ нижнему концу проволоки прикрѣпляютъ тѣло, моментъ инерціи (стр. 85) котораго Q . Допускаемъ, что Q можетъ быть опредѣлено по плотности, формѣ и размѣрамъ тѣла, или что оно косвенно опредѣляется способомъ, изложеннымъ на стр. 320. Опредѣляютъ время качанія T тѣла, совершающаго вращательныя движенія около оси проволоки. Формула (60) даетъ, если подставить (66.b),

$$T = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{2 \cdot l \cdot Q}{N}} .$$

откуда

$$N = \frac{2 \cdot l \cdot Q}{T^2 \cdot r^2} (67)$$

Въ частномъ случаѣ, когда привѣшенное тѣло есть шаръ, вѣсъ котораго Π , имѣемъ $Q = \frac{2}{5} \frac{\Pi R^2}{g}$, гдѣ R радиусъ шара и g ускореніе силы тяжести, см. (39) стр. 89. Въ этомъ случаѣ

$$N = \frac{5}{2} \cdot \frac{\Pi}{g} \left(\frac{2R}{T^2} \right)^2 (67.a)$$

Зная Q , l и r , и измѣривъ T , мы по формулѣ (67) найдемъ модуль сдвига N . Вычисляя N въ принятыхъ единицахъ, т.е. въ килограммахъ на кв. мм. поверхности, мы должны Π въ (67.a) или въ другой частной формулѣ выразить въ килограммахъ, l , r и другія линейныя величины, напр. R въ (67.a), въ миллиметрахъ; выражая T въ секундахъ мы должны положить $g = 9810 \frac{\text{мм}}{(\text{сек.})^2}$. Размѣръ модуля N есть

$$[N] = \frac{\text{сила}}{\text{поверхн.}} = \frac{ML}{T^2} : L^2 = \frac{M}{LT^2} (68)$$

Такого же размѣра модули E и K .

II. Способъ крученія (способъ статическій). Измѣряя моментъ P пары силъ, которую нужно приложить къ нижнему концу проволоки, чтобы повернуть ее на уголъ φ , мы находимъ модуль сдвига N изъ формулы (66.a):

$$N = \frac{2lP}{\pi r^4 \varphi} (69)$$

въ которой l длина, r радиус сечения проволоки. Уголъ φ долженъ быть выраженъ въ единицахъ, разсмотрѣнныхъ на стр. 36; l и r въ миллиметрахъ, моментъ P въ килограммъ-миллиметрахъ.

Можно также закрѣпить оба конца проволоки, приложить пару силъ къ ея срединѣ и измѣрить уголъ вращения φ . Въ этомъ случаѣ потребуются для закручивания каждой половины проволоки пара, моментъ которой получится, если въ (66, а) положить $\frac{1}{2} l$ вмѣсто l . Искомый моментъ P_1 , дѣйствующій на проволоку, долженъ быть вдвое больше, слѣд.

$$P_1 = \frac{2N\pi r^4}{l} \varphi.$$

откуда

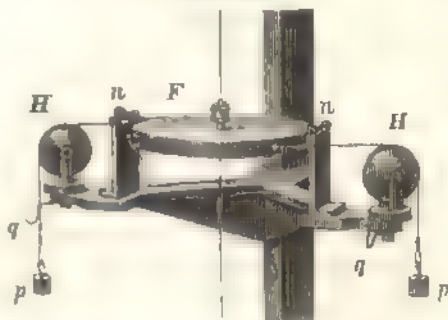
$$N = \frac{lP_1}{2\pi r^4 \varphi} \dots \dots \dots (69, a)$$

Мы видимъ, что $P_1 = 4P$.

Для опредѣленія модуля сдвига можетъ служить приборъ В. В. Пермонта, описанный на стр. 562 (рис. 355 и 356), а именно его средняя часть FH (рис. 355), изображенная въ увеличенномъ видѣ на рис. 366,

и устроенная слѣдующимъ образомъ. На середину проволоки наглухо надѣтъ горизонтальный дискъ F съ нанесенными на немъ градусными дѣлениями (незамѣтными на рисункѣ), противъ которыхъ расположены неподвижные указатели $нн$, служащіе для измѣренія угла φ поворота диска F . Двѣ нити, концы которыхъ прикрѣплены къ боковой поверхности диска, перекинуты черезъ неподвижные блоки HH ; онѣ па-

Рис. 366



ракетены и имѣютъ направленіи горизонтальныхъ касательныхъ къ боковой поверхности диска. Къ ихъ концамъ прикрѣпляютъ нити pp , которыя привѣшиваются къ крючкамъ qq , когда надобно будетъ поворачивать дискъ F безъ крученія проволоки. Если p обозначать въсь въ килотр. каждой нити, и d диаметръ диска въ миллиметрахъ, то моментъ $P_1 = pd$, такъ что модуль сдвига N получается по формулѣ

$$N = \frac{lp^2d}{2\pi r^4} \dots \dots \dots (69, b)$$

гдѣ l длина всей проволоки, r радиусъ ея поперечнаго сечения.

Коэффициентъ Пуассона. Опредѣливъ однимъ изъ двухъ способовъ модуль сдвига N и давъ модуль Юнга E по способу, изложенному на стр. 563, мы получаемъ коэффициентъ Пуассона на основаніи формулы (49) стр. 580;

$$N = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

$$\sigma = \frac{E}{2N} - 1 \dots \dots \dots (70)$$

откуда

Въ этомъ и заключается одинъ изъ способовъ опредѣленія ε , на которыя было указано на стр. 570.

§ 16. Численныя значенія модуля сдвига N . Такъ какъ ε заключается между нулемъ и половиною, то ясно, что

$$\frac{1}{3} E < N < \frac{1}{2} E.$$

По теоріи Пуассона ($\varepsilon = \frac{1}{4}$) должно быть $N = \frac{2}{5} E$. Для пробки $\varepsilon = 0$ и слѣд. $N = \frac{1}{2} E$, для каучука наоборотъ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $N = \frac{1}{3} E$.

Опытныя измѣренія по динамическому способу даютъ вообще нѣсколько бѣльшія числа, чѣмъ измѣренія по способу статическому. Приведемъ нѣкоторыя числа

		N <small>килогр. кв. мм.</small>		
Желѣзо . . .	7651 (Coulomb).		Желѣзомягкое .	8100 (Baumeister).
» . . .	6706 (Wertheim).		» жесткое	7850 »
Мѣдь . . .	4213 (Savart).		Серебро . . .	2650
» . . .	3612 (Wertheim).		Латунь . . .	3500 »
Сталь литая .	7458 »		Олово . . .	1543 »
Стекло . . .	2346 »		Цинкъ . . .	3820 »
			Алюминій . .	3350 »

Съ повышеніемъ температуры модуль сдвига уменьшается и притомъ вообще нѣсколько быстрее, чѣмъ пропорционально возростанію температуры. Приведемъ нѣкоторыя числа, найденныя Pisati для модулей E и K , и относящихся къ желѣзу и къ стали

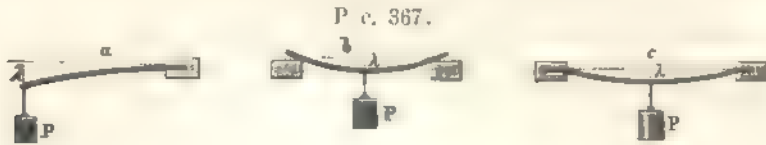
t°	Ж е л ѣ з о .		С т а л ь	
	E <small>кигр. кв. мм.</small>	N <small>кигр. кв. мм.</small>	E <small>кигр. кв. мм.</small>	N <small>кигр. кв. мм.</small>
0°	21483	8108	18518	8290
100°	21212	7934	18232	8094
200°	20458	7784	17820	7846
300°	19175	7706	17372	7585

Для стекла $N = N_0(1 - 0.00151t)$, между тѣмъ какъ для желѣза приблизительно $N = N_0(1 - 0.000206t)$. При нагреваніи отъ 0° до 100° уменьшается N для Pt на 1.64%, Cu — 3.65%, Ag — 7.10%, Al — 21.3%, Zn — 40% и Pb — 80%.

Модуль сдвига каучука при 20° равенъ 0.163 кигр.
кв. мм.; онъ растетъ съ повышеніемъ температуры.

§ 17. Гнупіе. Приведемъ прежде всего формулы, относящіяся къ деформации гнупіе и выражающія тѣ законы, которые выводятся теоретически и подтверждаются путемъ опыта. Обыкновенно отличаютъ три случая

гнутия прямого стержня; сущность ихъ понятна изъ рис. 367. Въ первомъ случаѣ (a) стержень закрѣпленъ однимъ концомъ, во второмъ (b) стержень обоими концами свободно опирается на двѣ подставки; въ третьемъ (c) стержень обоими концами закрѣпленъ неподвижно. Во всѣхъ трехъ случаяхъ



сила P дѣйствуетъ, какъ показано на рисункахъ перпендикулярно къ длинѣ стержня. Перемѣщеніе (пониженіе) точки приложенія силы, т.-е. конца (a) или середины (b и c) стержня, называется стрѣлою прогиба; обозначимъ ее черезъ λ . Для этой величины получается слѣдующая общая формула:

$$\lambda = \frac{k}{12q} \frac{Pl^3}{E} \quad (71)$$

Здѣсь P дѣйствующая сила, l длина стержня, E модуль Юнга, k постоянное число, зависящее отъ того, который изъ трехъ случаевъ гнати мы имѣемъ, и q выраженіе, зависящее отъ размѣровъ и формы площади поперечнаго сѣченія стержня.

Множитель k имѣетъ слѣдующія значенія

случай:	a	b	c
$k =$	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Отсюда слѣдуетъ, что если мы λ въ трехъ случаяхъ a, b и c (рис. 367) обозначимъ черезъ λ_a , λ_b и λ_c , то для одного и того же стержня имѣемъ:

$$\lambda_a : \lambda_b : \lambda_c = 64 : 4 : 1.$$

Величина q имѣетъ для различныхъ поперечныхъ сѣченій различное значеніе, а именно:

Сѣченіе круглое, радиусъ R $q = \frac{\pi R^4}{4}$

Сѣченіе прямоугольное со сторонами a (\perp къ P , горизонтально) и b ($\parallel P$). $q = \frac{a^3 b^3}{12}$

Сѣченіе квадратное (a^2). $q = \frac{a^4}{12}$

Трубка съ радиусами R и r $q = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$

Вставляя q , относящееся къ прямоугольному сѣченію, въ (71), получаемъ

$$\lambda = k \frac{P l^3}{a^3 E} \quad (71.a)$$

гдѣ $k = 4, \frac{1}{4}$ или $\frac{1}{16}$, смотря по случаю гнущя. Приведенныя формулы выражаютъ слѣдующе законы гнущя:

Стрѣла прогиба пропорціональна дѣйствующей силѣ и кубу длины стержня, и обратно пропорціональна модулю Юнга материала стержня, для стержня съ прямоугольнымъ сѣчениемъ стрѣла прогиба кромѣ того обратно пропорціональна ширинѣ стержня и кубу его высоты.

Формула (71) даетъ

$$E = \frac{k Pl^3}{12q \lambda} \dots \dots \dots (72)$$

и въ частномъ случаѣ прямоугольнаго сѣченія

$$E = k \frac{Pl^3}{ab^3} \dots \dots \dots (72a)$$

Этимъ формуламъ можно воспользоваться для опредѣленія модуля Юнга E , измѣряя стрѣлу прогиба λ . Для этого можно помощью катетометра измѣрить пониженіе конца или середины стержня, можно также воспользоваться способомъ трубы и шкалы (стр. 275), расположивъ зеркальце такъ, чтобы его вращеніе служило мѣрою стрѣлы прогиба λ .

Гораздо точнѣе, чѣмъ λ , можно измѣрить уголъ θ между касательной къ оси согнутой стержня у его конца и первоначальнымъ направлениемъ этой оси. Теорія даетъ для случая (а), когда $k = 4$,

$$\lambda = \frac{2}{3} l \operatorname{tg} \theta \dots \dots \dots (73)$$

откуда для прямоугольнаго стержня

$$E = \frac{6Pl^2}{ab^3 \operatorname{tg} \theta} \dots \dots \dots (73a)$$

Прикрѣпая зеркало къ концу стержня легко измѣрить θ .

Еще чувствительнѣе способъ, предложенный А. Кoenig'омъ (1886), приборъ котораго изображенъ на рис. 308. Къ двумъ концамъ стержня AB , на середину котораго дѣйствуетъ грузъ, прикрѣплены зеркальца p_1 и p_2 . Лучи отъ шкалы S падаютъ сперва на зеркальце p_2 , отражаются къ p_1 , и затѣмъ въ трубу F . Въ этомъ случаѣ $k = \frac{1}{4}$, и въ (73) слѣдуетъ вставить $\frac{l}{2}$ вмѣсто l ; такимъ образомъ

$$E = \frac{3Pl^2}{4ab^3 \operatorname{tg} \theta}.$$

Но легко вывести, что въ приборѣ Кoenig'a

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{n}{4D - 2d},$$

гдѣ n число дѣленій шкалы, которыя во время прогиба проходятъ черезъ

поле зрѣнія трубы. D расстояние отъ Δ до p_2 , и наконецъ d расстояние зеркаль p_1 и p_2 другъ отъ друга. Такимъ образомъ окончательно

$$E = \frac{3P^2(2D+d)}{2nab^3} \dots \dots \dots (74)$$

Комбинируя наблюденія надъ гнутіемъ и надъ крученіемъ, можно опредѣлить E и N , и отсюда з по формулѣ (70).

Въ опытахъ Kirchhoff'a и Окотова стержень подвергали одновременно гнутію и крученію.

Покажемъ теперь, какъ вывести формулы (71) и (73). Ограничиваемся

Рис. 368.

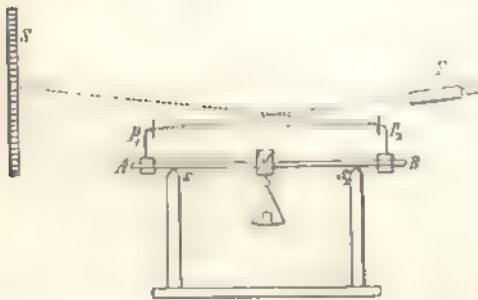
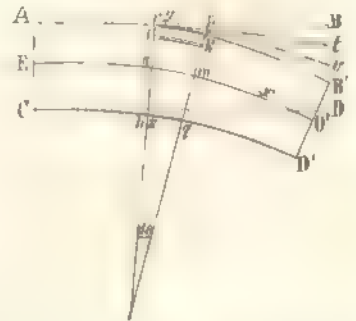


Рис. 369.



первымъ случаемъ гнутія (рис. 367, а), когда $l = 4$. Итакъ, мы должны доказать, что

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{3q} \frac{P^2}{E} \left| \dots \dots \dots \right. \\ i &= \frac{2}{3} (tg \varphi) \left| \dots \dots \dots \right. \end{aligned} \quad (75)$$

Общее значеніе величины φ , зависящей отъ площади поперечнаго сѣченія стержня, выяснится при томъ выводѣ, частныя ея значенія были приведены на стр. 591.

Положимъ, что площадь поперечнаго сѣченія стержня имѣетъ произвольную форму, показанную на рис. 370. Проведемъ черезъ стержень какую либо вертикальную плоскость, параллельную его боковой поверхности. Эта плоскость пересѣчетъ несогнутый стержень по прямоугольнику $ABDC'$ (пунктиръ на рис. 369), который при гнутіи превратится въ фигуру $AB'D'C'$. Допустимъ, что сѣченіе, изображенное на рис. 370, находится въ pq (рис. 369), и что прямая $p'kmtq$ на обоихъ рисункахъ изображаетъ одну и ту же линию пересѣченія двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей.

Если мысленно раздѣлить несогнутый стержень на тонкіе горизонтальные слои, то оказывается, что при гнутіи стержня верхніе слои удлиняются, растягиваются (напр. $AB' > AB$) между тѣмъ какъ нижніе укорачиваются.

Сравнивая это съ (79), находимъ

$$\lambda = \frac{2}{3} \lg 6.$$

т.-е. вторую изъ формулъ (75).

Формула (79.a) даетъ

$$E = \frac{Pr^2}{2q \lg 6}.$$

т.-е. обобщеніе формулы (73.a).

§ 18. Относительное сопротивленіе; разломъ и разрывъ при крученіи. Въ §§ 6 и 7 мы познакомились съ явленіемъ разрыва тѣла на части, происходящимъ при его растяженіи или одностороннемъ сжатіи. Такой же разрывъ можетъ произойти и при сгибаніи и крученіи тѣла. Въ первомъ случаѣ мы говоримъ о разломѣ величина деформирующей силы въ этомъ случаѣ характеризуетъ т. наз. относительное сопротивленіе матеріала, изъ котораго состоитъ сгибаемый стержень.

Положимъ, что стержень поднятъ въ серединѣ и что къ концамъ приложены нѣ сгибающія его силы P , пусть L длина половины стержня; тогда

$$P = q \frac{p'}{L} \dots \dots \dots (80)$$

выражаетъ величину силы, потребной для разлома. Здѣсь p' мало отличается отъ абсолютнаго сопротивленія p , о которомъ было сказано въ § 6; q' зависитъ отъ вида и размѣровъ площади поперечнаго сѣченія, а именно.

Сѣченіе прямоугольное (a ширина, b [P]) $q = \frac{1}{6} ab^2$

Сѣченіе квадратное $q' = \frac{1}{6} a^3$

Сѣченіе круглое $q' = \frac{\pi}{4} r^3.$

Когда стержень свободно опирается концами (рис. 367.b стр. 591), то сопротивленіе разлому (P въ серединѣ) въ 4 раза больше, а когда оба конца закрѣплены неподвижно (рис. 367.a), то оно въ 8 разъ больше.

Для прямоугольнаго сѣченія мы имѣемъ

$$P = \frac{ab^2}{6L} p'.$$

Изъ круглаго стержня даннаго диаметра D получается прямоугольный стержень (балка), наиболѣе сопротивлявшійся разлому, если взять

$$b = \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

Разрывъ при крученіи происходитъ подъ вѣдѣніемъ пары силъ, моментъ которой зависитъ отъ матеріала, и пропорционаленъ нѣкоторой величинѣ q'' , зависящей отъ поперечнаго сѣченія стержня.

сплюсываться въ тончайшие листки металлы располагаются въ такомъ порядкѣ *Al, Ag, Cu, Pt, Sn, Zn, Fe*. Толщина золотого листочка можетъ быть доведена до 0.00001 мм.

Съ повышениемъ температуры тягучесть увеличивается; особенно это замѣтно для нѣкоторыхъ тѣлъ, хрупкихъ при обыкновенной температурѣ, каковы стекло шеллакъ (сургучъ).

Обращаемся къ явлениямъ текучести, происходящимъ подъ влияниемъ слабыхъ силъ, весьма продолжительное время дѣйствующихъ въ одномъ направленіи. Такія силы могутъ вызвать непрерывныя измѣненія формы даже у хрупкихъ тѣлъ. Такъ хрупкая палочка сургуча, подертанная двухъ концами, мало-по-малу изгибается подъ влияниемъ собственнаго вѣса, и то же самое замѣчается, хотя и въ гораздо меньшей степени, съ палочками стеклянными. Bottomley приписываетъ въ 1881 г. въ Глазгоу «вѣсковыя» наблюденія надъ проволоками изъ *Al, Pt, Ag* и другихъ металловъ, постепенныя измѣненія которыхъ предполагается наблюдать въ течение многихъ лѣтъ. Замѣчательною текучестью обладаетъ ледъ, вообще хрупкая масса, которая, подъ влияниемъ непрерывнаго давленія течетъ, чрезвычайно напоминая законы течения жидкостей. Это наилучшимъ образомъ наблюдается на ледникахъ, медленно спускающихся въ долины. Массы твердаго льда принаравливаются къ мѣняющейся ширинѣ русла: онѣ сжимаются и расширяются подобно вязкой жидкости. При этомъ средняя ледяная масса течетъ быстро, чѣмъ стороны, что легко обнаруживается измѣненіемъ расположенія льдовъ, разставленныхъ поперекъ ледника.

Замѣчательною текучестью обладаютъ т. наз. сапожный варъ, черное, смолистое и весьма хрупкое тѣло. Тонкая палочка вара легко изгибается, если производить гнѣtie медленно и съ небольшою силою; при быстромъ же сгибаніи она ломается какъ стекло, причемъ и поверхность разлома получается гладкая, блестящая, совершенно напоминающая поверхность разлома стекла. Куски вара медленно текутъ подъ влияниемъ собственнаго вѣса. Если куски твердаго вара положить въ воронку, то они мало-по-малу соединяются, образуя сплошную массу съ горизонтальною поверхностью, медленно вытекающую черезъ трубку воронки. Небольшой грузъ (монета), положенный на кусокъ вара, тонетъ въ немъ; кусокъ вара, положенный на наклонную плоскость, стекаетъ по ней. Если изъ дерева построить модель горы со спускающейся долиной, которая то сжимается, то расширяется, и расположить около ея вершины куски вара, то наблюдаются всѣ явленія, сопровождающія теченіе ледниковъ.

Другой случай текучести обнаруживается при весьма сильныхъ давленіяхъ на большую часть поверхности тѣлъ, напр. металловъ. Опыты, сюда относящіяся, производилъ въ особенности Tresca. Онъ накладывалъ другъ на друга рядъ пластинокъ изъ испытываемаго металла на крѣпкую плитку, снабженную посерединѣ круглымъ отверстіемъ, и подвергалъ ихъ весьма сильному давленію. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ пластинки свободно лежали на плиткѣ, имѣя возможность раздаться въ стороны. Въ другихъ опытахъ онъ помещалъ испытываемыя пластинки во внутрь толстостѣннаго цилиндра, дно котораго имѣло отверстие. Во всѣхъ случаяхъ металлъ какъ

бы вытекать изъ отверстія, образуя выступающій наружу стержень. Полученное послѣ сжатія тѣло Tresca распиливать продольно, и подвергать поперечность разрѣза шлифовкѣ. Тогда ясными линиями обозначались границы отдѣльныхъ слоевъ, соотвѣтствовавшихъ первоначально наложеннымъ другъ на друга пластинкамъ, что даю возможность прослѣдить тѣ замѣненія формы, которымъ подверглась каждая изъ пластинокъ. На рис. 371 показанъ разрѣзъ черезъ тѣло, полученное при такомъ сдвигиваніи нагрѣтыхъ желѣзныхъ пластинокъ, а на рис. 372 то же самое для ряда свинцовыхъ пластинокъ. Форма слоевъ чрезвычайно напоминаетъ контуры вязкой жидкости, вытекающей изъ отверстія.

На текучести металловъ основаны многие приемы обработки металловъ, применяемые въ технику, напр. приготовленіе баночекъ для масля-

Рис. 371.

Рис. 372.



ныхъ красокъ: на дно цилиндра кладется кусокъ олова, который сжимается длиннымъ поршнемъ; диаметръ поршня нѣсколько меньше диаметра полости цилиндра. Подъ вліяніемъ давленія олово втекаетъ въ свободное пространство между поршнемъ и цилиндромъ образуя баночку желаемой формы. Чеканка монетъ и медалей также основана на текучести металловъ.

Текучесть проявляется и въ неметаллическихъ тѣлахъ, какъ показали опыты Spring'a, которые мы, вмѣстѣ съ другими его опытами, разсмотримъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 20. Вліяніе давленія на тѣла соприкасающіеся; опыты Spring'a. Молекулярныя силы дѣйствуютъ между частицами твердаго тѣла только на весьма малыхъ разстояніяхъ, чѣмъ и объясняется, что сложенные части раздробленнаго тѣла не сращиваются вновь въ одно цѣлое, такъ какъ неровности поверхности препятствуютъ достаточно полному сближенію частицъ. Въ тѣхъ, однако, случаяхъ, когда достигается достаточное сближеніе по-

верностей двух тел, возможно и возникновение частичных сил, а след. и сращивание тел как бы в одно тело. Такое сближение возможно, во-первых, когда одно из тел приведено в жидкое состояние - на этом основаны спайка, склеивание и т. под. Во-вторых, сближение до радиуса сферы частичных действий легко достигается для тел мягких: куски разбитого воска, каучука и даже свинца легко срачиваются при небольшом нажатии их друг к другу при условии свежести поверхности разреза; пыль окисление и т. д. препятствуют срачиванию (сваривание раскаленного железа).

Молекулярные силы проявляются и между кусками других тел при нажатии, если поверхности были тщательно отполированы. Необходимо однако заметить, что казавшееся сближение двух стеклянных пластинок, сложенных вместе, описываемое обыкновенно во всех элементарных курсах физики, объясняется не действительным появлением молекулярных сил между частицами двух стекол, но, как показывает Stefan, тем, что слой воздуха между пластинками, после нажатия пластинок друг к другу, разрывается, так что пластинка поддерживается давлением окружающего воздуха. Тем не менее несомненно, что при весьма тщательной полировке плоских поверхностей двух тел может, даже при небольшом нажатии, обнаружиться между ними действительное сближение.

Сближению поверхностей, а след. и срачиванию, способствует, по-видимому, сдавливание тел и вот в этом-то направлении были произведены многие весьма любопытные опыты бельгийским ученым M. Spring'омъ, начиная с 1878 года. Между прочим онъ изслѣдовалъ вообще влияние сильного давления на различные тела, причемъ онъ повторяетъ и описанные выше опыты Tresca.

Первые опыты Spring'a относились къ сжиманию порошковъ и опилокъ, которые онъ помещалъ внутри стального параллелепипеда и подвергалъ давлению доходящему до 20 000 атмосферъ. Оказалось, что опилки многихъ металловъ подъ влияниемъ сильного давления превращаются въ сплошную однородную массу, обладающую во многихъ случаяхъ кристаллическимъ строениемъ; очевидно давление производитъ одинаковое съ плавлениемъ дѣйствіе. Spring изслѣдовалъ всего 83 тела, причемъ обнаружилось, что давление вызываетъ не только срачивание разрозненныхъ частей, но и такая измѣненія структуры, которыя сопряжены съ уплотнениемъ вещества и, наконецъ, химическія реакціи и образование сплавовъ, которыя обыкновенно происходятъ только при плавлении веществъ. Приведемъ примѣры. Свинцовые опилки образуются въ однородную компактную массу при давлении въ 2000 атм.; опилки цинка — при 5000 атм.; порошокъ графита при 5000 атм. обращается въ твердую массу, а перекись марганца въ тело, тождественное съ натуральнымъ продуктомъ. Порошокъ селитры превратился въ однородную, полупрозрачную массу. Деревянные опилки дамы твердую массу (плотность 1.328) съ раковистымъ изломомъ. Куски призматической сѣры, а также сѣры мягкой превращались въ сплошную массу сѣры октаэдрической, болѣе плотной. Красный аморфный P превращался въ фосфоръ металлическій. Почти бѣлый порошокъ $CuSO_4 + 5H_2O$ переходилъ при 6000 атм. въ голубую прозрачную массу. Камфора превращается

въ массу замѣчательно прозрачную. Торфъ переходитъ при 6000 атм. въ блестящую черную массу, вполне напоминающую каменный уголь; кромѣ того онъ при этомъ давлении становится вполне текучимъ. Воскъ при 100 атм. и парафинъ при 2000 атм. текутъ, какъ вода. Крахмалъ дѣлтъ при 6000 атм. компактную массу, просвѣчивающую около краснаго. Прибавленіе нѣсколькихъ капель воды препятствуетъ сращиванію металловъ по способу сращиванію кусковъ графита, окиси ртути и т. д.

Изъ своихъ наблюденій надъ 83 веществами Spring вывелъ, что кристаллическія вещества всѣ сплавляются при сильномъ давленіи, если они были взяты въ аморфномъ состояніи, то они подъ вліяніемъ давленія принимаютъ кристаллическую структуру. Многія аморфныя тѣла не сплавляются.

Далѣе Spring сдавливать смѣси опилокъ нѣсколькихъ металловъ и получать вполне однородныя сплавы напр. сплавъ Wood'a (*Bz. Pb. Sn. Cd*) съ точкою плавленія при 70° , и даже латунь изъ опилокъ *Cu* и *Zn*.

Особенный интересъ представляетъ возникновеніе химическихъ реакцій при сдавливаніи смѣсей нѣсколькихъ тѣлъ.

Такъ Spring получилъ соединенія металловъ съ мышьякомъ и сѣрою сдавливая смѣси опилокъ съ порошкообразнымъ *As* или *S*. Смѣсь хлористой ртути и мѣдныхъ опилокъ дала *Cu₂Cl* и *Hg*, смѣсь йодистаго калия и хлористой ртути дала йодистую ртуть и хлористый калий. Смѣсь *Na₂CO₃* и *BaSO₄* переходитъ въ *BaCO₃* и *Na₂SO₄*.

Во всѣхъ разсмотрѣнныхъ опытахъ сильное давленіе какъ бы замѣняетъ собою плавленіе; сближая частицы, оно способствуетъ провѣденію между ними силъ сціпленія, а также химическаго средства. Spring распространяетъ такое объясненіе и на сращиваніе двухъ кусковъ льда, происходящее даже при слабомъ давленіи, отвергая объясненіе Thompson'a основанное на пониженіи точки плавленія льда при давленіи (см. Отдѣлъ девятый, Ученіе о теплотѣ).

Въ 1894 г. Spring опубликовалъ новые весьма любопытные опыты сращиванія металловъ и образованія сплавовъ при весьма слабомъ давленіи и повышенной температурѣ (отъ 200 — 400°) дѣйствующими продолжительное время.

Указавъ сперва на объясненіе этихъ явленій, данное Spring'омъ. По его мнѣнію и въ твердыхъ тѣлахъ какъ въ газахъ (стр. 401), частицы обладаютъ различными скоростями между ними находятся такія скорости, которыя равны скоростямъ частицъ при температурѣ плавленія, если только тѣла не слишкомъ тугоплавки. Такія «жидкія» частицы должны особенно обильно встрѣчаться у поверхности тѣла, гдѣ движеніе частицъ вообще происходитъ свободнѣе. Эти-то частицы и вызываютъ постепенное сращиваніе соприкасающихся тѣлъ.

Spring ставилъ сперва два цилиндра изъ одинаковаго металла весьма тщательно отполированными основаніями одинъ на другой, слабо сжималъ ихъ и держалъ нѣкоторое время при повышенной температурѣ. Оказалось, что они сращивались, образуя одинъ сплошной цилиндръ. Такое сращиваніе происходило для цилиндровъ

изъ *Sb* при 395° въ 12 часовъ

» <i>Al</i> »	418	»	8	»
» <i>Bi</i> »	240	»	7	»
» <i>Cu</i> »	403	»	8	»
» <i>Sn</i> »	190	»	8	»
» <i>An</i> »	400	»	4	»
» <i>Pt</i> »	400	»	4	»
» <i>Pb</i> »	300	»	6	»
» <i>Zn</i> »	385	»	3	»

Только для сурьмы, тѣла весьма хрупкаго, срачиваніе оказалось слабымъ. Второй рядъ опытовъ былъ произведенъ съ цилиндрами изъ различныхъ металловъ. При этомъ металлы не только вполнѣ срачивались, но и образывали толстый слой сплава. Такъ *Cu* и *Zn* даны въ 6—8 часовъ при 400° сплавъ толщиной въ 18 мм., оба металла какъ бы диффундировали одинъ въ другой. Взаимную диффузію соприкасающихся металловъ, а именно золота и свинца, изслѣдовалъ также Roberts-Austen.

§ 21. Упругое послѣдствіе. W. Weber замѣтилъ въ 1845 г. такое явленіе: если подвернуть шелковую нить дѣйствию растягивающаго груза, то она мгновенно получаетъ нѣкоторое удлиненіе, которое затѣмъ медленно продолжаетъ увеличиваться въ теченіе 36 часовъ. Если снять грузъ, то нить мгновенно укорачивается, но не до первоначальной длины; длина ея въ теченіе 20 сутокъ продолжаетъ замѣтно уменьшаться. Это явленіе Weber называетъ упругимъ послѣдствіемъ (*elastische Nachwirkung*). Къ изслѣдованію этого важнаго явленія, полная развязка котораго могла бы пролить яркій свѣтъ на законы дѣйствія молекулярныхъ силъ и способствовать разъясненію вопроса о строеніи твердыхъ тѣлъ, обратился въ 1863 г. F. Kohlrausch. Онъ изслѣдовалъ упругое послѣдствіе при крученіи стеклянныхъ нитей, металлическихъ проволокъ и каучука. Онъ нашелъ, что послѣдствіе приблизительно пропорціонально величинѣ деформации и быстро возрастаетъ съ повышеніемъ температуры. Если обозначить послѣдствіе, т.-е. ту деформацию, которая наблюдается послѣ прекращенія дѣйствія закручивающей пары, черезъ x , то эта величина есть функции времени t , безконечно убывающая съ возрастаніемъ t . Для всѣхъ изслѣдованныхъ тѣлъ x можетъ быть представлено въ видѣ

$$x = Ce^{-at^n} \quad (81)$$

Во многихъ случаяхъ достаточна и болѣе простая форма

$$x = \frac{C}{t^a} \quad (82)$$

гдѣ C , a и n постоянныя.

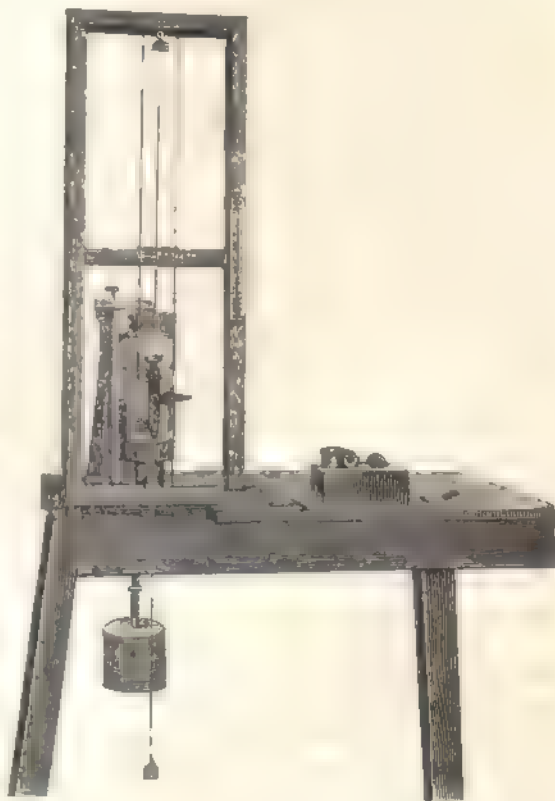
Весьма замѣчательно также явленіе, замѣченное Kohlrausch'емъ: онъ сперва сильно и на долгое время закрутилъ проволоку въ одномъ направленіи, предоставилъ ее затѣмъ самой себѣ и наблюдалъ постепенно умень-

находящийся уголъ кручения, соответствовавший упругому послѣдствію. Когда этотъ уголъ имѣлъ еще довольно большое значеніе Kohlrausch на миновенье закрутилъ проволоку на небольшой уголъ въ противоположную сторону и вновь предоставилъ ее самой себѣ. Оказалось, что этотъ уголъ быстро дошелъ до нуля затѣмъ вновь получилъ кручение въ сторону первой деформации, которое, дойдя до нѣкоторой величины, опять стало постепенно уменьшаться. Такимъ образомъ первое послѣдствіе, еще не успѣвшее исчезнуть, какъ бы вновь обнаружилось, несмотря на происшедшую деформацию въ противоположную сторону.

Рис. 373.

Darbe Streintz, O. E. Meier, Boltzmann, Maxwell, Neesen, G. Wiedemann, Braun, Nissen, Austin и въ особенности Н. А. Гезехусъ занимались опытнымъ и теоретическимъ изслѣдованіемъ упругаго послѣдствія. Оказалось, что это явленіе особенно рѣзко обнаруживается въ каучукѣ, гуттаперчѣ, стеклѣ и свинцѣ; въ другихъ металлахъ оно почти незамѣтно, хотя впрочемъ въ серебрѣ, мѣди и латуни оно было измѣрено Austen'омъ. При повышеніи температуры на 1° Austen нашелъ увеличеніе послѣдствія при крученіи названныхъ трехъ металловъ на 3% .

Н. А. Гезехусъ изслѣдовалъ въ особенности упругое послѣдствіе въ каучукѣ. Чтобы слѣдить за постепенными измѣненіями длины каучуковаго шнура онъ пользовался приборомъ, изображеннымъ на рис. 373. Вертикальный металлическій цилиндръ, поверхность котораго передъ каждымъ опытомъ покрывалась листомъ бумаги, приводился въ равномерное вращательное движеніе помощью часового механизма. Нижний конецъ каучуковаго шнура прикрѣплялся къ висящему снаряду, снабженному тремя колесиками, двигающимися при измѣненіи длины шнура по двумъ металлическимъ проволокамъ, тѣмъ натянутымъ внутри большой деревянной рамки. Къ этому снаряду былъ присоединенъ карандашъ, который чертилъ линію по поверхности цилиндра. Изслѣдованіе этой линіи и давало возмож-



ность изучить законы постепеннаго измѣненія длины шнура въ различныхъ случаяхъ.

Главнѣйшие результаты, къ которымъ пришелъ Н. А. Гезехусъ, суть слѣдующие. Когда деформация продолжается весьма короткое время то упругое послѣдствіе незамѣтно. Деформированный невытянутый каучукъ скорѣе приходитъ въ состояніе равновѣсія, чѣмъ вытянутый. Чѣмъ больше поверхность при данной массѣ, тѣмъ меньше упругое послѣдствіе. Съ повышеніемъ температуры уменьшается упругое послѣдствіе каучука. Далѣе Н. А. Гезехусъ высказалъ мысль, что окружающая среда должна имѣть вліяніе на явленія упругаго послѣдствія. Опыты П. Бахметьева и П. Баскова надъ мѣдными и никелевыми проволоками въ воздухѣ, керосинѣ и въ растворахъ $CuSO_4$ или $NiSO_4$ повидимому указываютъ на то, что такое вліяніе действительно существуетъ.

Различными учеными были предложены цѣлый рядъ разнообразныхъ объясненій упругаго послѣдствія. На этихъ объясненіяхъ мы не останавливаемся, такъ какъ ни одно изъ нихъ не можетъ считаться вполне удовлетворительнымъ, исчерпывающимъ всѣ стороны этого интереснаго явленія.

§ 22. Упругость кристалловъ. Въ заключеніе главы о деформацияхъ твердаго тѣла скажемъ нѣсколько словъ о явленіяхъ упругости въ тѣлахъ анизотропныхъ. Эти явленія, отличающіяся весьма большою сложностью, были изслѣдованы въ особенности Voigt'омъ. Ограничимся немногими указаніями.

Въ тѣлахъ анизотропныхъ упругія свойства въ различныхъ направленіяхъ различны. Мы видели, что изотропныя тѣла имѣютъ два модуля упругости, черезъ которые всѣ остальные могутъ быть выражены, напр. черезъ модуль сжатія K и модуль сдвига N . Кристаллы правильной системы имѣть уже три модуля, одинъ для сжатія и два для сдвига, кристаллы напр. гексагональной системы имѣютъ 4 модуля, два разныхъ K и два N , кристаллы двояковыпуклы имѣютъ 6 модулей, 3 модуля сжатія и 3 модуля сдвига.

Модуль Юнга E и коэффициентъ Пуассона σ зависятъ отъ направленія. При всестороннемъ сжатіи всѣ кристаллы, не принадлежащіе къ правильной системѣ, не остаются сами собою подобными, по претерпѣваютъ, кромѣ уменьшенія объема еще и измѣненіе формы. Гнѣтие сопровождается крученіемъ и крученіе гнѣтениемъ. Въ деформацияхъ зависятъ не только отъ формы стѣрня пластинки и т. д. и отъ вѣншихъ дѣйствующихъ причинъ, но также отъ направленія въ которомъ эти тѣла были вырваны изъ кристалла.

ЛИТЕРАТУРА.

УЧЕБНИКИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ:

А. Clebsch. Theorie der Elasticitaet, Leipzig, 1862.

F. Grasshof Theorie der Elasticitaet und Festigkeit, Berlin, 1878.

Д. Бобылевъ Гиперстатика и теорія упругости. Спб. 1886.

А. Bieg. Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticitaet und Capillaritaet. Leipzig, 1869.

Lame. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité. Paris, 1866.

F. Neumann. Vorlesungen ueber die Theorie der Elasticitaet. Leipzig, 1883.

Weyrauch. Theorie elastischer Koerper. Leipzig, 1884.

Mathieu. Théorie de l'élasticité. Paris, 1890.

Къ § 1.

Hooke. A description of helioscopes. London, 1675; Lectures de potentia restitutiva. London, 1678; Philosophical tracts and collections. London, 1679.

Poisson. Mémoire sur le mouvement des corps élastiques. Mém. de l'Acad. des Sc. 8, 1829; Journ. de l'école polytechn. 20 cahier, 1831.

Kirchhoff. Crelle's Journal 40 n 56.

Къ § 3.

H. Hertz. Crelle's Journal 92 p. 156, 1882. Gesammelte Werke I p. 155.

F. Auerbach. W. A. 43 p. 61, 1891; 45 p. 262, 1892; 58 p. 357, 1896.

Къ § 5.

Th. Young. Course of lectures on natural Philosophy. London, 1807.

S. Gravesande. Physicæ Elementa mathematica. Leyden, 1721 Vol I p. 375.

Wiertherm. Ann. chim. et phys. (3) 12 p. 385, 1844; Pogg. Ann. Ergb. 2 p. 1, p 78, 1848.

Kupffer. Mém. de l'Acad. d. Sc. de St. Pétersb. (6). Sc. mathem. 6 (8), 1856.

Kohlrausch und Loomis. Pogg. Ann. 141 p. 481, 1870.

Tomlinson. Phil. Mag. 23, 1887.

Noyes. Physical Review II p. 277, 1895; III p. 432, 1896.

A. M. Mayer. Phil. Mag. (5) 41 p. 168, 1896.

Auerbach. W. A. 58 p. 381, 1896.

H. Гезерцъ. Ж. Ф. X. O. 11 p. 98, 1879.

Georg S. Meyer. W. A. 59 p. 668, 1896.

Villari. Pogg. Ann. 143 p. 88, 1871.

Winkelmann und Schott. W. A. 51 p. 696, 1894.

J. O. Thompson. W. A. 44 p. 555, 1891.

Dewar. Chemical News. 71 p. 192, 190, 1895; Instr. 15 p. 375, 1895.

Къ § 8.

Оамонъ. Теорія равновісія и дѣйствія упругої проволоки. Спб. 1867. Pogg. Ann. 119 p. 11, 1863.

Schneebeil. Pogg. Ann. 140, p. 589, 1870.

Kirchhoff. Pogg. Ann. 108 p. 369, 1859.

Voigt. Berl. Ber. 1883 p. 961; 1884 p. 1004.

Roentgen. Pogg. Ann. 159 p. 601, 1876.

Katzenelsohn. Diss. Berlin, 1887.

Bock. W. A. 52 p. 609, 1894.

Smoluchowsky. Wien. Ber. 103 p. 739, 1894.

Cagnard Latour. Ann. chim. et phys. 36 p. 384, 1827; Pogg. Ann. 12 p. 516, 1828.

Къ § 10.

Regnault. Mém. de l'Acad. des Sc. 21, 1847.

Amagat. C. R. 99 p. 130, 1884; 106 p. 479, 1888. Ann. chim. et phys. (6), 22 p. 95, 1891.

Voigt. W. A. 31 p. 479, 1887; 34 p. 981, 1888; 35 p. 642, 1888; 41 p. 712, 1890.

Къ § 13.

Coulomb. Mém. de l'Acad. des Sc. Paris, 1784.

Saint. Ann. chim. et phys. (2) 41 p. 373, 1829; Pogg. Ann. 16 p. 206, 1829.

Wertheim. Ann. chim. et phys. (3) 12 p. 385, 1844; 23 p. 52, 1844; 50 p. 202, 1857. Pogg. Ann. 78 p. 381, 1829.

Saint-Venant. Torsion des prismes. Paris, 1855.

Къ § 16.

Baumeister. W. A. 18 p. 578, 1882.

Pisati Nuovo Cimento. (3) 4 p. 152, 1878; 5 p. 34 p. 135, 1878

Къ § 17.

A. Koenig. W. A. 28 p. 108, 1886.

Къ § 19.

Bottanberg. Reports of the Brit. Assoc. 1881—1887

Tresson C. R. 59 p. 754, 1864; 60 p. 128, 1865; 64 p. 809, 1867.

W. Spring. Ann. chim. et phys. (5) 22 p. 170, 1891.

Къ § 20.

Spring. Bull. de l'Ac. R. d. Belg. (2) 45 p. 746, 1878; 49 p. 333, 1880; 3) 14 p. 595, 1887; Chem. Ber. 15 p. 595, 1881; 16 p. 324, p. 999, 1883; Bull. Soc. Chim. (Paris) 40 p. 520, 1883; 41 p. 488, 1884; 44 p. 166, 1885; 46 p. 299, 1886; 50 p. 218, 1888; Sill. J. (3) 35 p. 78, 1888; 36 p. 286, 1888; Ann. Soc. geol. Belg. 15 p. 156, 1888.

Roberts-Austen. Proc. Royal Soc. of London. 49 p. 281, 1896.

Къ § 21.

W. Weber. Pogg. Ann. 74 p. 217, 1835; 54 p. 1, 1841.

F. Kohlrausch. Pogg. Ann. 119 p. 337, 1863; 128 p. 1, 1866; 158 p. 337, 1876; 160 p. 225, 1877.

Stroont. Pogg. Ann. 153 p. 387, 1874; Wien. Ber. 79, 1874, 80 p. 397, Carl's Repert. 16 p. 476, 1880.

Marwell. Encyclop. Br. 9 изд. T. VI p. 313.

Neesen. Pogg. Ann. 157 p. 579, 1876.

Brann. Pogg. Ann. 159 p. 337, 1876; Carl's Repert. 17 p. 253, 1881

G. Wiedemann. Pogg. Ann. 103 p. 599, 1858; 106 p. 161; 167 p. 139, 1859; 117 p. 183, 1862; Wied. Ann. 6 p. 502, 1879.

Bodemann. Crelle's Journal 81 p. 96; W. A. 5 p. 430, 1878

O. E. Meyer. Crelle's Journ. 78 p. 130; Pogg. Ann. 151 p. 108, 1874; 154 p. 358, 1875; W. A. 4 p. 249, 1878.

Н. А. Гасковъ. Ж. Р. Ф. X. O. 14 стр. 287, 1882; Bubl. 7 p. 654, 1883

Н. Гасковъ и *Н. Гасковъ*. Ж. Р. Ф. X. O. 28 стр. 217, 1896.

Къ § 22.

Voigt. См. выше къ § 10.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Трение и ударъ твердыхъ тѣлъ.

§ 1. Внутреннее трение въ твердыхъ тѣлахъ. На стр. 496 и 516 мы познакомились съ явлениями внутреннего трения въ тѣлахъ разнообразныхъ и жидкихъ. Такъ какъ точныхъ границъ между тремя состояниями материи не существуетъ и слѣды свойствъ, резко выраженныхъ въ одномъ состояннн, почти всегда находятся и въ другихъ, то можно ожидать что слѣды внутреннего трения или вязкости найдутся и въ тѣлахъ твердыхъ: коэффициентъ трения (стр. 497 и 516), если о такомъ можетъ быть рѣчь, долженъ быть весьма великъ. Работы многихъ ученыхъ действительно указываютъ на то, что и для твердыхъ тѣлъ можно ввести представление о внутреннемъ трении. Такъ некоторые ученые объясняютъ явления упругаго послѣдствія внутреннимъ трениемъ въ деформированномъ тѣлѣ. Но въ

особенности тѣсную связь съ внутреннимъ трениемъ имѣть явление затуханія (стр. 135), замѣчаемое при колебаніяхъ упругихъ тѣлъ. Если тѣло прикрепить къ нѣпаному концу проволоки, повернуть его на нѣкоторый уголъ и затѣмъ предоставить самому себѣ, то оно будетъ производить вращательныя колебательныя движенія въ ту и другую сторону. Однако амплитуда колебаній будетъ постепенно уменьшаться, что лишь отчасти можетъ быть объяснено трениемъ воздуха и передачей энергии движенія окружающимъ тѣламъ черезъ точку закрѣпленія проволоки. Остается часть затуханія, которую только и можно объяснить внутреннимъ трениемъ, сопровождающимъ сдвигъ слоевъ проволоки.

§ 2. Трение между твердыми тѣлами при скользяніи. Когда поверхность одного твердаго тѣла скользитъ по поверхности другого, положимъ неподвижнаго, причемъ оба тѣла прижимаются другъ къ другу нѣкоторою силою P , то развивается новая сила F , касательная къ поверхности соприкосновенія, и дѣйствующая на движущееся тѣло по направлению обратному направлению его движенія. Эта сила F замедляющая относительное движеніе соприкасающихся тѣлъ, называется силою тренія. Причина тренія можетъ быть различна, прѣжде всего шероховатости поверхностей, представляя какъ бы малые выступы, должны являться непрерывнымъ рядомъ препятствій скользянію одной поверхности по другой. Въ то же время можетъ играть нѣкоторую роль и непосредственное сѣйленіе между частицами двухъ трущихся тѣлъ. Исслѣдованія Warburg'a и Babo (1877) привели къ заключенію, что треніе происходитъ вълѣдствіе гнупій, которымъ подвержены малые выступы, обуславливающіе не-идеальную гладкость. Даже хорошо полированной поверхности такимъ образомъ первоначальнымъ источникомъ тренія служатъ упругія силы, развивающіяся въ шероховатыхъ, поверхностныхъ слояхъ.

Треніе твердыхъ тѣлъ сопровождается отщепленіемъ мельчайшихъ частицъ отъ поверхности обоихъ трущихся тѣлъ. Иногда частицы одного тѣла пристають къ поверхности другого на этомъ основано писаніе карандашомъ (графитомъ) или мыломъ по бумагѣ, дереву и т. под. Сюда относится странное явленіе прилипанія частицы алюминія къ стеклу, которое, въ меньшей мѣрѣ, замѣчается и для малыхъ цинка и кадма, и которое изслѣдовать Margot.

Законы тренія впервые изслѣдовалъ Coulomb (1781). Приборъ которымъ онъ пользовался изображенъ на рис. 174; онъ понятенъ самъ собою. Плитка aa положенная на столъ и дно ящика b представляли трущиеся поверхности. Ящикъ приводился въ движеніе гирями, положенными на доску d и затѣмъ изслѣдованъ законъ его движенія. Оказалось что это движеніе вообще равномерное (стр. 54), что указываетъ на дѣйствіе по-

Рис. 374.



стоянной во время движенья силы. Часть P вѣсъ ящика, а стѣд. и та сила, съ которою трущихся поверхности прижаты другъ къ другу; p вѣсъ ширь и доски d т.е. сила приложенная къ ящику. Вычитая изъ p силу тренія F , получаемъ движущую силу $p - F$, которая должна равняться произведенію массы $\frac{P+p}{g}$, приведенной въ движеніе, на ускореніе γ движенья. Итакъ, мы имѣемъ

$$p - F = \frac{P+p}{g} \gamma \quad (1)$$

Ускореніе γ можетъ быть определено наблюденьемъ времени t , въ теченіе котораго ящикъ перемѣщается на разстояніе s . Тогда $s = \frac{1}{2} \gamma t^2$, стѣд. $\gamma = \frac{2s}{t^2}$, и окончательно

$$F = p - \frac{P+p}{g} \frac{2s}{t^2} \quad (2)$$

Пользуясь этой формулой, можно опредѣлить величину силы тренія F . Coulombъ нашелъ слѣдующіе законы:

I. Треніе пропорціонально давленію, существующему между трущимися поверхностями.

II. Треніе не зависитъ отъ величины трущихся поверхностей.

III. Треніе не зависитъ отъ скорости движенья одной поверхности по другой.

Постоянная величина

$$f = \frac{F}{P} \quad (3)$$

зависящая отъ рода трущихся поверхностей, называется коэффициентомъ тренія.

Morin (1833) повторилъ опыты Coulomb'a, вользуясь особымъ графическимъ методомъ, давшимъ возможность весьма точно извѣдывать законъ движенья тѣла, скользящаго по поверхности другой. Онъ опредѣлилъ коэффициентъ тренія f для различныхъ трущихся поверхностей, причемъ оказалось во-первыхъ, что во время движенья сила F , преодолевающая треніе, меньше, чѣмъ когда тѣло сначала находится въ покое и должно быть приведено въ движеніе и, во-вторыхъ, что и раньше было извѣстно, что треніе значительно уменьшается, если помѣстить между трущимися поверхностями «смазывающее» вещество, въ родѣ масла, керосина, сухого мыла и т. д.

Приводимъ нѣкоторыя числа Morin'a:

	f Въ началѣ движенія.	f Во время движенія.
Чугунъ и чугунъ, слабо смазанные . . .	0.16	0.15
Чугунъ и чугунъ, съ водою	—	0.31
Желѣзо и чугунъ, сухіе	0.19	0.18

Бронза и чугуны, сухіе	—	0,22
Бронза и желѣзо, слабо смазанныя	—	0,16
Бронза и бронза	—	0,20
Чугуны и дубъ, сухіе	—	0,49
» » » съ водою	0,65	0,22
» » » съ сухимъ мыломъ	—	0,19
Латуны и дубъ, сухіе	0,62	—
Дубъ и дубъ, волокны \parallel , сухіе	0,62	0,48
» » » » , съ сухимъ мыломъ	0,44	0,16
» » » волокны \perp , сухіе	0,54	0,34
» » » » , съ водою	0,71	0,25

Для трущихся желѣза и льда (коныки) Muller нашель $f = 0,016$ до 0,032.

Такъ наз. законы Coulomb'a несомѣнно лишь приблизительно вѣрны и не выражаютъ истинныхъ законовъ тренія. Такъ Кенне нашель, что коэффициентъ f растетъ при возрастающемъ давленіи P между трущимися поверхностями.

Вотъ нѣкоторыя изъ его чиселъ:

P в кр. сѣ.	Чугуны на чугуны.	Желѣзо на чугуны.	Сталь на чугуны.	Латуны на чугуны.
8,79	0,140	0,174	0,166	0,157
23,62	0,312	0,333	0,347	0,215
36,77	0,409	0,366	0,357	0,223
47,25	—	0,376	0,403	0,233
49,92	—	0,434	—	0,234
57,65	—	—	—	0,273

Когда тѣло M (рис. 475) движется по поверхности AB другого тѣла, то на него дѣйствуютъ со стороны этого тѣла двѣ силы: противоѣстие P по нормали къ поверхности и сила тренія F по касательной; равнодѣйствующая R составляетъ съ нормалью уголъ φ , тангенсъ котораго равенъ $F:P$, слѣд.

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \quad (4)$$

Если тѣло положено на наклонную плоскость, составляющую уголъ α съ горизонтомъ, то движеніе начнется при условіи

$$\alpha > \varphi. \quad (5)$$

Если $\alpha < \varphi$, то тѣло остается въ покоѣ. Чтобы удержать тѣло въ покоѣ на наклонной плоскости при условіи $\alpha > \varphi$, необходимо приложить къ нему силу Q , параллельную наклонной плоскости и заключающуюся въ предѣлахъ

$$P \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} > Q > P \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

въ чемъ легко убѣдиться.

Давно было замѣчено техниками, что треніе между хорошо смазанными частями машинъ вовсе не слѣдуетъ законамъ Coulomb'a. Н. П. Петровъ впервые въ 1883 г. изслѣдовалъ законы тренія для этого случая, въ которомъ внутреннее треніе въ самомъ смазывающемъ слое, какъ оказалось, играть наиболѣе важную роль. Главнѣйшіе результаты его изслѣдованій заключаются въ слѣдующемъ:

Сила тренія хорошо смазанныхъ машинныхъ частей пропорциональна поверхности трущихся тѣлъ, при всѣхъ прочихъ равныхъ обстоятельствахъ.

Сила тренія машинныхъ частей пропорциональна скорости ихъ относительнаго движенія.

Сила тренія обратно пропорциональна средней толщинѣ смазывающаго слоя.

Сила тренія пропорциональна корню квадратному отъ полныхъ давленій между трущимися поверхностями.

§ 3. **Нажимъ Prony.** Этотъ приборъ служитъ для опредѣленія мощности T (стр. 100) движущейся машины, измѣряемой тою работою, которую

Рис. 375.

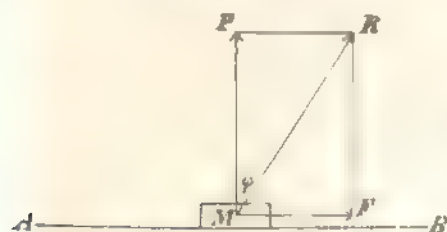


Рис. 376.



можетъ дать вращающійся валъ въ теченіе одной секунды. Приборъ, изображенный на рис. 376, состоитъ изъ двухъ кусковъ дерева M и M' , снабженныхъ выемками, между которыми, помощью винтовъ UV , сжимается ось P вала, вращающаяся съ обыкновенною скоростью. къ M прикрѣпленъ рычагъ L , къ концу котораго привѣшивается такой грузъ P , чтобы рычагъ не увлекался треніемъ оси, но оставался горизонтальнымъ. Если F сила тренія, r радиусъ вала и ω его угловая скорость то искома мощность T равна $F\omega r$. Моментъ вѣса P равенъ Pl , гдѣ l длина рычага L , моментъ вѣса послѣдняго p можно выразить въ видѣ pl . Въ такомъ случаѣ условіе равновѣсія рычага будетъ

$$Fr = (P + p)l,$$

но $T = F\omega r$, слѣд.

$$T = (P + p)\omega l.$$

Если n число оборотовъ въ минуту, то $\omega = \frac{2\pi n}{60}$, и мы находимъ некоторую мощность въ лошадиныхъ силахъ (стр. 101) по формулѣ

$$T = 2\pi n \frac{(P + p)l}{60 \times 75} \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ P и p должны быть выражены въ килограммахъ, l въ метрахъ.

слѣдуетъ (стр. 74), что измѣненія количества движенія шаровъ въ теченіе времени t также должны быть равны между собою. Это даетъ намъ уравненіе

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2,$$

или

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

т. е. сумма количествъ движенія обоихъ шаровъ не мѣняется во время удара.

Разсматривая подробно явленіе удара, мы должны обратить вниманіе на различія свойства соударяющихся тѣлъ. Ограничимся разборомъ двухъ крайнихъ идеальныхъ случаевъ—удара шаровъ совершенно неупругихъ и совершенно упругихъ. Другихъ вопросовъ, какъ напр. интересный, но весьма еще спорный вопросъ объ ударахъ относительно твердыхъ, т. е. вовсе не деформирующихся тѣлъ мы затрачивать не будемъ.

§ 6. Ударъ шаровъ неупругихъ. Здѣсь подъ неупругими подразумѣваются тѣла предѣль упругости которыхъ достигается при малѣйшей деформации, и въ которыхъ остаточная деформация вполнѣ равняется вызвавшей, такъ что никакого стремленія къ восстановленію формы не существуетъ. При ударѣ такихъ тѣлъ должна увеличиваться деформация пока скорости u_1 и u_2 не сравняются, что непременно должно произойти, такъ какъ мы видѣли, что во время удара v_1 уменьшается, v_2 увеличивается. Предположимъ, что во время t_1 скорости шаровъ сдѣлались одинаковыми и что ихъ общая величина $u_1 = u_2 = u$. Достигнувъ общей скорости, шары перестаютъ давить другъ на друга и движутся дальше съ этою скоростью u для которой (8) даетъ

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Этого формулою вполнѣ рѣшается вопросъ объ ударѣ неупругихъ шаровъ.

Опредѣлимъ количество движенія K , которымъ шары обмѣнялись. Имѣемъ $K = m_1 v_1 - m_1 u = m_1 u - m_2 v_2$. Вставивъ въ одно изъ этихъ выраженій величину u (9), получаемъ

$$K = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

K равняется количеству движенія массы $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, движущейся со скоростью, равной разности скоростей тѣлъ до удара.

Опредѣлимъ также потерю J живой силы неупругихъ тѣлъ при ударѣ. Эта потеря равна

$$J = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2 \right).$$

Вставляя сюда u , получаемъ

$$J = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Потерянная живая сила равна живой силѣ массы $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, движу-щейся со скоростью, равную разности скоростей тѣлъ до удара. Она затрачивается на работу деформаций и главнымъ образомъ переходитъ въ теплоту.

Въ частномъ случаѣ $m_1 = m_2$ и $v_2 = -v_1$ получаемъ $u = 0$, $J = 2,4 m_1 v_1^2$. Тѣла останавливаются и вся ихъ живая сила потеряна.

§ 7. Ударъ шаровъ упругихъ. Зѣтъ предполагается, что во время удара предѣлы упругости достигнуты не были, и что происходитъ полное восстановление прежней формы. Въ этомъ случаѣ мы должны весь ударъ раздѣлить на два периода: первый периодъ начинается отъ момента соприкосновения поверхностей, и кончается въ моментъ наибольшей деформации. Когда скорости шаровъ сдѣлались одинаковыми и равными тому u , которое дано въ (9). Затѣмъ наступаетъ второй периодъ: восстановление формы, въ течение котораго сжатыя части вновь дѣлаются выпуклыми, онъ оканчивается, а вмѣстѣ съ нимъ и весь актъ удара въ моментъ послѣдняго соприкосновения поверхностей. Обозначимъ скорость тѣлъ въ этотъ моментъ черезъ V_1 и V_2 , то въ то-же время скорости съ которыми тѣла продолжаютъ двигаться дальше послѣ удара.

Первое уравненіе для опредѣленія V_1 и V_2 напишемъ, основываясь на томъ, что и въ течение второго периода давленія тѣлъ другъ на друга равны между собою, а потому и импульсы силъ, которымъ они подвергаются въ течение каждаго элемента времени, равны между собою. Отсюда слѣдуетъ, что въ течение второго периода, какъ и въ течение первого, количество движенія, приобретенное массою m_2 , равно количеству движенія потерянное массою m_1 . Это дастъ намъ

$$m_1 v_1 - m_1 V_1 = m_2 V_2 - m_2 v_2. \quad (12)$$

Второе уравненіе можно получить двумя способами

А. Послѣ удара тѣла имѣютъ ту же форму, какъ и до удара: вся работа, произведенная во время удара, равна нулю, а слѣд. живая сила до и послѣ удара должна имѣть одно и то-же значеніе:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2. \quad (13)$$

Уравненія (12) и (13) можно переписать въ видѣ

$$\left. \begin{aligned} m_1(v_1 - V_1) &= m_2(V_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 - V_1^2) &= m_2(V_2^2 - v_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

Раздѣливъ второе уравненіе на первое получаемъ

$$v_1 + V_1 = V_2 + v_2.$$

Умноживъ это уравненіе на m_2 и вычтя его изъ (12), получаемъ V_1 , а затѣмъ V_2 :

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \\ V_2 &= \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Этими уравненіями опредѣляются скорости тѣлъ послѣ удара. Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи:

1. Шары одинаковы: $m_1 = m_2 = m$. Тогда $V_1 = v_2$ и $V_2 = v_1$; шары обмѣниваются скоростями. Когда одно тѣло догоняло другое, то послѣ удара первое пойдетъ дальше съ меньшей скоростью второго, а второе съ большей скоростью первого. Когда шары двигались другъ другу на встрѣчу, то они отскакиваютъ другъ отъ друга, причемъ каждый шаръ пріобрѣтаетъ скорость, которую имѣлъ другой. Когда $v_2 = 0$, то послѣ удара $V_1 = 0$ и $V_2 = v_1$; шаръ двигавшійся останавливается, а бывший въ покоѣ пріобрѣтаетъ скорость первого.

2. Второй шаръ обладаетъ безконечно большою массою, это случай удара въ стѣну, которая пусть также движется съ нѣкоторою скоростью v_2 . Раздѣливъ числитель и знаменатель двухъ выраженій (14) на m_2 и положивъ затѣмъ $m_2 = \infty$, получаемъ

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= -(v_1 - 2v_2) \\ V_2 &= v_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Скорость стѣны не измѣнилась; скорость же шара относительно стѣны переимѣнила знакъ, но до удара она была равна $v_1 - v_2$, а послѣ удара $V_1 - V_2 = -(v_1 - 2v_2) - v_2 = -(v_1 - v_2)$. Въ случаѣ $v_2 = 0$ имѣемъ $V_1 = -v_1$, скорость шара мѣняетъ знакъ. Въ случаѣ $v_1 = 2v_2$ получаемъ $V_1 = 0$, шаръ останавливается.

Опредѣлимъ то количество движенія K_1 , которымъ шары обмѣниваются во время удара, т-е. въ теченіе обоихъ периодовъ, на которые это время распадается; мы нашли уже что шары въ теченіе перваго періода обмѣниваются количествомъ движенія K , даннымъ формулою (10). Имѣемъ

$$K_1 = m_1(v_1 - V_1) \text{ или } K_1 = m_2(V_2 - v_2).$$

Вставивъ въ одно изъ этихъ выраженій V_1 или V_2 , получаемъ

$$K_1 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) = 2K \dots \dots \dots (16)$$

Обмѣнъ количества движенія при ударѣ упругихъ шаровъ вдвое больше, чѣмъ при ударѣ неупругихъ, или обмѣнъ во второмъ періодѣ равенъ обмѣну въ первомъ.

В. Формулы (14) можно вывести инымъ путемъ, считая только что выведенный результатъ а priori понятнымъ. Втеченіе второго періода должны

повторяться, только въ обратномъ порядкѣ, всѣ тѣ давления, которыя дѣйствовали на тѣла въ течение перваго периода. Отсюда вытекаеть (хотя и не съ очевидною ясностью), что импульсы силъ, а слѣд. и количества движенія, потерянное и приобретенное, въ обоихъ периодахъ одинаковы.

Втечение перваго периода масса m_1 потеряла скорость $v_1 - u$; въ течение второго ея скорость уменьшится еще на такую же величину, слѣд.

$$V_1 = v_1 - 2(v_1 - u) = 2u - v_1 (17,a)$$

Второе тѣло приобрѣло въ первомъ периодѣ скорость $u - v_2$; во второмъ оно приобрѣтетъ еще разъ такую же скорость, слѣд.

$$V_2 = v_2 + 2(u - v_2) = 2u - v_2 (17,b)$$

Вставляя (9) въ (17,a) и (17,b), получаемъ вновь (14). Затѣмъ уже можно доказать, что живая сила движенія не измѣнилась во время удара абсолютно упругихъ шаровъ.

§ 8. Наклонный ударъ шара въ стѣну. Когда шаръ встрѣчаетъ неподвижную стѣну по направлению, составляющему нѣкоторый уголъ α съ нормалью, то сложенная его скорости, параллельная стѣнѣ, остается безъ измѣненія, между тѣмъ какъ нормальная сложенная перемѣняетъ знакъ. Отсюда слѣдуетъ, что скорость послѣ удара, расположенная въ плоскости, проходящей черезъ направление скорости до удара и черезъ нормаль, составитъ съ послѣдней также уголъ α . Уголъ паденія будетъ равняться углу отраженія.

§ 9. Время удара. Время отъ момента перваго до момента послѣдняго соприкосновенія поверхностей соударяющихся тѣлъ назовемъ временемъ удара, обозначимъ его черезъ T . Это время весьма малое, когда ударъ происходитъ между тѣлами обыкновенныхъ размѣровъ. Для случая удара стальныхъ цилиндровъ HAMBURGER нашли въ среднемъ $T = 0.0006$ сек. при длинѣ цилиндровъ отъ 1 — 4 децим.

Полная теорія удара шаровъ была дана великимъ HERTZ'омъ (1882). Приводимъ его формулу для T (въ секундахъ), относящуюся къ случаю удара равныхъ шаровъ:

$$T = 2.9432R\sqrt{\frac{25\pi^2 s^2 (1 - \sigma^2)^2}{8cE^3}} (18)$$

Здѣсь R радиусъ шаровъ въ миллиметрахъ, s ихъ плотность, σ коэффициентъ Пуассона и E модуль Юнга для материала шаровъ, и c ихъ относительная скорость до удара. Плотность s должна быть выражена въ системѣ, въ которой килограммъ есть единица силы, миллиметръ единица длины, секунда единица времени. Единица массы въ этой системѣ равна 1000×9810 гр. и $s = s_0 \cdot 10^{-6}$, $(9810)^{-1}$, гдѣ s_0 плотность табличная (C. G. S.).

Полагая $\sigma = \frac{1}{3}$, получаемъ для стальныхъ шаровъ ($s_0 = 7.7$, $E = 20,000$)

$$T = 0.000024 R c^{-\frac{1}{4}} \text{ сек.}$$

для шаровъ изъ желтой мѣди ($s = 8.39$, $E = 10000$)

$$T = 0.00003 R c^{-1} \text{ сек.}$$

$R = 1.3$ мм. даетъ $T = 0.000181$ сек. при $c = 73.7 \frac{\text{мм.}}{\text{сек.}}$, и $T = 0.000138$ при $c = 295 \frac{\text{мм.}}{\text{сек.}}$. Измѣренія Hamburger'a дали результаты, хорошо согласующіеся съ этими числами.

Въ видѣ курьеза приведемъ слѣдующее указаніе Hertz'a, еслибы два стальныхъ шара, размѣровъ земн. двинались другъ другу на встрѣчу съ относительною скоростью $c = 10 \frac{\text{мм.}}{\text{сек.}}$, то время удара доходило бы до 27 часовъ.

ЛИТЕРАТУРА.

Coulomb Theorie des machines simples, 1781. Mem. des savants etrangers. X p. 254, 1785.

Warburg und Baba W. A. 2 p. 406, 1877.

Margot. Arch. sc. phys. 32 p. 158, 1894; 33 p. 161, 1895.

Morin. Nouvelles experiences sur le frottement Paris, 1833; Mém. de l'Acad. française II, III, 1834, 1835, Dove's Repertor. I.

J. Mueller. Pogg. Ann. 139 p. 505, 1870.

Rennie Engl. Journal 34 p. 165, 1829, Phil. Trans. 1829 Hann. Archit. 1861 p. 346.

Н. Н. Петровъ Описание и результаты опытовъ надъ треніемъ жидкостей и машинъ. Изв. Сиб. Техническаго Института 1885 г. Спб. 1896.

Н. Н. Шиллеръ. Равновѣсіе твердаго тѣла при дѣйствіи тренія и т. д. О. Ф. II. Об. Л. Е. 5 вып. 1. стр. 17, 1892.

Къ § 3.

Prony. Ann. chim. phys. (2) 19 p. 165, 1822.

Къ § 5.

По вопросу объ ударѣ-тѣлъ:

Н. Е. Жуковскій. Ж. Ф. Х. О. 16 стр. 388, 1884; 17 стр. 47, 1885.

Н. Н. Шиллеръ. Ж. Ф. Х. О. 17 стр. 5, 20, 1885.

Б. Станкевичъ. Ж. Ф. Х. О. 22 стр. 118, 1890.

Къ § 9.

Hamburger. W. A. 26 p. 653, 1886.

Hertz. Crelle's Journ. 92 p. 156, 1882. Ges. Werke I p. 155.

ТАБЛИЦЫ.

Всѣ таблицы (кроме I) заимствованы изъ книги: «Landolt und Bornstein, Physikalisch-Chemische Tabellen», второе издание, Берлинъ 1894.

ТАБЛИЦА I.

Атомные вѣса важнѣйшихъ химическихъ элементовъ.

F. W. Clarke, Journ. Amer. Chem. Soc. 18 p. 1. 1896; Zeitschr. f. physical. Chemie 21 p. 181, 1891. При $H = 1$ принято $O = 15,88$.

НАЗВАНІЯ.	Знакъ.	$H = 1$	$O = 16$	НАЗВАНІЯ.	Знакъ.	$H = 1$	$O = 16$
		$O = 15,88$	$H = 1,008$			$O = 15,88$	$H = 1,008$
Азотъ	<i>N</i>	13,94	14,04	Мѣдь	<i>Cu</i>	63,12	63,69
Алюминій . . .	<i>Al</i>	26,91	27,11	Натрій	<i>Na</i>	22,88	23,05
Барій	<i>Ba</i>	136,40	137,43	Никкель	<i>Ni</i>	58,24	58,69
Боръ	<i>B</i>	10,86	10,95	Олово	<i>Sn</i>	118,15	119,05
Бромъ	<i>Br</i>	79,34	79,95	Осмій	<i>Os</i>	189,55	190,99
Висмутъ	<i>Bi</i>	206,54	208,11	Палладій	<i>Pd</i>	105,56	106,36
Водородъ	<i>H</i>	1,00	1,008	Платина	<i>Pt</i>	193,41	194,89
Желѣзо	<i>Fe</i>	55,60	56,02	Ртуть	<i>Hg</i>	198,50	200,00
Золото	<i>Au</i>	195,74	197,24	Свинецъ	<i>Pb</i>	205,36	206,92
Иридіи	<i>Ir</i>	191,66	193,12	Селенъ	<i>Se</i>	78,40	79,00
Іодъ	<i>I</i>	125,89	126,85	Серебро	<i>Ag</i>	107,11	107,92
Кадмій	<i>Cd</i>	111,08	111,93	Стронцій	<i>Sr</i>	86,95	87,61
Калій	<i>K</i>	38,82	39,11	Сурьма	<i>Sb</i>	119,52	120,43
Кальцій	<i>Ca</i>	39,78	40,08	Сѣра	<i>S</i>	31,83	32,07
Кислородъ	<i>O</i>	15,88	16,00	Талій	<i>Tl</i>	202,60	204,15
Кобальтъ	<i>Co</i>	58,49	58,93	Углеродъ	<i>C</i>	11,92	12,01
Кремній	<i>Si</i>	28,18	28,40	Фосфоръ	<i>P</i>	30,79	31,02
Литій	<i>Li</i>	6,97	7,03	Фторъ	<i>Fl</i>	18,89	19,33
Магній	<i>Mg</i>	24,11	24,29	Хлоръ	<i>Cl</i>	35,18	35,45
Марганецъ	<i>Mn</i>	54,57	54,99	Хромъ	<i>Cr</i>	51,74	52,14
Мышьякъ	<i>As</i>	74,52	75,09	Цинкъ	<i>Zn</i>	64,91	65,41

ТАБЛИЦА II.

Плотность δ_t воздуха

относительно воды, при различных температурах t , при давлении в 760 мм., широты 45° , у поверхности моря (сухой воздух с 0.04% CO_2 по объему).

$$\delta_t = \frac{0,001293052}{1 + 0,003670t}$$

t	δ_t	t°	δ_t	t	δ_t	t	δ_t
	0,00		0 00		0,00		0,000
-25	14237	2	12836	31	11610	115	9070
-20	13955	3	12790	32	11572	120	8977
-15	13684	4	12743	33	11534	125	8864
-10	13423	5	12698	34	11496	130	8754
-5	13172	6	12652	35	11459	135	8647
-4	13123	7	12607		0,000	140	8542
-3	13074	8	12562	90	9730	145	8438
-2	13026	9	12517	91	9693	150	8340
-1	12978	10	12473	92	9667	155	8242
-0,9	12973	11	12429	93	9640	160	8147
-0,8	12969	12	12385	94	9613	165	8054
-0,7	12964	13	12342	95	9588	170	7963
-0,6	12959	14	12299	96	9562	175	7874
-0,5	12954	15	12256	97	9536	180	7787
-0,4	12950	16	12213	98	9510	185	7702
-0,3	12945	17	12171	99	9485	190	7618
-0,2	12940	18	12129	100	9459	195	7537
-0,1	12935	19	12088	101	9434	200	7457
+0,0	12931	20	12046	102	9409	205	7379
+0,1	12926	21	12005	103	9384	210	7303
0,2	12921	22	11965	104	9359		
0,3	12916	23	11924	105	9334		
0,4	12912	24	11884	106	9309		
0,5	12907	25	11844	107	9286		
0,6	12902	26	11804	108	9260		
0,7	12897	27	11765	109	9236		
0,8	12893	28	11726	110	9212		
0,9	12888	29	11687				
1	12893	30	11648				

ТАБЛИЦА III.

Плотность δ газовъ (воздухъ $\delta = 1$) и вѣсъ p литра газовъ при 0° , 760 мм. и широтѣ 45° .

(Принято $O = 15.96$ при $H = 1$).

В Е Щ Е С Т В О.	Формула.	Молекул. вѣсъ ($H = 2$)	p грамм.	δ
Азотъ	N_2	28,02	1,2546	0,9718
Аммиакъ	NH_3	17,01	0,7613	0,5901
Ацетиленъ	C_2H_2	26,04	1,1615	0,92
Бромъ	Br_2	159,52	7,1426	5,5243
Водородъ	H_2	2	0,08955	0,0693
Двуокись углерода	CO	43,89	1,9652	1,529
Закись азота	N_2O	43,98	1,9692	1,614
Кислородъ	O_2	31,92	1,4292	1,1056
Метанъ	CH_4	16,07	0,71506	0,5576
Окись азота	NO	30,07	1,3419	1,037
Окись углерода	CO_2	44,03	1,2506	0,9678
Сѣрный газъ	SO_2	64,06	2,8611	2,277
Сѣропородъ	H_2S	34,08	1,5215	1,1912
Фтористый водородъ	HF	20,06	0,8982	0,713
Фторъ	Fl_2	38,12	1,7068	1,26
Хлористый водородъ	HCl	36,37	1,6285	1,256
Хлоръ	Cl_2	70,74	3,1674	2,4502
Цианъ	CN_2	51,96	2,3265	1,806
Этанъ	C_2H_6	30,04	1,3406	1,075
Этиленъ	C_2H_4	28,04	1,2510	0,9852

(при 20°)

ТАБЛИЦА IV.

Плотность чистой воды между 0° и 35°,

отнесенная къ плотности при 4°, по наблюдениямъ Thiesen, Scheel и Marek.
Температуры по водородной шкалѣ.

t°	Д Е С Я Т Ы Е Д О Л И Г Р А Д У С А.									
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,999874	880	876	892	898	904	909	915	920	925
1	930	935	939	944	948	952	956	960	963	967
2	970	973	976	979	981	984	986	988	990	992
3	993	994	996	997	998	999	999	000	000	000
4	1,000000	000	000	999	999	998	997	996	995	993
5	0,999992	990	988	986	984	982	980	977	975	972
6	969	966	962	959	955	952	948	944	940	935
7	931	926	921	916	911	906	901	895	890	884
8	878	872	866	860	854	847	840	833	826	819
9	812	804	797	789	781	773	765	757	748	740
10	731	722	713	704	695	686	676	667	657	647
11	637	627	617	606	596	585	574	563	552	541
12	530	518	507	495	483	471	459	447	435	422
13	410	397	384	371	358	345	332	318	305	291
14	277	263	249	235	221	206	192	177	162	147

t'	Д Е С Я Т Ы Я				Д О Л И		Г Р А Д У С А.			
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
15	132	117	102	087	071	056	040	024	008	992
16	0,998976	960	943	927	910	893	876	859	842	825
17	808	790	772	755	737	719	701	683	664	646
18	628	609	590	571	552	533	514	495	476	456
19	437	417	397	377	357	337	317	296	276	255
20	235	214	193	172	151	130	109	087	066	044
21	023	001	979	957	935	913	890	868	846	823
22	0,997800	778	755	732	709	685	662	639	615	592
23	508	514	520	496	472	448	424	399	375	350
24	326	301	276	251	226	201	176	150	125	099
25	073	048	022	996	970	943	917	891	864	838
26	0,996811	784	758	731	704	677	649	622	595	567
27	540	512	485	457	429	401	373	345	317	288
28	260	231	203	174	145	116	087	058	029	000
29	0,995971	942	912	883	853	823	794	764	734	704
30	674	644	614	583	553	522	492	461	430	399
31	368	337	306	275	243	212	180	148	117	085
32	053	021	989	957	925	893	861	829	796	764
33	0,994731	698	665	632	599	566	533	500	467	434
34	400	367	333	300	266	232	198	164	130	096
35	062	028	994	960	925	891	856	822	787	752

ТАБЛИЦА V.

Плотность δ чистой воды между 35° и 100° .Отнесенная къ плотности при 4° по наблюдениямъ Matthiessen и Rosetti.

t	δ	t	δ	t	δ
36	0,99372	58	0,98432	79	0,97191
37	337	59	382	81	129
38	308	60	331	82	066
39	268	61	280	83	004
40	233	62	228	84	0,96941
41	195	63	175	85	876
42	157	64	121	86	812
43	117	65	067	87	746
44	077	66	012	88	682
45	035	67	0,97957	89	616
46	0,96993	68	902	90	550
47	949	69	846	91	483
48	905	70	780	92	416
49	860	71	733	93	348
50	813	72	674	94	280
51	767	73	615	95	212
52	721	74	555	96	143
53	674	75	495	97	074
54	627	76	435	98	005
55	579	77	375	99	0,95934
56	530	78	314	100	883
57	481	79	253		

ТАБЛИЦА VI.

Плотность δ чистой воды ниже 0° .

По наблюдениямъ Pierre, Weidner и Rosetti.

t	δ	t	δ
-10	0,99815	-5	0,99930
-9	843	-4	945
-8	869	-3	958
-7	892	-2	970
-6	912	-1	974

ТАБЛИЦА VII.

Плотность δ ртути между 0° и 30° .

По наблюдениямъ Marek'a.

t	δ	t	δ	t	δ
0	13,5956	11	13,5685	21	13,5440
1	5931	12	5660	22	5414
2	5907	13	5635	23	5380
3	5882	14	5611	24	5355
4	5857	15	5586	25	5341
5	5833	16	5562	26	5316
6	5808	17	5537	27	5292
7	5783	18	5513	28	5267
8	5759	19	5488	29	5243
9	5734	20	5463	30	5218
10	5709				

ТАБЛИЦА VIII.

Плотность ртути между 0° и 360° .

По наблюдениямъ Marek'a.

t	δ	t	δ	t	δ	t	δ
0	13,5956	100	13,3724	200	13,1150	300	12,8807
10	5709	110	3284	210	0915	310	8573
20	5463	120	3045	220	0680	320	8340
30	5218	130	2807	230	0445	330	8107
40	4974	140	2569	240	0210	340	7873
50	4731	150	2331	250	12,9976	350	7640
60	4488	160	2094	260	9742	360	7406
70	4246	170	1858	270	9508		
80	4005	180	1621	280	9274		
90	3764	190	1385	290	9041		

ТАБЛИЦА IX.

Плотность δ важнейшихъ химическихъ элементовъ.

НАЗВАНІЕ.	δ	НАЗВАНІЕ.	δ
Алюминій .	2,60	Олово .	6,97 7,37
Азотъ	см. табл. III	Палладій .	10,9—12,1
Барій .	3,75	Платина .	21,50
Бромъ	3,15	Ртуть .	13,55
Галій	2,00 (?)	Свинецъ .	11,4
Висмутъ	9,80	Селенъ .	
Водородъ	см. табл. III	Кристаллическ. .	4,8
Железо	7,86	Аморфный .	4,2
Чугунъ .	7,82	Серебро .	10,53
Сталь .	7,70	Жидкое .	9,51
Жидкое	6,88	Стронцій .	2,54
Золото	19,32	Сурьма .	6,71
Иридій	22,42	Сѣра .	
Іодъ	4,95	Ромбическая .	2,07
Кадмій .	8,60	Моноклинномѣр. .	1,96
Калій .	0,87	Аморфная . .	1,92
Кальцій .	1,57	Жидкая 113° .	1,811
Кислородъ	см. табл. III	Углеродъ .	
Кобальтъ .	8,3—8,7	Алмазь . . .	3,52
Кремній .		Графитъ . . .	2,3
Кристаллическ. .	2,39	Реторти. уголь .	1,885
Аморфный . . .	2,00	Фосфоръ .	
Литій	0,59	Бѣлый	1,83
Магній	1,74	Красный . . .	2,20
Мѣдь	8,92	Металлическій .	2,34
Жидкая	8,217	Хлоръ .	
Мышьякъ .		Газообразный . см. табл. III	
Кристаллическ. .	5,727	жидкій при -80° .	1,660
Аморфный . . .	4,71	0° .	1,469
Плавленный . .	5,71	+36° .	1,362
Аморфн. черный .	3,7	80° .	1,200
Натрій	0,977	Хромъ	6,50
Никкель .	8,9	Цинкъ	6,86—7,24

ТАБЛИЦА X.

Плотность δ некоторых химических соединений.

НАЗВАНИЕ.	Формула.	δ	НАЗВАНИЕ	Формула.	δ
Азотъ.			Натриевые . . .	$AlNa(SO_4)_2 + 12H_2O$	1,60
Азотн. кислота .	HNO_3	1,56	Хромовые . . .	$CrK(SO_4)_2 + 12H_2O$	1,837
	Дымчатая.	1,48	Кремній.		
Барій.			Кварцъ . . .	SiO_2	2,65
Окись . . .	BaO	5,00	Ледъ 0° . . .	H_2O	0,9167
Перекись . . .	BaO_2	4,96	Магній.		
Баритъ . . .	$Ba(OH)_2 + 8H_2O$	1,656	Окись . . .	MgO	3,22
Желѣзо.			Марганецъ.		
Окись . . .	Fe_2O_3	5,12	Перекись . . .	MnO_2	5,03
Магнитн. желѣз.	Fe_3O_4	5,16	Мѣдь.		
Купоросъ . . .	$FeSO_4$	2,99	Окислы . . .	Cu_2O	5,88
	$FeSO_4 + 7H_2O$	1,881		CuO	6,40
Калій			Малахитъ . . .	$CuCO_3 + Cu(OH)_2$	3,85
Хлористый . . .	KCl	1,977	Купоросъ . . .	$CuSO_4$	3,58
Бромистый . . .	KBr	2,690		$CuSO_4 + 5H_2O$	2,272
Иодистый . . .	KI	3,070	Натрій.		
Ѣдкій кали . . .	KHO	2,044	Хлористый . . .	$NaCl$	2,15
	$KOH + H_2O$	1,987	Бромистый . . .	$NaBr$	3,014
Углекисл. соль . . .	K_2CO_3	2,29	Иодистый . . .	NaI	3,55
	$K_2CO_3 + 2H_2O$	2,043	Сода . . .	Na_2CO_3	2,478
	$KHCO_3$	2,17		$Na_2CO_3 + 10H_2O$	1,458
Сѣрноокисл. соль.	$KHSO_4$	2,355		$NaHCO_3$	2,206
Кальцій.			Сѣрнонатр. соль.	$Na_2SO_4 + 10H_2O$	1,462
Хлористый . . .	$CaCl_2$	2,216	Буря . . .	$Na_3B_3O_7 + 10H_2O$	1,721
	$CaCl_2 + 6H_2O$	1,654	Нашатырь . . .	NH_4Cl	1,52
Фтористый . . .	CaF_2	3,183	Ртуть.		
Окись . . .	CaO	3,15	Окислы . . .	Hg_2O	9,82
	$Ca(OH)_2$	2,078		HgO	11,14
Углекисл. . . .	$CaCO_3$	2,82	Соединенія съ Cl	Hg_2Cl_2	7,103
Шпатъ известк.	"	2,715		$HgCl_2$	5,424
Аррагонитъ . . .	"	2,934	Свинецъ.		
Гипсъ . . .	$CaSO_4$	2,96	Хлористый . . .	$PbCl_2$	5,80
	$CaSO_4 + 2H_2O$	2,32	Окись . . .	PbO (желтая).	9,2
Квасцы.			Сурикъ . . .	Pb_3O_4	9,07
Калиевые	$AlK(SO_4)_2$	2,238	Серебро.		
	$AlK(SO_4)_2 + 12H_2O$	1,72	Хлористое . . .	$AgCl$	5,55

НАЗВАНИЕ.	Формула.	г	НАЗВАНИЕ.	Формула.	г
Бромистое . .	$AgBr$	6,33	Строуглеродъ .	CS_2	1,264
Иодистое. . .	AgJ	5,62	Хлоръ.		
Азотнокислое .	$AgNO_3$	4,34	Солин. кислота	$ClH+2H_2O$	1,46
Сѣра.			" "	Дымцал.	1,22
Сѣрная кислота.	SO_2 (ангидр.)	1,913	Хромъ.		
	H_2SO_4	1,853	Хромокис. калий.	K_2CrO_4	2,721
Углеродъ.			Двухромов. калий.	$K_2Cr_2O_7$	2,70
Двуокись } . .	CO_2	34 1,057	Цинкъ.		
жидкая. } . .		0° 0,9471	Хлористый . .	$ZnCl_2$	2,75
		+10° 0,8940	Окись . . .	ZnO	5,65
		20° 0,8267	Купоросъ . .	$ZnSO_4$	3,49
Твердая . .		1,2		$ZnSO_4+7H_2O$	2,015

Органическія соединенія.

Около 20°.

НАЗВАНИЕ.	Формула.	г
Алкоголь		
метилловый . .	CH_4O (20°)	0,796
Алкоголь		
этиловый. . .	C_2H_5O (20°)	0,789
Анилинъ. . . .	C_6H_5N	1,022
Бензолъ	C_6H_6	0,880
Глицеринаъ . . .	$C_3H_8O_3$	1,26
Камфора. . . .	$C_{10}H_{16}O$	1,00
Муравьиная кисл.	CH_3O_2	1,220
Нафталинъ . . .	$C_{10}H_8$	1,145
Толуолъ. . . .	C_7H_8	0,886
Уксусная кислота.	$C_2H_4O_2$	1,05
Уксуснокис. амилъ.	$C_5H_{11}O_2$	0,80
Фенолъ	C_6H_6O	1,072
Хлороформъ . .	$CHCl_3$	1,526

Различныя вещества.

НАЗВАНИЕ.	г
Азбестъ	2,05—2,8
Асфальтъ . . .	1,07—1,2
Воскъ	0,96—0,97
Гранитъ. . . .	2,54—2,96
Гуттаперча . .	0,97
Каучукъ. . . .	0,95
Кости	1,7—2,0
Мраморъ. . . .	2,65—2,8
Мѣль. . . .	2,25—2,60
Парафинъ . . .	0,87—0,93
Слововая кость .	1,83—1,92
Стекло (Кронъ). .	2,5—2,7
Стекло-флинтъ .	3,15—3,4
" тяжелый . . .	3,6—3,9
Фарфоръ. . . .	2,24—2,49

ТАБЛИЦА XI.

Капиллярная постоянная a^2 и поверхностное натяжение γ воды.

$$a = \frac{a^2 \delta}{2}, \text{ где } \delta \text{ плотность воды.}$$

t	a^2	a	t	a^2	γ	t	a^2	γ
0	15,4080	7,923	34	14,4458	7,323	68	13,4836	6,682
1	15,3797	7,906	35	14,4175	7,304	69	13,4553	6,663
2	15,3514	7,889	36	14,3892	7,286	70	13,4270	6,643
3	15,3231	7,871	37	14,3609	7,268	71	13,3987	6,624
4	15,2948	7,854	38	14,3326	7,249	72	13,3704	6,604
5	15,2665	7,837	39	14,3043	7,231	73	13,3421	6,585
6	15,2382	7,820	40	14,2760	7,212	74	13,3138	6,565
7	15,2099	7,802	41	14,2477	7,194	75	13,2855	6,545
8	15,1816	7,785	42	14,2194	7,175	76	13,2572	6,526
9	15,1533	7,768	43	14,1911	7,157	77	13,2289	6,506
10	15,1250	7,750	44	14,1628	7,139	78	13,2006	6,486
11	15,0967	7,733	45	14,1345	7,120	79	13,1723	6,466
12	15,0684	7,715	46	14,1062	7,101	80	13,1440	6,446
13	15,0401	7,698	47	14,0779	7,083	81	13,1157	6,426
14	15,0118	7,680	48	14,0596	7,064	82	13,0874	6,406
15	14,9835	7,663	49	14,0213	7,045	83	13,0691	6,386
16	14,9552	7,645	50	13,9930	7,026	84	13,0308	6,366
17	14,9269	7,627	51	13,9647	7,007	85	13,0025	6,346
18	14,8986	7,610	52	13,9364	6,988	86	12,9742	6,326
19	14,8703	7,592	53	13,9081	6,969	87	12,9469	6,306
20	14,8420	7,574	54	13,8898	6,950	88	12,9176	6,286
21	14,8137	7,557	55	13,8515	6,931	89	12,8893	6,266
22	14,7854	7,539	56	13,8232	6,912	90	12,8610	6,246
23	14,7571	7,521	57	13,7949	6,893	91	12,8327	6,225
24	14,7288	7,503	58	13,7666	6,874	92	12,8044	6,205
25	14,7005	7,485	59	13,7383	6,855	93	12,7761	6,185
26	14,6722	7,467	60	13,7100	6,836	94	12,7588	6,164
27	14,6439	7,449	61	13,6817	6,817	95	12,7295	6,144
28	14,6156	7,431	62	13,6534	6,798	96	12,6902	6,124
29	14,5873	7,413	63	13,6251	6,779	97	12,6639	6,103
30	14,5590	7,395	64	13,5968	6,759	98	12,6346	6,083
31	14,5307	7,377	65	13,5685	6,740	99	12,6063	6,063
32	14,5024	7,359	66	13,5402	6,721	100	12,5780	6,042
33	14,4741	7,341	67	13,5119	6,702			

ТАБЛИЦА XII.

Капиллярная постоянная a^2 и поверхностное натяжение α алкоголя и эфира.

$$\alpha = \frac{a^2 \delta}{2}, \text{ где } \delta \text{ — плотность жидкости.}$$

Эфиръ.			Алкоголь.		Эфиръ.			Алкоголь.		Алкоголь.			Алкоголь.		
t	a^2	α	a^2	α	t	a^2	α	a^2	α	t	a^2	α	t	a^2	α
0	5,4335	1,971	6,062	2,585	27	4,7342	1,656	5,677	2,348	36	5,548	2,269	63	5,161	2,031
1	5,4076	1,959	6,048	2,576	28	4,7083	1,644	5,663	2,339	37	5,534	2,260	64	5,147	2,022
2	5,3817	1,948	6,033	2,567	29	4,6824	1,632	5,648	2,330	38	5,519	2,251	65	5,133	2,013
3	5,3558	1,936	6,019	2,559	30	4,6565	1,620	5,633	2,321	39	5,505	2,242	66	5,119	2,005
4	5,3299	1,924	6,005	2,550	31	4,6306	1,609	5,619	2,313	40	5,490	2,233	67	5,104	1,996
5	5,3040	1,913	5,991	2,541	32	4,6047	1,597	5,605	2,304	41	5,476	2,225	68	5,090	1,987
6	5,2781	1,901	5,977	2,532	33	4,5788	1,586	5,591	2,295	42	5,462	2,216	69	5,076	1,978
7	5,2522	1,889	5,963	2,523	34	4,5529	1,574	5,577	2,286	43	5,447	2,207	70	5,061	1,969
8	5,2263	1,878	5,948	2,515	35	4,5269	1,562	5,562	2,277	44	5,433	2,198	71	5,047	1,960
9	5,2004	1,866	5,934	2,506						45	5,419	2,189	72	5,033	1,951
10	5,1745	1,854	5,920	2,497						46	5,404	2,181	73	5,018	1,942
11	5,1486	1,843	5,905	2,488						47	5,390	2,172	74	5,004	1,933
12	5,1227	1,831	5,891	2,479						48	5,376	2,163	75	4,990	1,925
13	5,0968	1,819	5,877	2,471						49	5,361	2,154	76	4,976	1,916
14	5,0709	1,808	5,863	2,462						50	5,347	2,145	77	4,962	1,907
15	5,0450	1,796	5,848	2,453						51	5,333	2,137	78	4,948	1,898
16	5,0191	1,774	5,834	2,444						52	5,319	2,128			
17	4,9932	1,763	5,820	2,435						53	5,304	2,119			
18	4,9673	1,751	5,805	2,427						54	5,290	2,110			
19	4,9414	1,749	5,791	2,418						55	5,276	2,101			
20	4,9155	1,737	5,776	2,409						56	5,261	2,093			
21	4,8896	1,726	5,763	2,400						57	5,247	2,084			
22	4,8637	1,714	5,748	2,391						58	5,233	2,075			
23	4,8378	1,702	5,733	2,383						59	5,218	2,066			
24	4,8119	1,691	5,719	2,374						60	5,204	2,057			
25	4,7860	1,679	5,705	2,365						61	5,190	2,049			
26	4,7601	1,667	5,691	2,356						62	5,176	2,040			

ТАБЛИЦА XIII.

Капиллярная постоянная a^2 и поверхностное натяжение α различных жидкостей.

$$\alpha = \frac{a^2 \delta}{2}, \text{ где } \delta \text{ плотность жидкости.}$$

В Е Щ Е С Т В О.	Формула.	t°	a^2 (кв. мм).	α (мгр.).
Алкоголь	C_2H_6O	—	см. таб. XII.	—
Бензолъ	C_6H_6	15	6,817	2,877
Вода	H_2O	—	см. таб. XI.	—
Муравьиная кислота	CH_3CO_2	20	7,137	4,097
Оливковое масло	—	22	7,159	3,271
Ртуть	Hg	20	6,764	45,82
Терпентиновое масло	$C_{10}H_{16}$	21	6,100	2,726
Уксусная кислота	$C_2H_4O_2$	15,6	5,576	2,957
Хлороформъ	$CHCl_3$	20	3,755	2,638
Эфиръ	$C_4H_{10}O$	—	см. таб. XII.	—

ОБЗОРЪ ТАБЛИЦЪ.

	стр.
I. Атомные вѣса вѣдѣйшихъ химическихъ элементовъ	617
II. Плотность воздуха	618
III. Плотность и вѣсъ литра газовъ	619
IV. Плотность чистой воды между 0° и 35°	620
V. Плотность чистой воды между 35° и 100°	622
VI. Плотность чистой воды ниже 0°	623
VII. Плотность ртути между 0° и 30°	623
VIII. Плотность ртути между 0° и 360°	624
IX. Плотность вѣдѣйшихъ химическихъ элементовъ	624
X. Плотность нѣкоторыхъ химическихъ соединений	625
Органическія соединения	626
Различныя вещества	626
XI. Капиллярная постоянная и поверхностное натяженіе воды	627
XII. Капиллярная постоянная и поверхностное натяженіе спиртовъ и эфира	628
XIII. Капиллярная постоянная и поверхностное натяженіе различныхъ жидкостей	630



